Master 1 MMD-MA
Université Paris-Dauphine

Monte Carlo

TP1

Dans ce TP, on va identifier la loi d'une v.a. en traçant l'histogramme d'un grand nombre $X_1, \cdots, X_n$ de réalisations de X et en le comparant à la densité supposée de X.

Indications : La fonction numpy.random.rand renvoie des réalisations d'une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. La librairie Numpy contient également des générateurs pour la plupart des lois usuelles. Toutefois, dans ce TP, on utilisera seulement le générateur de la loi uniforme afin d'illustrer les méthodes de simulation vues en cours.

1. *Loi discrète.* On considère la loi sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ donnée par les probabilités $p(1) = 0{,}2$, $p(2) = 0{,}5$, $p(3) = 0{,}1$, $p(4) = 0{,}2$. Simulez un grand nombre de v.a. indépendantes de cette loi, en faire l'histogramme et comparer le résultat obtenu avec le diagramme en bâtons, sur le même graphique, de cette loi.

   Indications : La fonction matplotlib.pyplot.stem(x, y) affiche des barres verticales d'abscisse x et hauteur y. La fonction matplotlib.pyplot.hist(nom-echantillon,bins= nombre-de-colonnes,normed=1) affiche un histogramme des valeurs de l'échantillon. On peut aussi remplacer le paramètre nombre-de-colonnes par le vecteur des abscisses (ordonnées dans l'ordre croissant) des bases des colonnes.

2. *Loi exponentielle et ses liens avec d'autres lois.*

   - Simuler un grand nombre (*e.g.* $n = 1000$) $X_1, \cdots, X_n$ de réalisations de X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (*e.g.* $\lambda = 1$), tracer son histogramme et le comparer à la densité.
   - Faire la même chose pour la loi de gamma $\Gamma(n, \lambda)$ en utilisant l'exercice 3 du TD1.
   - Faire la même chose pour la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ en utilisant l'exercice 3 du TD1.

   Indications : La fonction matplotlib.pyplot.plot(x, y) affiche une courbe affine par morceaux reliant les points d'abscisse x et hauteur y.

3. *Loi des grands nombres et théorème central limite.* Simuler une suite de v.a. i.i.d. $(X_k)_{k\geq 1}$ de loi uniforme sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

   - Montrer que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Tracer le graphe de $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n. Que remarque-t-on ?

- Montrer que $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Tracer le graphe de $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X}_n)^2$ en fonction n. Que remarque-t-on ?
- Pour une valeur élevée de n (*e.g.* $n = 1000$), donner, via un histogramme, une approximation de la densité de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Que remarque-t-on ? (on pourra tracer sur le même graphe la courbe de la densité de la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1).

4. *Méthode rejet.* Soit f une fonction de densité définie par $f(x) := \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Simuler un grand nombre de v.a. i.i.d. de densité f par la méthode de rejet, illustrer les simulations par l'histogramme et les comparer avec la fonction de densité.