Master 1 MMD-MA
Université Paris-Dauphine

Monte Carlo

Examen (Janvier 2016)

2h00, documents non autorisés

Soit $(V_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires positives, on cherche premièrement à estimer

$$p_n \;:=\; \mathbb{P}\big[A_n > y\big], \quad \text{où} \;\; A_n \;:=\; \sum_{k=1}^{n} V_k.$$

Dans tout le sujet, on suppose que l'on est équipé d'un générateur de loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$ sur $[0,1]$, et que la fonction de répartition de loi $N(0,1)$, notée Φ, et son inverse Φ^{-1} sont connues explicitement.

Partie I

Dans la première partie, on suppose que V_k est défini par $V_k := e^{X_k}$, où $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ est une variable gaussienne.

1. Méthode classique: soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de simulation de variables aléatoires de distribution uniforme sur $[0,1]$.
   - Proposer un estimateur de Monte-Carlo $I_{n,m}$ (sans aucune méthode de réduction de variance) de la quantité p_n, où m désigne le nombre de copies de simulation dans l'estimateur.
   - Donner un intervalle de confiance empirique de cet estimateur.
2. Méthode antithétique:
   - Soit $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $-X_1$? En déduire un nouvel estimateur antithétique $J_{n,m}$ de p_n.
   - Soit $\phi_n(x_1, \cdots, x_n) := \mathbf{1}_{\left\{\sum_{k=1}^n e^{x_k} \geq y\right\}}$. Remarquons que $x_k \mapsto \phi_n(x_1, \cdots, x_n)$ est croissante. Quel estimateur est meilleur entre $I_{n,m}$ et $J_{n,m}$? Justifier en comparant la précision et l'effort de calcul.
3. Méthode de variable de contrôle:
   - Définissons

     $$\tilde{A}_n \;:=\; \Big(\prod_{k=1}^{n} V_k\Big)^{1/n} \quad \text{et} \quad \hat{m} \;:=\; \mathbb{P}(\tilde{A}_n > y).$$

     Calculer la valeur de $\hat{m}$ (en fonction de Φ).

- Proposer un nouvel estimateur de contrôle de variable $\tilde{J}_{n,m}$. Justifier formellement que cet estimateur pourrait réduire la variance.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $V_1 \sim \mathcal{E}(\beta)$ suit une loi exponentielle, dont la densité est donnée par $\beta e^{-\beta x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

4. Méthode de fonction d'importance:

   - Etant donné une suite $(U_k)_{k\geq 1}$ i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$, proposer une méthode pour simuler une suite $(V_k)_{k\geq 1}$.
   - Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que pour tout $\beta_1>0$, on a
   $$\mathbb{E}\Big[f\big(V_1,\cdots,V_n\big)\Big] \;=\; \mathbb{E}\Big[\,f\big(\tilde{V}_1,\cdots,\tilde{V}_n\big)\frac{\beta^n}{\beta_1^n}\exp\big((\beta_1-\beta)(\tilde{V}_1+\cdots+\tilde{V}_n)\big)\,\Big],$$
   où $(\tilde{V}_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite i.i.d. de v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta_1)$.
   - Proposer un nouvel estimateur pour p_n. Intuitivement, doit-on choisir $\beta_1>\beta$ ou $\beta_1<\beta$ lorsque $y>>0$ est très grand ?

Partie III

Soit N une variable de loi de Poisson avec paramètre λ indépendante de $(V_k)_{k\geq 1}$, i.e.
$$\mathbb{P}\big[N=n\big] \;=\; e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$
Dans cette partie, on cherche à estimer
$$p \;:=\; \mathbb{P}\big[A>y\big], \quad \text{où} \;\; A \;:=\; \sum_{k=1}^{N} V_k.$$
On suppose toujours que $V_1 \sim \mathcal{E}(\beta)$ et qu'on est equipé d'un générateur de loi uniforme sur $[0,1]$.

5. Méthode de stratification:

   - Proposer une méthode pour simuler une suite $(A_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de simulation de A, puis donner un estimateur (sans aucune réduction de variance) pour p, et son intervalle de confiance. Écrire le pseudo-code de l'algorithme.
   - En utilisant le fait que
   $$\mathbb{P}\big[A>y\big] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\big[A>y\big|N=n\big]\mathbb{P}[N=n],$$
   proposer un nouvel estimateur par la méthode de stratification.

     Comparer la variance de l'estimateur classique et celle de ce nouvel estimateur avec allocation proportionnelle.