

MONTE CARLO

TP3

Dans ce TP, on va appliquer la méthode de stratification pour résoudre un problème motivé par l'évaluation d'options en finance.

1. Soient X une v.a. de la loi gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \exp(X)$, $K > 0$ une constante strictement positive et Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne $N(0, 1)$.

a) Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{P}(Z \geq K)$.

b) Montrer que

$$\mathbb{E}[Z1_{Z \geq K}] = e^{\sigma^2/2 + \mu} \mathbb{P}(e^Y \geq K), \quad \text{où } Y \sim N(\mu + \sigma^2, \sigma^2).$$

c) En déduire que

$$\mathbb{E}[(Z - K)^+] = e^{\sigma^2/2 + \mu} \Phi\left(-\frac{\log K - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - K \Phi\left(-\frac{\log K - \mu}{\sigma}\right).$$

2. Soit S suivant le modèle de Black-Scholes, i.e.

$$S_t = S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right),$$

où W est un mouvement Brownien. Soient $S_0 = 1$, $K = 1$, utiliser la question 1 pour calculer

$$\mathbb{E}[(S_1 - K)_+]. \quad (1)$$

Implémenter la méthode de Monte-Carlo pour estimer (1). Comparer le résultat numérique avec le résultat théorique.

3. Construire un estimateur de (1) par la méthode des variables antithétiques. Comparer la précision de cet estimateur avec l'estimateur classique. Justifier le résultat observé.
4. Le but de cette question est de mettre en oeuvre une méthode de stratification pour le calcul de (1). Soit $L \geq 1$ le nombre de strates. On pose $A_l := [\Phi^{-1}(\frac{l-1}{L}), \Phi^{-1}(\frac{l}{L})]$ pour tout $l = 1, \dots, L$.

- Simuler des copies indépendantes de W_1 sachant que $W_1 \in A_l$.

- Donner un estimateur de

$$\mathbb{E}\left[(S_1 - K)_+ \mid W_1 \in A_l\right].$$

- En déduire un estimateur de (1) par la méthode de stratification avec allocation proportionnelle. Comparer la précision de cet estimateur avec les précédents.
- Donner une estimation du nombre optimal de tirages à prendre dans chaque strate. Commenter le résultat observé.
- Construire un estimateur de (1) par la méthode de stratification avec allocation optimale. Comparer la précision de cet estimateur avec les précédents.