

Analyse S2

MPA — L1

2022 — 2023

Clément Tauber
clement.tauber@math.unistra.fr
UFR de mathématiques et d'informatique
Université de Strasbourg

AVANT-PROPOS

Ce texte est issu d'un cours donné à l'Université de Strasbourg au second semestre de la filière Mathématiques et Physique Approfondie (MPA) en 2022-2023. Il peut être utilisé librement et la source est disponible sur demande.

Merci de signaler toute typo ou erreur à `clement.tauber@math.unistra.fr`.

Crédits : Le corps du texte est librement inspiré des notes de cours de ma prédécesseure Nalini Anantharaman, et de celles de Yohann Le Floch pour le Chapitre 3. Le thème $\LaTeX$ de mise en page a été créé par Sylvain Porret-Blanc. Certaines figures des Chapitre 2 et 4 sont adaptées du cours en ligne Exo7, dont la [source](#) est en accès libre.

Quelques références pour compléter ce cours :

- Ramis, J., Garnier, J., Buff, X., Warusfel, A., Halberstadt, E. (2006) *Mathématiques tout-en-un pour la licence Niveau L1 : Cours complet et 270 Exercices corrigés*. Dunod
- Deschamps, C., Moulin, F., Warusfel, A. (2013). *Mathématiques tout-en-un : MPSI*. Dunod.
- Monier, J. (2006) *Analyse MPSI : cours, méthodes et exercices corrigés*. Dunod.

TABLE DES MATIÈRES

1	Développements limités	4
1	Comparaison locale	4
1.1	Dominance	4
1.2	Prépondérance	6
1.3	Équivalence	9
2	Formules de Taylor	13
3	Application aux fonctions usuelles	16
4	Développements limités	19
5	Opérations sur les DL	22
5.1	Somme et produit	22
5.2	Composition, inverse et fonction réciproque	24
5.3	Primitive et dérivée	26
6	Développements asymptotiques [Hors Programme]	27
2	Intégration	29
1	Intégrale des fonctions en escalier	29
2	Fonctions intégrables au sens de Riemann	33
3	Critères d'intégrabilité	39
4	Intégrale et primitives	42
5	Calcul de primitives	44
5.1	Intégration par parties	45
5.2	Changement de variable	46
5.3	Fractions rationnelles	48
5.4	Polynômes trigonométriques	52
6	Sommes de Riemann	52
3	Équations différentielles	56
1	Généralités	57
2	Équations à variables séparables	58
3	Équations différentielles linéaires	60
3.1	Équations d'ordre 1	61
3.2	Équations de Bernoulli et Riccati	63
3.3	Systèmes différentiels linéaires	64
3.4	Équations d'ordre supérieur	66
4	Séries	70
1	Terminologie, convergence, divergence	70
2	Convergence absolue et séries à termes positifs	74
3	Critères de convergence	79
4	Compléments	81
A	Annexe	83
1	(Rappel) Dérivées et primitives des fonctions usuelles	83
2	Fonctions hyperboliques	84
3	(Rappel) Régularité des fonctions réciproques	85
4	Fonctions trigonométriques réciproques	86
5	Fonctions hyperboliques réciproques	90
6	(Résumé) Dérivée et primitive des fonctions réciproques	93

1 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS



Objectifs :

- Notations de Landau (O , o , $\sim$) pour comparer deux fonctions localement
- Théorèmes de Taylor-Young et Taylor-Lagrange
- Notion de développement limité (DL), DL usuels et opérations sur les DL

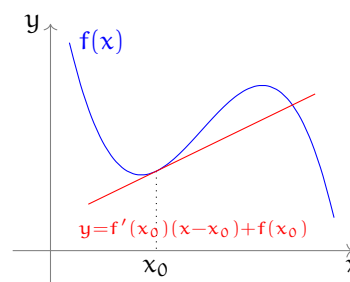
Motivation : approximation affine

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in I$ et f dérivable en x_0 .
Par définition on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ et x suffisamment proche de x_0 ,

$$|f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))| \leq \varepsilon.$$



Ainsi, au voisinage de x_0 , la courbe de f « ressemble » à sa tangente en x_0 . On parle d'approximation affine. Le but des développements limités est de donner un sens précis à ce type d'approximation, puis de proposer de meilleures approximations au delà du cas affine.

1.1. Comparaison locale

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque : $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On note $\bar{I} = I \cup \{a\} \cup \{b\}$, de sorte que $x_0 \in \bar{I}$ correspond à $x_0 \in I$ ou $x_0 = a$ ou $x_0 = b$.

On rappelle qu'un **voisinage** de x_0 dans I est un ensemble de la forme :

- $I \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ si $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $I \cap]M, +\infty[$ avec $M > 0$ si $x_0 = +\infty$,
- $I \cap]-\infty, M[$ avec $M < 0$ si $x_0 = -\infty$.

Enfin, une intersection de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0 .

1.1.1 Dominance

DÉFINITION 1.1

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage J de x_0 dans I et $C > 0$ tel que

$$\forall x \in J, \quad |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

On note alors, de façon équivalente

$$f = O_{x_0}(g), \quad f = O_{x_0}(g), \quad f(x) = O(g(x)), \quad (x \rightarrow x_0).$$

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur x_0 , on écrira parfois simplement $f = O(g)$. La notation $O(g)$ se dit « grand- O de g » et provient du mathématicien allemand Edmund Landau (1877-1938). Avec la prépondérance et l'équivalence (voir ci-dessous), O , o et $\sim$ sont appelés les **notations de Landau**.

PROPOSITION 1.1

$f = O(g)$ si et seulement si il existe J voisinage de x_0 dans I et $b : J \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que

$$\forall x \in J, \quad f(x) = g(x)b(x).$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) On définit $b : J \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0, \\ C & \text{si } g(x) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que b est bornée par C et que $f = gb$ sur J .

