

TD n°1

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. Une entreprise développe un nouveau modèle de capteur destiné à fonctionner en continu sur des installations industrielles. Avant sa commercialisation, le service chargé de la fiabilité souhaite estimer son taux de défaillance et en déduire sa durée de vie moyenne.

Partie I. Une première campagne expérimentale suit chaque capteur jusqu'à sa panne. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathbb{P}_\theta$ la loi exponentielle de paramètre θ . On observe un n -échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathbb{P}_\theta$, où θ est inconnu.

1. Écrire le modèle statistique associé à une observation, puis celui associé au n -échantillon.
2. Donner une mesure dominante le modèle et écrire la vraisemblance.
3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .
4. Montrer qu'il est également un Z -estimateur associé à une fonction Ψ que l'on précisera.
5. Montrer que cet estimateur est fortement consistant.
6. Établir la normalité asymptotique de l'estimateur, puis construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$, $\alpha \in]0, 1[$, pour θ .

Partie II. La procédure précédente peut immobiliser le laboratoire pendant une longue période. Afin d'accélérer une seconde campagne, on envisage donc d'arrêter l'étude à une date fixée $c \in \mathbb{R}_+^*$, même si certains capteurs fonctionnent encore. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on observe $Y_i = \min(X_i, c)$. La vraisemblance est alors donnée par

$$\theta \mapsto L_n(\theta) = \theta^{D_n} \exp(-\theta T_n), \quad D_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i < c\}}, \quad T_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

7. Étudier l'existence et l'unicité de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{\text{MV}}$ de θ . Le cas échéant, calculer la probabilité de l'événement sur lequel il n'existe pas et étudier son comportement lorsque n tend vers l'infini.
8. Déterminer l'estimateur des moments fondé sur Y_1 et préciser sur quel événement il existe.
9. On prolonge arbitrairement les deux estimateurs par une même valeur fixée $\theta_\star > 0$ sur l'événement $\{D_n = 0\}$. Montrer qu'ils sont fortement consistants.

L'estimateur $\hat{\theta}_n^{\text{MV}}$ s'interprète comme un Z -estimateur associé à $(\theta, y) \mapsto \mathbb{1}_{\{y < c\}}/\theta - y$. Le théorème de normalité asymptotique des Z -estimateurs donne alors

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{\text{MV}} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\theta^2}{1 - e^{-c\theta}} \right).$$

10. Commenter l'effet de la censure sur la variance asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Que retrouve-t-on lorsque c tend vers $+\infty$?

Exercice 2. Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\})$ un modèle statistique dominé par une mesure σ -finie ν . Soit $g : \Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ une bijection mesurable. Pour $\tau = g(\theta)$, on considère le modèle reparamétré

$$\{\tilde{\mathbb{P}}_\tau = \mathbb{P}_{g^{-1}(\tau)}; \tau \in \tilde{\Theta}\}.$$

1. Écrire la vraisemblance $\tilde{L}_n(\tau)$ du modèle reparamétré en fonction de la vraisemblance L_n associée à $\mathbb{P}_\theta$.
2. Montrer que

$$\arg \max_{\tau \in \tilde{\Theta}} \tilde{L}_n(\tau) = g \left(\arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) \right).$$

En déduire l'invariance de l'estimateur du maximum de vraisemblance par reparamétrisation.

3. Dans le modèle exponentiel de l'Exercice 1, on pose $\tau = 1/\theta$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de τ sans maximiser une nouvelle vraisemblance.

Exercice 3. Soit Θ une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Pour $\theta \in \Theta$, on considère une fonction continue $\mathbf{Z}_\theta : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle qu'elle admette un unique zéro en θ . Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathbf{Z}_n : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction aléatoire et soit $\hat{\theta}_n^Z$ une variable aléatoire à valeurs dans Θ satisfaisant

$$\mathbf{Z}_n(\hat{\theta}_n^Z) = \mathbf{0}.$$

On suppose enfin que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|\mathbf{Z}_n(\theta) - \mathbf{Z}_\theta(\theta)\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_\theta} 0.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $K_\varepsilon = \{u \in \Theta; \|u - \theta\| \geq \varepsilon\}$ soit non vide. Montrer que K_ε est compact et que

$$c_\varepsilon = \inf_{u \in K_\varepsilon} \|\mathbf{Z}_\theta(u)\| > 0.$$

2. Montrer que

$$\|\mathbf{Z}_\theta(\hat{\theta}_n^Z)\| \leq \sup_{u \in \Theta} \|\mathbf{Z}_n(u) - \mathbf{Z}_\theta(u)\|.$$

3. Montrer que $\hat{\theta}_n^Z$ est un estimateur consistant de θ . Que se passe-t-il lorsque K_ε est vide?

◇ Pour aller plus loin ◇

Exercice 4 (*Approfondir l'Exercice 1 – Partie II*). Pour le modèle censuré, établir la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance, *i.e.*,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{\text{MV}} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{1 - e^{-c\theta}}\right),$$

en l'interprétant comme un Z -estimateur associé à la fonction

$$(u, y) \mapsto \frac{\mathbb{1}_{\{y < c\}}}{u} - y.$$

Exercice 5. Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\})$ un modèle statistique dominé par deux mesures σ -finies ν et μ . Pour tout $\theta \in \Theta$, on note p_θ et q_θ les densités de $\mathbb{P}_\theta$ par rapport à ν et μ , respectivement. Pour un n -échantillon $Y_1, \dots, Y_n$ de loi $\mathbb{P}_\theta$, les vraisemblances associées à ces deux mesures dominantes sont respectivement L_n^ν et L_n^μ .

1. Montrer que $\eta = \nu + \mu$ est une mesure σ -finie qui domine ν , μ et toutes les lois du modèle.
2. Pour tout $\theta \in \Theta$, on note

$$a = \frac{d\nu}{d\eta}, \quad b = \frac{d\mu}{d\eta}, \quad f_\theta = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\eta}.$$

Montrer que, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\mathbb{P}_\theta(S) = 1, \quad S = \{y \in \mathcal{Y}; a(y) > 0 \text{ et } b(y) > 0\}.$$

3. En déduire que, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$q_\theta(y) = \frac{a(y)}{b(y)} p_\theta(y), \quad \eta\text{-presque partout sur } S.$$

4. En déduire que, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\arg \max_{u \in \Theta} L_n^\mu(u) = \arg \max_{u \in \Theta} L_n^\nu(u), \quad \mathbb{P}_\theta^{\otimes n}\text{-presque sûrement.}$$

Exercice 6 (*Approfondir l'Exercice 3 – L'unicité suffit-elle sans compacité ?*). On considère $\Theta = \mathbb{R}$ et $\theta = 0$. Soit la fonction continue

$$Z_\theta : u \in \Theta \mapsto \frac{u}{1+u^2} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que θ est l'unique zéro de Z_θ , mais que ce zéro n'est pas bien séparé.
2. Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction Z_n pour tout $u \in \Theta$ par

$$Z_n(u) = Z_\theta(u) - Z_\theta(n).$$

Montrer que Z_n converge uniformément vers Z_θ sur Θ .

3. Vérifier que $\hat{\theta}_n^Z = n$ est un zéro de Z_n . Cette suite de zéros est-elle consistante ? Conclure.