

TD n°3

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice à l'influence des queues de distribution de la loi d'importance dans un contexte simple. Supposons que l'on souhaite estimer l'espérance de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère pour loi d'importance la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

1. Donner la variance de l'estimateur d'échantillonnage préférentiel en fonction de σ .
2. Pour quel choix de σ obtient-on l'estimateur d'échantillonnage préférentiel de variance minimal ?
3. En choisissant cette valeur optimale plutôt que $\sigma^2 = 1$, de combien réduit-on la variance ?

Exercice 2 (*Variables antithétiques*). On cherche à calculer $\mathbb{E}[\Phi(\mathbf{Z})]$, avec $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ un d -uplet de variables aléatoires *i.i.d.* suivant la loi ν et $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable croissante en chacune de ses coordonnées telle que $\mathbb{E}[\Phi^2(\mathbf{Z})] < +\infty$. Dans la suite on se donne $(\mathbf{Z}^{(n)})_{n \geq 1} = (Z_1^{(n)}, \dots, Z_d^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* suivant la loi de $\mathbf{Z}$. On note l'estimateur de Monte Carlo classique

$$\hat{\delta}_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(\mathbf{Z}^{(i)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(Z_1^{(i)}, \dots, Z_d^{(i)}).$$

Soit $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable décroissante en chacune de ses coordonnées telle que $\Phi(Z_1, \dots, Z_d)$ et $\Psi(Z_1, \dots, Z_d)$ ont même loi. On souhaite montrer que l'estimateur

$$\hat{\delta}_n^{(2)} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \Phi(\mathbf{Z}^{(i)}) + \Psi(\mathbf{Z}^{(i)}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \Phi(Z_1^{(i)}, \dots, Z_d^{(i)}) + \Psi(Z_1^{(i)}, \dots, Z_d^{(i)})$$

est plus efficace (en terme de réduction de variance) que l'estimateur $\hat{\delta}_n^{(1)}$ en procédant par récurrence sur d . Le résultat dans le cas de la dimension $d = 1$ a déjà été établi dans le cours. L'objectif est donc de montrer que pour tout $d > 1$,

$$\text{Cov}[\Phi(\mathbf{Z}), \Psi(\mathbf{Z})] = \text{Cov}[\Phi(Z_1, \dots, Z_d), \Psi(Z_1, \dots, Z_d)] \leq 0. \quad (1)$$

On suppose dans la suite que (1) est vérifiée au rang $d - 1$.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{E}[\Phi(Z_1, \dots, Z_{d-1}, x)], & x &\mapsto \mathbb{E}[\Psi(Z_1, \dots, Z_{d-1}, x)], \end{aligned}$$

sont respectivement croissantes et décroissantes sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que $\mathbb{E}[\Lambda(Z_d)\Gamma(Z_d)] - \mathbb{E}[\Lambda(Z_d)]\mathbb{E}[\Gamma(Z_d)] \leq 0$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[\Phi(\mathbf{Z})\Psi(\mathbf{Z})] - \mathbb{E}[\Lambda(Z_d)\Gamma(Z_d)] \leq 0$, et en déduire le résultat au rang d .
4. Comparer les estimateurs $\hat{\delta}_n^{(1)}$, et $\hat{\delta}_{2n}^{(1)}$ avec $\hat{\delta}_n^{(2)}$.

◇ Travail personnel ◇

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et K une constante réelle. On s'intéresse au calcul de

$$p := \mathbb{P}[e^X \geq K].$$

1. Montrer que pour tout réel m

$$p = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{2m(X - \mu) - m^2}{2\sigma^2} \right\} \mathbb{1}_{\{e^{X-m} \geq K\}} \right]$$

2. En déduire un estimateur d'échantillonnage préférentiel pour le calcul de p et suggérer une valeur de m .
3. En utilisant une loi de support $[\ln K, +\infty[$, quel autre estimateur d'échantillonnage préférentiel auriez-vous pu proposer ?

Exercice 4. On suppose que $\mathbf{Z}$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}_d, \mathbf{I}_d)$ et Φ une fonction monotone en chacune de ses coordonnées et bornée. En vous appuyant sur le résultat de l'Exercice 2, proposer une méthode d'estimation de $\mathbb{E}[\Phi(\mathbf{Z})]$.