($\Leftarrow$) Puisque b est bornée, soit $C > 0$ tel que $|b(x)| \leq C$ pour tout $x \in J$. On a

$$|f(x)| = |g(x)| \cdot |b(x)| \leq C|g(x)|,$$

donc $f = O(g)$. □

REMARQUE 1.1 : De la proposition précédente, on déduit que si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , alors $f = O(g)$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de x_0 . C'est à dire qu'il existe J voisinage de x_0 dans I et $C > 0$ tel que

$$\forall x \in J, \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C.$$

En pratique, c'est cette caractérisation que l'on utilisera le plus souvent.

EXEMPLE 1.1 : 1. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = e^{5x}$.

⊙ En $x_0 = 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{2},$$

donc $\frac{f}{g}$ et $\frac{g}{f}$ sont bornées au voisinage de 0. Donc $f = O(g)$ et $g = O(f)$.

⊙ En $x_0 = +\infty$ on a, par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty,$$

donc $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $+\infty$, donc $f = O(g)$. En revanche $\frac{g}{f}$ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$, donc g n'est pas dominée par f en $+\infty$.

2. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

donc $f = O(g)$ et $g = O(f)$. En revanche, g n'est pas dominée par f en $+\infty$ et f n'est pas dominée par g en 0.

3. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x)$ et $x_0 = +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq 1$, donc $|f(x)| \leq |x|$. Donc $f(x) = O(x)$, ($x \rightarrow +\infty$).

REMARQUE 1.2 : Si $f = O(1)$ alors f est bornée au voisinage de x_0 .

PROPOSITION 1.2: TRANSITIVITÉ

Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$. Alors $f = O(h)$

Démonstration. On utilise la Proposition 1.1. Soit J_1 voisinage de x_0 dans I et $b_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $f(x) = g(x)b_1(x)$ pour tout $x \in J_1$. Soit J_2 voisinage de x_0 dans I et $b_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $g(x) = h(x)b_2(x)$ pour tout $x \in J_2$. Alors, $J = J_1 \cap J_2$ est un voisinage de x_0 dans I et

$$\forall x \in J, \quad f(x) = h(x)b_1(x)b_2(x).$$

Enfin, la fonction $b : J \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $b(x) = b_1(x)b_2(x)$ est bornée sur J . $\square$

PROPOSITION 1.3: OPÉRATIONS SUR LES GRANDS-O

1. Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = O(h)$ et $g = O(h)$. Alors

$$f + g = O(h).$$

2. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = O(g)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda f = O(g), \quad f = O(\lambda g).$$

3. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f_1 = O(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$. Alors

$$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$$

Démonstration. Toutes les égalités ci-dessous sont pour x dans un voisinage de x_0 , qui peut varier au cours de la preuve.

1. Si $f(x) = h(x)b_1(x)$ et $g(x) = h(x)b_2(x)$ alors $f(x) + g(x) = h(x)(b_1(x) + b_2(x))$. De plus $b_1 + b_2$ est bornée si b_1 et b_2 sont séparément bornées.

2. Si $f(x) = g(x)b(x)$ alors $\lambda f(x) = g(x)\lambda b(x)$ avec λb bornée si b est bornée. De plus, $f(x) = \lambda g(x)\frac{b}{\lambda}$ avec $\frac{b}{\lambda}$ bornée.

3. Si $f_1(x) = g_1(x)b_1(x)$ et $f_2(x) = g_2(x)b_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)b_1(x)b_2(x)$ avec $b_1 b_2$ bornée si b_1 et b_2 sont séparément bornées. $\square$

On retiendra de la proposition ci-dessus que

$$O(h) + O(h) = O(h),$$

$$\lambda O(h) = O(\lambda h) = O(h),$$

$$O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2).$$

1.1.2 Prépondérance

DÉFINITION 1.2

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J \text{ voisinage de } x_0 \text{ dans } I, \quad \forall x \in J, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On note alors, de façon équivalente

$$f = o(g), \quad f = o_{x_0}(g), \quad f(x) = o(g(x)), \quad (x \rightarrow x_0).$$

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur x_0 , on écrira parfois $f = o(g)$. La notation $o(g)$ se dit « petit o de g ».

PROPOSITION 1.4

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors $f = o(g)$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Soit J_1 voisinage de x_0 tel que $\forall x \in J_1, |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$. De plus, soit J_2 voisinage de x_0 tel que $g(x) \neq 0, \forall x \in J_2$. Pour tout $x \in J_1 \cap J_2$, voisinage de x_0 , on a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon.$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que $J_1 \cap J_2 =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, donc $x \in J_1 \cap J_2 \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$, et on retrouve la définition de la limite $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$. Si $x_0 = +\infty$, il existe $M > 0$ tel que $x \in J_1 \cap J_2 \Leftrightarrow x > M$, et on retrouve la définition de la limite de $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ en $+\infty$. Le cas $x_0 = -\infty$ est similaire.

($\Leftarrow$) Si $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon$$

En notant $J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on a $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ pour tout $x \in J$. Donc $f = o(g)$.

Si $x_0 = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que

$$\forall x \in I, x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon$$

En notant $J =]M, +\infty[$ on a $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ pour tout $x \in J$. Donc $f = o(g)$. Le cas $x_0 = -\infty$ est similaire. $\square$

PROPOSITION 1.5

$f = o(g)$ si et seulement si $\exists J$ voisinage de x_0 dans I et $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)\omega(x)$ avec

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$$

Démonstration. Laissée au lecteur. Repartir de la Définition 1.2 et de la définition de $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$ comme dans la preuve ci-dessus, en fonction de la valeur de x_0 . On pourra aussi s'inspirer de la preuve de la Proposition 1.1 $\square$

EXEMPLE 1.2 : On reprend l'exemple précédent.

