Master 1 MMD-MA
Université Paris-Dauphine

Projet (Monte Carlo)

À rendre : un rapport + les codes archivés dans un fichier zip.

Envoyer les deux fichiers à ban.zheng@hotmail.com pour les étudiants du groupe 1 ou à claisse@cmap.polytechnique.fr pour ceux du groupe 2 avant le 9 janvier 2017.

Le projet doit être fait en binôme. N'oubliez pas de préciser les deux noms dans le rapport.

Vous pouvez utiliser python, scilab, matlab, R, C++ (d'autres langages sont possibles, mais venez nous en parler d'abord). Les codes doivent être bien commentés. Il est possible que nous vous demandions d'expliquer votre travail à l'oral.

Dans le rapport, le pseudo-code sera apprécié pour expliquer l'algorithme. Par contre, il est strictement interdit de copier-coller les vrais codes dans le rapport.

Le sujet

Soient $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, X un processus défini par une EDS (équation différentielle stochastique) :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma dW_s, \qquad \text{avec} \quad \mu(x) := 0.1(\sqrt{e^x} - 1) - 1/8,$$

on cherche à évaluer

$$V := \mathbb{E}\big[g(X_T)\big], \qquad \text{où} \quad g(x) := \big(e^{X_T} - K\big)_+.$$

On fixe les constantes : $x_0 = 0$, $\sigma = 0.5$, $K = 1$, $T = 1$.

Remarque : Bien que X soit défini par une EDS, la réalisation du projet ne demande aucune connaissance sur la théorie des EDS.

Méthode par le schéma d'Euler

Soient $n = 10$, $\Delta := \frac{T}{n} = 0.1$, $t_k := k\Delta = k/10$, on définit

$$X^{\Delta}_{t_0} := x_0 = 0, \qquad \text{et} \quad X^{\Delta}_{t_{k+1}} := X^{\Delta}_{t_k} + \mu(X^{\Delta}_{t_k})\Delta + \sigma\big(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\big).$$

On cherche d'abord à évaluer, avec la méthode de Monte-Carlo,

$$V_\Delta := \mathbb{E}\big[g(X^{\Delta}_T)\big].$$

La variable X^{Δ}_T étant une approximation de X_T, la méthode de Monte-Carlo basée sur V_Δ donnera une estimation biaisée de V.

1. Simuler une suite i.i.d. de variables X_T^{Δ} et donner une estimation de V_Δ par la méthode de Monte-Carlo classique.
2. Soit $(W_{t_0}, W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$ un mouvement brownien sur la grille $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, on sait que $(-W_{t_0}, -W_{t_1}, \cdots, -W_{t_n})$ est aussi un mouvement brownien sur cette grille. Autrement dit, $(W_{t_0}, W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$ et $(-W_{t_0}, -W_{t_1}, \cdots, -W_{t_n})$ ont la même loi. Proposer une méthode antithétique pour estimer V_Δ.
3. Soit $\widetilde{X}_T := \sigma W_T$, calculer la valeur m explicitement :
$$m := \mathbb{E}\big[g\big(\widetilde{X}_T\big)\big].$$
Proposer une méthode de variable de contrôle pour estimer V_Δ.
4. Proposer une méthode de fonction d'importance pour estimer V_Δ.

Méthode par un schéma Sans Biais

Soit $(\tau_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$, indépendantes du mouvement brownien W, on définit

$$T_0 := 0 \quad \text{et} \quad T_k := \Big(\sum_{i=1}^{k} \tau_i\Big) \wedge T,$$

et $N_T := \max\{k \ : T_k < T\}$. En particulier, on a $T_{N_T} < T$ et $T_{N_T+1} = T$. Notons aussi

$$\Delta T_k := T_k - T_{k-1} \quad \text{et} \quad \Delta W_k := W_{T_k} - W_{T_{k-1}}.$$

On définit ensuite

$$\widehat{X}_{T_0} = \widehat{X}_0 := x_0 = 0, \quad \text{et} \quad \widehat{X}_{T_{k+1}} := \widehat{X}_{T_k} + \mu(X_{T_k})\Delta T_{k+1} + \sigma \Delta W_{k+1},$$

et

$$\psi := e^{\beta T}\Big(g(\widehat{X}_{T_{N_T+1}}) - g(\widehat{X}_{T_{N_T}})\mathbf{1}_{N_T>0}\Big) \prod_{k=1}^{N_T} \frac{\big(\mu(\widehat{X}_{T_k}) - \mu(\widehat{X}_{T_{k-1}})\big)\Delta W_{k+1}}{\sigma\beta\Delta T_{k+1}}.$$

Il a été montré récemment que

$$V \;=\; \mathbb{E}[g(X_T)] \;=\; \mathbb{E}\big[\psi\big].$$

1. Donner une estimation de V par la méthode de Monte-Carlo simple en utilisant des simulations de la variable ψ.
2. On sait que la variable N_T suit une loi de Poisson de paramètre βT :
$$\mathbb{P}\big(N_T = n\big) \quad = \quad \frac{(\beta T)^n}{n} \exp(-\beta T),$$
et que la loi conditionnelle de $(T_1, \cdots, T_n)$ sachant $N_T = n$ est identique à la loi de statistique d'ordre $(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)})$ de n variables i.i.d. $(U_1, \cdots, U_n)$ de loi $\mathcal{U}[0, T]$. Proposer une méthode de stratification pour estimer $V = \mathbb{E}[\psi]$.