Master 1 MMD-MA
Université Paris-Dauphine

Monte Carlo

TP2

Dans ce TP, on va pratiquer quelques techniques pour simuler les vecteurs gaussiens, et la méthode de Monte-Carlo associée.

1. Soit $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$, où
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Simuler une suite de vecteurs qui suivent la loi de (X, Y). Quelle est la distribution de $X + Y$? Comparer la fonction de densité avec l'histogramme de simulation.

2. Soit
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$
Appliquer la méthode de Cholesky pour trouver la matrice sous-triangulaire A t.q. $\Sigma = AA^T$.

   La réponse :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Simulation du mouvement brownien.* On s'intéresse à la simulation d'un mouvements brownien $(W_t)_{0 \le t \le 1}$ aux instant $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1$.
   - *Méthode forward.* Simuler $(W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$. En déduire une simulation du mouvement brownien.
   - *Méthode par le pont brownien.* Calculer la loi du vecteur $(W_{t_n}, W_{t_{n-1}})$. En déduire une méthode qui simuler W_{t_n} puis $W_{t_{n-1}} | W_{t_n}$. En déduire ensuite une simulation de $(W_{t_0}, W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$.

4. Soit (W^1, W^2) deux mouvements browniens avec corrélation $\rho = \frac{1}{2}$.

- Estimer la quantité ci-dessous par la méthode de Monte-Carlo :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}e^{-\sigma^2/2+\sigma W_1^1}+\frac{1}{2}e^{-\sigma^2/2+\sigma W_1^2}-1\right)^+\right].$$

- *Méthode antithétique pour le vecteur gaussien.*
  - En utilisant le TD2, expliquer comment construire un meilleur estimateur de la quantité ci-dessus. Illustrer ce résultat par des simulations.
  - Soient

    $$Z := \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Montrer que le vecteur AZ suit la même loi de Z. En déduire une autre méthode de Monte-Carlo antithétique pour la question précédente. Ce nouvel estimateur est-il meilleur que les précédents ?