1. $I = \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = e^{5x}$.

- En $x_0 = 0$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}$, donc aucune des deux n'est négligeable devant l'autre.
- En $x_0 = +\infty$ on a, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ donc $f = o(g)$.

2. $I = \mathbb{R}, f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, donc $f = o(g)$ et $g = o(f)$.

Le dernier exemple suggère une propriété plus générale qui nous sera utile pour les développements limités en 0.

PROPOSITION 1.6

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq n < m$. Alors $x^m = o(x^n), (x \rightarrow 0)$.

Démonstration. Laissée au lecteur. $\square$

REMARQUE 1.3 : Si $f = o(1)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

On a pour petit-o des propriétés analogues à grand-O.

PROPOSITION 1.7: TRANSITIVITÉ

Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$. Alors $f = o(h)$

Démonstration. On utilise la Proposition 1.5. Soit J_1 voisinage de x_0 dans I et $\omega_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)\omega_1(x)$ pour tout $x \in J_1$, avec $\omega_1(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow x_0)$. Soit J_2 voisinage de x_0 dans I et $\omega_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = h(x)\omega_2(x)$ pour tout $x \in J_2$ avec $\omega_2(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow x_0)$. Alors, $J = J_1 \cap J_2$ est un voisinage de x_0 dans I et

$$\forall x \in J, \quad f(x) = h(x)\omega_1(x)\omega_2(x).$$

Enfin, la fonction $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\omega(x) = \omega_1(x)\omega_2(x)$ satisfait $\omega(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow x_0)$. $\square$

PROPOSITION 1.8: OPÉRATIONS SUR LES o

1. Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = o_{x_0}(h)$ et $g = o_{x_0}(h)$. Alors

$$f + g = o_{x_0}(h).$$

2. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = o_{x_0}(g)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda f = o_{x_0}(g), \quad f = o_{x_0}(\lambda g).$$

3. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f_1 = o_{x_0}(g_1)$ et $f_2 = o_{x_0}(g_2)$. Alors

$$f_1 f_2 = o_{x_0}(g_1 g_2).$$

Démonstration. Laissée au lecteur. Analogue à la preuve de la Proposition 1.3. $\square$

On retiendra de la proposition ci-dessus que

$$o(h) + o(h) = o(h),$$

$$\lambda o(h) = o(\lambda h) = o(h),$$

$$o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2).$$

Les propositions qui suivent mélangent petit- o et grand- O . On peut retenir que petit- o est plus fort que grand- O car une fonction qui tend vers 0 en un point est aussi bornée au voisinage de ce point.

PROPOSITION 1.9

Si $f = o_{x_0}(g)$ alors $f = O_{x_0}(g)$.

Démonstration. Si $f(x) = g(x)\omega(x)$ au voisinage de x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$, alors ω est bornée au voisinage de x_0 , et on conclut par la Proposition 1.1. $\square$

PROPOSITION 1.10: PRÉDOMINANCE DES PETITS- o

1. Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = o_{x_0}(g)$ et $g = O_{x_0}(h)$. Alors $f = o_{x_0}(h)$.

2. Soit $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = O_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(h)$. Alors $f = o_{x_0}(h)$.

3. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f_1 = O_{x_0}(g_1)$ et $f_2 = o_{x_0}(g_2)$. Alors $f_1 f_2 = o_{x_0}(g_1 g_2)$.

Démonstration. 1. Soit J_1 voisinage de x_0 et $\omega : J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$ et $f = g\omega$. Soit J_2 voisinage de x_0 et $b : J_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $g = hb$. Sur $J_1 \cap J_2$ on a $f = h\omega b$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x)b(x) = 0$. Donc $f = o_{x_0}(h)$. $\square$

2 et 3 sont analogues et laissés au lecteur.

On retiendra de la proposition ci-dessus que

$$o(O(h)) = o(h),$$

$$O(o(h)) = o(h),$$

$$O(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2).$$

1.1.3 Équivalence

DÉFINITION 1.3

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de x_0 si

$$f - g = o_{x_0}(g)$$

ou encore $f = g + o_{x_0}(g)$. On note alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g, \quad f(x) \sim g(x), (x \rightarrow x_0).$$

S'il n'y a aucune ambiguïté sur x_0 , on notera parfois $f \sim g$.

PROPOSITION 1.11

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si il existe J voisinage de x_0 et $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$ tel que

$$\forall x \in J, \quad f(x) = g(x)(1 + \omega(x))$$

Démonstration. $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o_{x_0}(g)$. D'après la Proposition 1.5, $f - g = o_{x_0}(g) \Leftrightarrow \exists J$ voisinage de x_0 et $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$ tel que $f(x) - g(x) = g(x)\omega(x) \Leftrightarrow \exists J$ voisinage de x_0 et $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$ tel que $f(x) = g(x)(1 + \omega(x))$. $\square$

PROPOSITION 1.12

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration. Laissée au lecteur. $\square$

EXEMPLE 1.3 : 1. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 5$ et $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{x^2}} = 1$$

donc $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

2. $I =]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ et $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2x} = 1$$

donc $f \underset{0}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.13

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

1. Réflexive : $f \underset{x_0}{\sim} f$,
2. Symétrique : $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow g \underset{x_0}{\sim} f$,
3. Transitive : $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h \Rightarrow f \underset{x_0}{\sim} h$.

Démonstration. 1. En posant $\omega(x) = 0$ on a bien $f(x) = f(x)(1 + \omega(x))$ sur I .

