Master 1 MMD-MA
Université Paris-Dauphine

Monte Carlo

TP4

Dans ce TP, on commence par appliquer la méthode de contrôle de variable pour résoudre un problème motivé par l'évaluation d'options asiatiques en finance. Ensuite, on met en œuvre la méthode de fonction d'importance pour résoudre un problème motivé par le calcul de VaR (value at risk).

1. Soit S suivant le modèle de Black-Scholes, *i.e.*,

$$S_t \quad = \quad S_0 \exp\Big(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\Big),$$

où W est un mouvement Brownien. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t_k := \frac{k}{n}$, on note

$$A_1 \quad := \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_{t_k} \quad \text{et} \quad \tilde{A}_1 \quad := \quad \Big(\prod_{k=1}^{n} S_{t_k}\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Le but de cette question est d'estimer

$$\mathbb{E}\Big[\big(A_1 - K\big)_+\Big]. \tag{1}$$

Pour les applications numériques, on pourra prendre $S_0 = 1$, $\sigma = 1$, $n = 10$ et $K = 1$.

   a) Implémenter la méthode de Monte-Carlo classique pour estimer (1).

   b) Quelle est la loi de $\tilde{A}_1$? Utiliser la question 1 du TP3 pour calculer

$$\mathbb{E}\Big[\big(\tilde{A}_1 - K\big)_+\Big].$$

   c) Proposer une méthode de contrôle de variable pour estimer (1). Comparer la précision de cet estimateur avec le précédent.

2. Soient $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ et $Z := e^X$, on cherche à estimer

$$p \quad := \quad \mathbb{P}(Z \geq K).$$

Pour les applications numériques, on pourra prendre $\mu = 1$, $\sigma = 0.5$ et $K = 3$ ou 10.

   a) Donner la valeur de p en fonction de Φ la fonction de répartition de $N(0,1)$.

b) Utiliser la méthode de Monte-Carlo classique pour estimer p. Comparer cette estimation avec la valeur théorique.

c) Montrer que

$$p \quad = \quad \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{(2m(X-\mu)+m^2)}{2\sigma^2}\Big)1_{\{e^m Z \geq K\}}\Big].$$

d) Construire un estimateur de p par la méthode de fonction d'importance et proposer une valeur de m permettant d'améliorer significativement la précision de l'estimateur.

e) Implémenter l'algorithme du gradient stochastique et en déduire une valeur optimale pour m.