Travaux Dirigés n°3

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice à l'influence des queues de distribution de la loi d'importance dans un contexte simple. Supposons que l'on souhaite estimer l'espérance de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère pour loi d'importance la loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, $\sigma > 0$.

1. Donner la variance de l'estimateur d'échantillonnage préférentiel en fonction de σ.

2. Pour quel choix de σ obtient-on l'estimateur d'échantillonnage préférentiel de variance minimal ?

3. En choisissant cette valeur optimale plutôt que $\sigma^2 = 1$, de combien réduit-on la variance ?

Exercice 2 *(Variables antithétiques)*. On cherche à calculer $\mathbb{E}[\Phi(\mathbf{Z})]$, avec $\mathbf{Z} = (Z_1,\dots,Z_d)$ un d-uplet de variables aléatoires *i.i.d.* suivant la loi ν et $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable croissante en chacune de ses coordonnées telle que $\mathbb{E}\left[\Phi^2(\mathbf{Z})\right] < +\infty$. Dans la suite on se donne $\left(\mathbf{Z}^{(n)}\right)_{n\geq 1} = \left(Z_1^{(n)},\dots,Z_d^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* suivant la loi de $\mathbf{Z}$. On note l'estimateur de Monte Carlo classique

$$\widehat{\delta}_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Phi\left(\mathbf{Z}^{(i)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Phi\left(Z_1^{(i)},\dots,Z_d^{(i)}\right).$$

Soit $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable décroissante en chacune de ses coordonnées telle que $\Phi(Z_1,\dots,Z_d)$ et $\Psi(Z_1,\dots,Z_d)$ ont même loi. On souhaite montrer que l'estimateur

$$\widehat{\delta}_n^{(2)} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \Phi\left(\mathbf{Z}^{(i)}\right) + \Psi\left(\mathbf{Z}^{(i)}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \Phi\left(Z_1^{(i)},\dots,Z_d^{(i)}\right) + \Psi\left(Z_1^{(i)},\dots,Z_d^{(i)}\right)$$

est plus efficace (en terme de réduction de variance) que l'estimateur $\widehat{\delta}_n^{(1)}$ en procédant par réccurence sur d. Le résultat dans le cas de la dimension $d = 1$ a déjà été établi dans le cours. L'objectif est donc de montrer que pour tout $d > 1$,

$$\mathrm{Cov}[\Phi(\mathbf{Z}),\Psi(\mathbf{Z})] = \mathrm{Cov}[\Phi(Z_1,\dots,Z_d),\Psi(Z_1,\dots,Z_d)] \leq 0. \tag{1}$$

On suppose dans la suite que (1) est vérifiée au rang $d-1$.

1. Montrer que

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathbb{E}[\Phi(Z_1,\dots,Z_{d-1},x)], \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} \Gamma & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathbb{E}[\Psi(Z_1,\dots,Z_{d-1},x)], \end{array}$$

sont respectivement croissantes et décroissantes sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que $\mathbb{E}[\Lambda(Z_d)\Gamma(Z_d)] - \mathbb{E}[\Lambda(Z_d)]\mathbb{E}[\Gamma(Z_d)] \leq 0$.

3. Montrer que $\mathbb{E}[\Phi(\mathbf{Z})\Psi(\mathbf{Z})] - \mathbb{E}[\Lambda(Z_d)\Gamma(Z_d)] \leq 0$, et en déduire le résultat au rang d.

4. Comparer les estimateurs $\widehat{\delta}_n^{(1)}$, et $\widehat{\delta}_{2n}^{(1)}$ avec $\widehat{\delta}_n^{(2)}$.

◇ Travail personnel ◇

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ et K une constante réelle. On s'intéresse au calcul de

$$p := \mathbb{P}\left[e^X \geq K\right].$$

1. Montrer que pour tout réel m

$$p = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{2m(X-\mu)-m^2}{2\sigma^2}\right\}\mathbb{1}_{\{e^{X-m}\geq K\}}\right]$$

2. En déduire un estimateur d'échantillonnage préférentiel pour le calcul de p et suggérer une valeur de m.

3. En utilisant une loi de support $[\ln K, +\infty[$, quel autre estimateur d'échantillonnage préférentiel auriez-vous pu proposer ?

Exercice 4. On suppose que $\mathbf{Z}$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}_d, \mathbf{I}_d)$ et Φ une fonction monotone en chacune de ses coordonnées et bornée. En vous appuyant sur le résultat de l'Exercice 2, proposer une méthode d'estimation de $\mathbb{E}[\Phi(\mathbf{Z})]$.