2. Si $f(x) = g(x)(1 + \omega(x))$ avec $\omega(x) \rightarrow 0$, alors

$$g(x) = f(x) \frac{1}{1 + \omega(x)} = f(x) \left(1 + \frac{-\omega(x)}{1 + \omega(x)} \right) := f(x)(1 + \tilde{\omega}(x))$$

avec $\tilde{\omega}(x) \rightarrow 0$.

3. Si $f(x) = g(x)(1 + \omega_1(x))$ et $g(x) = h(x)(1 + \omega_2(x))$ avec $\omega_1(x) \rightarrow 0$ et $\omega_2(x) \rightarrow 0$, alors

$$f(x) = h(x)(1 + \omega_1(x))(1 + \omega_2(x)) = h(x)(1 + \omega_1(x) + \omega_2(x) + \omega_1(x)\omega_2(x)) := h(x)(1 + \tilde{\omega}(x))$$

avec $\tilde{\omega}(x) \rightarrow 0$.

□

PROPOSITION 1.14

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration. Laissée au lecteur.

□

PROPOSITION 1.15

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de x_0 .

Démonstration. D'après la Proposition 1.11, on a $f(x) = g(x)(1 + \omega(x))$ sur un voisinage J . Or, $\omega(x) \rightarrow 0$, ($x \rightarrow x_0$) donc il existe un voisinage J' de x_0 tel que $1 + \omega(x) > 0$. □

PROPOSITION 1.16

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors

$$f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2.$$

En particulier, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^n \underset{x_0}{\sim} g^n$.

Démonstration. Laissée au lecteur.

□

PROPOSITION 1.17

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et g ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors f ne s'annule pas non plus et l'on a

$$\frac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \frac{1}{g}.$$

Démonstration. Soit J voisinage de x_0 et $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x)(1 + \omega(x))$ avec $\omega(x) \rightarrow 0$, ($x \rightarrow x_0$). On suppose de plus que $g(x) \neq 0$ et $1 + \omega(x) > 0$ sur J (un tel voisinage existe toujours quitte à prendre l'intersection de plusieurs voisinages). On a alors, pour tout $x \in J$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} \frac{1}{1 + \omega(x)} = \frac{1}{g(x)} \left(1 + \frac{-\omega(x)}{1 + \omega(x)} \right) := \frac{1}{g(x)} (1 + \tilde{\omega}(x)),$$

avec $\tilde{\omega}(x) \rightarrow 0$.

□

Si deux fonctions sont équivalentes, on peut les substituer dans une relation de dominance ou de prépondérance.

PROPOSITION 1.18

Si $f = o(g)$ et $g \sim h$ alors $f = o(h)$.
 De même, si $f = O(g)$ et $g \sim h$ alors $f = O(h)$.

Démonstration. Si $f(x) = g(x)\omega_1(x)$ sur J_1 et $g(x) = h(x)(1 + \omega_2(x))$ sur J_2 avec $\omega_1(x) \rightarrow 0$ et $\omega_2(x) \rightarrow 0$. Alors, sur $J_1 \cap J_2$ on a

$$f(x) = h(x)\omega_1(x)(1 + \omega_2(x)) := h(x)\omega(x)$$

avec $\omega(x) \rightarrow 0$. La preuve pour grand-O est analogue. $\square$

PROPOSITION 1.19

Si $f \sim \lambda$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$.

Démonstration. $f(x) = \lambda(1 + \omega(x))$ dans un voisinage J de x_0 . Puisque $\omega(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$ on a $f(x) \rightarrow \lambda$. $\square$



L'équivalence présente plusieurs subtilités qu'il ne faut pas oublier :

- ⊙ $f \sim 0$ impose une **contrainte très forte** sur la fonction. Dans la pratique, obtenir une fonction équivalente à 0 est souvent signe d'une erreur de raisonnement.
- ⊙ **On ne compose pas les équivalents.** Par exemple, $f \sim g$ n'implique pas $e^f \sim e^g$.
- ⊙ **On ne somme pas les équivalents.**

Ces subtilités sont illustrées dans les proposition et exemples ci-dessous.

PROPOSITION 1.20

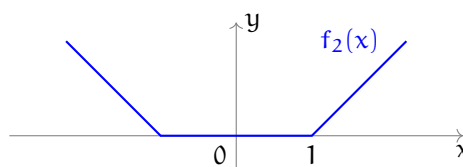
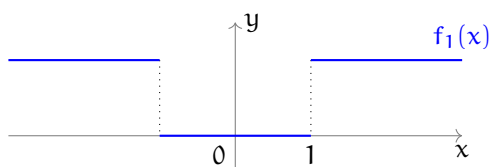
Si $f \sim 0$ alors il existe un voisinage J de x_0 telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in J$.

Démonstration. $f(x) = 0(1 + \omega(x)) = 0$ sur un voisinage J de x_0 . $\square$

EXEMPLE 1.4 : Les fonctions

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases},$$

sont équivalentes à 0 en $x_0 = 0$



EXEMPLE 1.5 : On reprend l'Exemple 1.3(2) avec $I =]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x} + 2$. On a $f \sim_{+\infty} g$ alors que

$$e^{f(x)} = e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{g(x)} = e^{\frac{1}{x} + 2} = e^{\frac{1}{x}} e^2.$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} e^2} = e^{-2} \neq 1$$

Donc $f \not\sim g$.

EXEMPLE 1.6 : $I = \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 + 3$, $g_1(x) = 3$ et $x_0 = 0$. On a $f_1 \underset{0}{\sim} g_1$. On prend maintenant $f_2 = g_2 = -3$, donc $f_2 \underset{0}{\sim} g_2$. En revanche

$$f_1(x) + g_1(x) = x^2, \quad f_2(x) + g_2(x) = 0$$

et $x^2 \not\sim 0$. Donc $f_1 + f_2 \not\sim g_1 + g_2$.

En ajoutant certaines hypothèses, la somme d'équivalents est correcte.

PROPOSITION 1.21

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ avec $g_1 > 0$ et $g_2 > 0$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2$.

Démonstration. Puisque $g_1, g_2 > 0$ on a $0 < g_1 < g_1 + g_2$, donc $g_1 = O(g_1 + g_2)$. De même, $g_2 = O(g_1 + g_2)$. On revient ensuite à la Définition 1.3. On a

$$f_1 - g_1 = o(g_1) = o(O(g_1 + g_2)) = o(g_1 + g_2),$$

où l'on a utilisé la Proposition 1.10. De même, on a $f_2 - g_2 = o(g_1 + g_2)$. Donc, en sommant les deux et en utilisant la Proposition 1.8,

$$f_1 + f_2 - (g_1 + g_2) = o(g_1 + g_2) + o(g_1 + g_2) = o(g_1 + g_2),$$

ce qui correspond à la définition de $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2$. $\square$

Dans la pratique, pour obtenir un équivalent d'une somme de fonction, on peut toujours revenir à la définition originale : $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$ et travailler avec les petits-o qui sont moins source d'erreur.

PROPOSITION 1.22

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 , de dérivée $f'(x_0) = \ell \neq 0$. Alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} \ell(x - x_0)$$

Démonstration. D'après la définition de la dérivée

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

En particulier on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

On en déduit

$$f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Donc, pour $\ell \neq 0$,

$$f(x) - f(x_0) = \ell(x - x_0) + o(x - x_0) = \ell(x - x_0) + o(\ell(x - x_0)).$$

Donc $f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} \ell(x - x_0)$. $\square$

Cette dernière proposition permet de calculer certains équivalents en dérivant les fonctions.

EXEMPLE 1.7 : $\odot$ $x \rightarrow \exp(x)$ avec $\exp(0) = 1$, $\exp'(0) = 1$, donc $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,

$\odot$ $x \rightarrow \sin(x)$ avec $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = 1$, donc $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$,

$\odot$ $f : x \rightarrow \ln(1 + x)$ avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ donc $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$

1.2. Formules de Taylor

D'après la Proposition 1.22, nous avons, pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0),$$

pour x au voisinage de x_0 . À un $o(x - x_0)$ près, on peut donc approximer f par l'équation de sa tangente. On peut se demander comment améliorer cette approximation, en particulier si f est plusieurs fois dérivable. On rappelle que la dérivée n -ième d'une fonction, notée $f^{(n)}$, est définie récursivement par

$$f^{(0)} = f \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

de sorte que $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

DÉFINITION 1.4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur $]a, b[$ si

$$f, f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n-1)}$$

sont dérivables sur $]a, b[$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue. Enfin, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est n fois dérivable pour tout n .

En particulier, une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ est une fonction continue. Par ailleurs, une fonction n fois dérivable est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ car f dérivable implique f continue.

Les résultats de cette section sont dus aux mathématiciens anglais Brook Taylor (1685-1731) et William Henry Young (1863-1942) et au mathématicien franco-sarde Joseph Louis Lagrange (1736-1913).

DÉFINITION 1.5: POLYNÔME DE TAYLOR

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ avec I voisinage de a . On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a . Le polynôme de Taylor est le polynôme de degré n suivant

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on le note simplement $T_n(x)$.

En particulier, pour $n = 1$ on retrouve l'équation de la tangente $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ (on rappelle que $0! = 1$ et $a^0 = 1$). Le polynôme de Taylor généralise donc cette équation à un ordre arbitraire, pourvu que f soit suffisamment dérivable.

THÉORÈME 1.1: FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ avec I voisinage de a . On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a . Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = T_n(x) + o((x - a)^n)$$

où T_n est le polynôme de Taylor de f en a .

Cette formule nous dit que la différence $f - T_n$ est négligeable devant $(x - a)^n$ au voisinage de a , c'est à dire

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Pour $n = 1$ on retrouve la Proposition 1.22. Ensuite, en augmentant n on obtient une approximation de f de plus en plus précise au voisinage de a . Pour prouver ce théorème, on utilise un résultat intermédiaire et important.

PROPOSITION 1.23: INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENT FINIS

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ tel que

$$\forall t \in]a, b[, \quad |f'(t)| \leq g'(t).$$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. On a

$$\forall t \in]a, b[, \quad -g'(t) \leq f'(t) \leq g'(t)$$

donc $f' + g' \geq 0$ et $g' - f' \geq 0$ sur $]a, b[$. Donc $f + g$ et $g - f$ sont croissantes sur $]a, b[$, donc croissantes sur $[a, b]$ car continues. Donc

$$\begin{aligned} g(a) + f(a) &\leq g(b) + f(b) \\ g(a) - f(a) &\leq g(b) - f(b) \end{aligned}$$

On en déduit

$$-(g(b) - g(a)) \leq f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$$

soit $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$. □

Notons que les hypothèses de cette proposition impliquent $g'(t) \geq 0$ pour $t \in]a, b[$, donc g est croissante. En particulier, si les hypothèses sont satisfaites pour $g(t) = Mt$, on retrouve une version plus faible de cette proposition, à savoir

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Démonstration du Théorème 1.1. On procède par récurrence sur n , en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$(H_n) \quad \forall x \in I, \quad f(x) = T_n(x) + o((x - a)^n).$$

pour tout $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ avec I voisinage de a telle que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a .

Initialisation. Le cas $n = 1$ est déjà traité dans preuve de la Proposition 1.22.

Hérédité. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ avec I voisinage de a . On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que $f^{(n)}$ est dérivable en a . On suppose de plus que (H_n) est vraie. Posons

$$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

et montrons que $R(x) = o((x - a)^{n+1})$. R est dérivable sur I et l'on a

$$\begin{aligned} R'(x) &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x - a)^{k-1} \\ &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} (x - a)^{k-1} \\ &= f'(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $((x - a)^0)' = 0$, $k! = k(k-1)!$, $f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$ et effectué le changement d'indice $k \mapsto k-1$. Ensuite, on remarque que f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et que $(f')^{(n-1)}$ est dérivable en a . On peut donc utiliser H_n sur f' . En revenant à la Définition 1.2 des petits-o, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in]a - \delta, a + \delta[, \quad |R'(x)| \leq \varepsilon |x - a|^n$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ telle que l'inégalité ci-dessus est vraie. Si $x \in [a, a + \delta[$, on a

$$|R'(x)| \leq \varepsilon (x - a)^n$$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis (Proposition 1.23) sur $[a, x]$ avec $g'(x) = \varepsilon(x - a)^n$ et $g(x) = \frac{1}{n+1}\varepsilon(x - a)^{n+1}$. On en déduit

$$|R(x) - R(a)| \leq g(x) - g(a)$$

Or $R(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ et $g(a) = 0$, donc

$$|R(x)| \leq \varepsilon \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}.$$

De même, pour $x \in]a - \delta, a]$, on a $|R'(x)| \leq \varepsilon(a - x)^n$ et on applique l'inégalité des accroissements finis avec $g'(x) = \varepsilon(a - x)^n$ et $g(x) = -\frac{1}{n+1}\varepsilon(a - x)^{n+1}$. Dans ce cas, on a

$$|R(a) - R(x)| \leq g(a) - g(x),$$

donc

$$|R(x)| \leq \varepsilon \frac{(a - x)^{n+1}}{n + 1}.$$

En rassemblant les deux cas, on a donc montré

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in]a - \delta, a + \delta[, \quad |R(x)| \leq \varepsilon \frac{|x - a|^{n+1}}{n + 1}.$$

Donc $R(x) = o\left(\frac{|x - a|^{n+1}}{n + 1}\right) = o(|x - a|^{n+1})$ et H_{n+1} est prouvée. $\square$

La formule de Taylor-Young ne nous dit rien d'explicite sur le reste, simplement à quelle vitesse il tend vers zéro en fonction du degré de T_n . Il existe une autre formulation plus quantitative, qui peut avoir un intérêt dans les applications numériques par exemple.

THÉORÈME 1.2: FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, b[, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M.$$

Alors

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - T_n(x)| \leq M \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!},$$

où T_n est le polynôme de Taylor de f en a .

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en notant

$$(H_n) \quad \forall x \in [a, b], \quad |f(x) - T_n(x)| \leq M \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!},$$

pour tout $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$ et $M > 0$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$.

Initialisation. Pour $n = 0$, il s'agit de l'inégalité des accroissements finis (Proposition 1.23) appliquée à f et $g(t) = Mt$ sur $[a, x]$. De plus $P_0(x) = f(a)$. Ce qui donne bien

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|.$$

Hérédité. Soit $n \geq 1$. Supposons H_{n-1} vraie et montrons H_n . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$ et $M > 0$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. Posons, pour $x \in [a, b]$

$$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

R est dérivable sur $]a, b[$ et l'on a, comme dans la preuve du Théorème 1.1,

$$R'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Or, f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur $]a, b[$. De plus on a $|(f')^{(n)}(x)| = |f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour $x \in]a, b[$ par hypothèse. On peut donc appliquer H_{n-1} à f' pour en déduire que

$$|R'(x)| \leq M \frac{|x-a|^n}{n!}.$$

On applique l'inégalité des accroissements finis (Proposition 1.23) avec $g(x) = M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ et en notant que $R(a) = 0$ et $g(a) = 0$ on en déduit

$$\forall x \in [a, b], \quad |R(x)| \leq g(x) = M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui prouve H_n . □

Notons qu'un énoncé similaire existe si on considère le bord b de l'intervalle $[a, b]$. Il suffit de prendre $g(x) = M \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ dans la preuve.

REMARQUE 1.4 (Comparaison des deux formules) : Les hypothèses pour la formule de Taylor-Lagrange (f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$ et sa dérivée $(n+1)$ -ième est majorée) sont plus fortes que celles de Taylor-Young (f est n fois dérivable en a), mais l'estimation du reste $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ est meilleure. Pour Taylor-Young on a $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ alors que pour Taylor-Lagrange on a $R_n(x) = O((x-x_0)^{n+1})$. De plus, la formule de Taylor-Young est locale : le petit- o implique un voisinage (inconnu) de x_0 , alors que la formule de Taylor-Lagrange est valable sur tout l'intervalle $[a, b]$.

1.3. Application aux fonctions usuelles

Plusieurs fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. En calculant leurs dérivées successives au voisinage de $x = 0$, on peut en déduire leurs formules de Taylor explicites.

PROPOSITION 1.24

Au voisinage de $x = 0$ on a les formules suivantes pour les fonctions usuelles

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), & (x \rightarrow 0), \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), & (x \rightarrow 0), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), & (x \rightarrow 0), \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n), & (x \rightarrow 0), \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), & (x \rightarrow 0), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), & (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Ces formules sont à connaître par cœur, ou bien à savoir retrouver rapidement. On sera particulièrement attentif aux différents signes, aux coefficients ($n!$ ou n) et aux termes constants (0 ou 1).

Démonstration. On applique la formule de Taylor-Young après avoir calculé les dérivées. On a

$$\exp(0) = \exp'(0) = \dots = \exp^{(n)}(0) = 1.$$

Ensuite pour $f(x) = \sin(x)$ on a

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x), \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x),$$

donc $f^{(2k)}(0) = 0$ et $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. De même pour $f(x) = \cos(x)$ on a

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x), \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin(x),$$

donc $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Pour $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ on rappelle la règle de dérivation $(u(x)^\alpha)' = \alpha u'(x)u^{\alpha-1}$, valable pour tout réel α . D'où

$$f'(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \quad f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{n+1},$$

ce qui donne $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$. Le facteur $n!$ se simplifie avec celui du polynôme de Taylor et l'on obtient le résultat. On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1+(-x)} \\ &= 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + \dots + (-1)^n (-x)^n + o(x^n) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Enfin, pour $g(x) = \ln(1+x)$ on a $g(0) = 0$ et

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = f(x)$$

Donc pour $n \leq 1$, $g^{(n)}(0) = f^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$. Avec le coefficient du polynôme de Taylor, on a $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, d'où le résultat pour $\ln(1+x)$. $\square$

REMARQUE 1.5 : La proposition ci-dessus donne une forme explicite du polynôme de Taylor T_n pour les fonctions usuelles, ce qui permet de les tracer approximativement. On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Lagrange et obtenir une estimée numérique sur l'erreur.

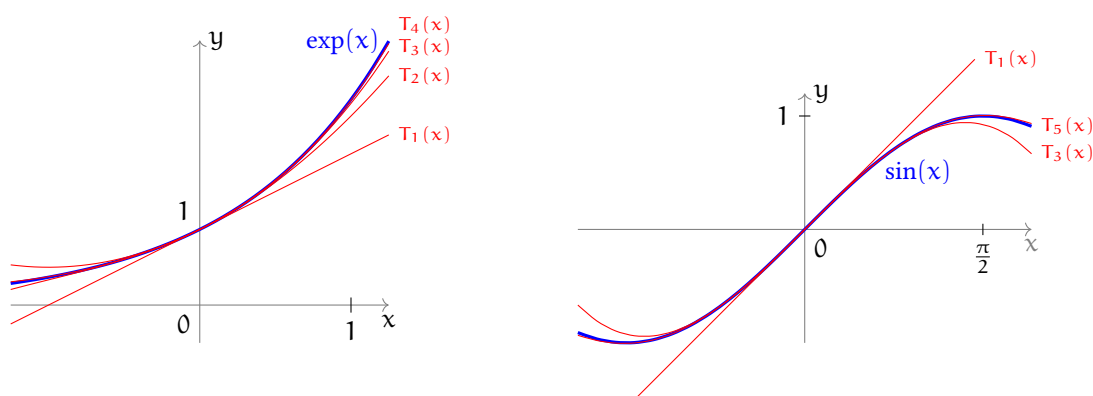


FIGURE 1.1 – Les fonctions $\exp$ et $\sin$ et leur polynôme de Taylor pour quelques valeurs de n au voisinage de 0. Plus n augmente, plus le polynôme est proche de la courbe de la fonction.

EXEMPLE 1.8 : 1. $f(x) = \exp(x)$ à l'ordre 4. On a

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

La formule de Taylor-Young nous dit que $f(x) - T_n(x) = o(x^4)$. De plus, pour $x \in [-M, M]$, puisque f est croissante et positive on a $|\exp(x)| \leq e^M$, et $|f^{(n)}(x)| = |f(x)| \leq e^M$ pour tout n . La formule de Taylor-Lagrange nous dit

$$\forall x \in [-M, M], \quad |\exp(x) - T_4(x)| \leq e^M \frac{|x|^5}{5!} \leq \frac{e^M M^5}{120}.$$

Par exemple, sur $[-1, 1]$, $|\exp(x) - T_4(x)| \lesssim 0.022$, soit 2% d'erreur. En réduisant l'intervalle $[-M, M]$, où en augmentant le degré n , on gagne en précision.

2. $f(x) = \sin(x)$ à l'ordre 5. On a

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

La formule de Taylor-Young nous dit que $f(x) - T_n(x) = o(x^4)$. De plus pour $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, donc par Taylor-Lagrange on a

$$\forall x \in [-M, M], \quad |\sin(x) - T_5(x)| \leq \frac{|x|^6}{6!} \leq \frac{M^6}{720}.$$

Par exemple, sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $|\sin(x) - T_5(x)| \lesssim 3.3 \times 10^{-4}$. Les deux courbes sont quasiment superposées.

Rappelons quand même que ces formules sont valables localement, seulement au voisinage de x_0 . Lorsqu'on s'en éloigne, f et T_n peuvent être très différents.

Ensuite, il est intéressant de se demander ce que donne la formule de Taylor-Young appliquée à un polynôme.

EXEMPLE 1.9 : Prenons $P(x) = 3 + x - 2x^2 + 6x^3$ et calculons ses dérivées.

$$P'(x) = 1 + 2(-2x) + 3(6x^2), \quad P''(x) = 2(-2) + 3 \times 2(6x), \quad P^{(3)}(x) = 3 \times 2(6), \quad P^{(4)}(x) = 0.$$

On en déduit $P(0) = 3$, $P'(0) = 1$, $P''(0) = 2!(-2)$, $P^{(3)}(0) = 3!(6)$, $P^{(k)}(0) = 0$ pour $k \geq 4$. On peut donc calculer les polynômes de Taylor associés à P :

$$T_0(x) = P(0) = 3$$

$$T_1(x) = P(0) + P'(0)x = 3 + x$$

$$T_2(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 = 3 + x - 2x^2$$

$$T_3(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 = 3 + x - 2x^2 + 6x^3 = P(x)$$

et $T_n(x) = P(x)$ pour $n \geq 4$. Ainsi, l'approximation d'un polynôme par un polynôme n'est autre que lui-même, ou bien sa restriction à un degré inférieur.

L'exemple ci-dessus n'a rien d'une coïncidence, la formule de Taylor-Young est exacte pour tout polynôme P si T_n est de degré aussi grand que celui de P .

PROPOSITION 1.25

Soit P un polynôme de degré d défini par

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d = \sum_{k=0}^d a_kx^k$$

avec $a_d \neq 0$. Alors, au voisinage de 0, le polynôme de Taylor T_n associé à P

$$T_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_kx^k, & \text{si } n < d \\ P(x) & \text{si } n \geq d. \end{cases}$$

Autrement dit, la formule de Taylor-Young est exacte pour $n \geq d$, $P(x) = T_n(x)$, sans reste.

Démonstration. P est de degré d donc $P^{(k)}(x) = 0$ si $k > d$. De plus on a

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^d j(j-1)\dots(j-k+1)a_jx^{j-k}$$

donc, en $x = 0$ le seul terme non-nul est celui où $j = k$, soit $P^{(k)}(0) = k(k-1)\dots 1a_k = k!a_k$. D'où

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^n \frac{k!a_k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^n a_kx^k.$$

En distinguant selon le cas $n < d$ et $n \geq d$ on retrouve le résultat annoncé. $\square$

Notons que ce résultat est vrai au voisinage de n'importe quel point $a \in \mathbb{R}$, en remplaçant x par $x - a$ dans l'énoncé et dans la preuve.

Une dernière formule usuelle sera très utile pour la suite. On rappelle que la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ est définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \exp(\alpha \ln(1+x))$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et coïncide avec les fonctions puissances pour $\alpha \in \mathbb{Z}$. De plus pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in] -1, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

PROPOSITION 1.26

Au voisinage de $x = 0$, la formule de Taylor-Young donne

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad (x \rightarrow 0).$$

Démonstration. Avec $f(x) = (1+x)^\alpha$ on a

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Donc $f(0) = 1$ et

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

On remplace dans la formule de Taylor-Young et on obtient le résultat. $\square$

EXEMPLE 1.10 : Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a, au voisinage de $x = 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + o(x^3), \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned} \quad (1.1)$$

REMARQUE 1.6 : Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la formule ci-dessus s'arrête au delà de l'ordre n (tous les termes suivants sont nuls), ce qui est normal car dans ce cas $(1+x)^n$ est un polynôme de degré n . On peut aussi calculer ses coefficients via la formule du binôme de Newton et comparer avec la formule de Taylor-Young ci-dessus.

1.4. Développements limités

DÉFINITION 1.6

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \bar{I}$. On dit que f admet un **développement limité** (abrégé DL) à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f = P_n(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Le polynôme P_n est appelée **partie régulière** du DL et la différence $R_n = f - P_n$ est appelée **reste** du DL.

En particulier, pour une fonction suffisamment dérivable, la formule de Taylor-Young (Théorème 1.1) fournit un développement limité avec $P_n(x - x_0) = T_n(x)$, et la Proposition 1.24 donne des exemples de DL en 0 à un ordre n arbitraire.

PROPOSITION 1.27

1. Si f admet un DL à l'ordre 0 en x_0 , alors f est continue en x_0 et $f(x_0) = a_0$
2. Si f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$

Démonstration. 1. Si $f(x) = a_0 + o(1)$ alors en prenant $x \rightarrow x_0$ on a $f(x) \rightarrow a_0$. 2. Si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$, alors $f(x_0) = a_0$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

donc $f'(x_0) = a_1$. $\square$



Cette proposition est **fausse** au delà de $n = 1$, comme le montre l'exemple suivant. Ainsi, la notion de développement limité est un peu plus générale que la formule de Taylor-Young, car elle existe pour des fonctions qui ne sont pas plusieurs fois dérivables.

EXEMPLE 1.11 : $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^{100} \sin(x^{-100})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f admet un DL en 0 à l'ordre 99. En effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{99}} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{100}}{|x|^{99}} = 0,$$

donc $f(x) = 0 + o(x^{99})$. En revanche, f n'est pas deux fois dérivable en 0. D'après la proposition précédente, on a $f(0) = f'(0) = 0$. Mais pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 100x^{99} \sin(x^{-100}) - \frac{100}{x} \cos(x^{-100}),$$

donc $\frac{f'(x)}{x}$ n'a pas de limite finie en 0.

Remarque : le fait que tous les termes du DL soient nuls n'a rien de particulier ici. Par exemple $f(x) + e^x$ admet un DL à l'ordre 99 de partie régulière non nulle sans être deux fois dérivable.

PROPOSITION 1.28

Si f admet un DL en x_0 à l'ordre n , alors f admet un DL en x_0 à l'ordre $n - 1$. Explicitement, si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

Démonstration. C'est la conséquence directe des propriétés sur les petits- o :

$$(x - x_0)^n = o((x - x_0)^{n-1}), \quad o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^{n-1}).$$

□

PROPOSITION 1.29: UNICITÉ DU DL

Si $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ et $f(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ avec P_n et Q_n deux polynômes de degré n . Alors $P_n = Q_n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n , avec H_n la proposition ci-dessus.

Initialisation. Si $f = a_0 + o_{x_0}(1)$ alors $a_0 = f(x_0)$ est unique d'après la Proposition 1.27.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ telle que H_{n-1} est vraie. Supposons que $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ et $f(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ avec P_n et Q_n deux polynômes de degré n . Posons

$$P_n(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad Q_n(x - x_0) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n.$$

D'après la proposition précédente, f admet les DL suivant en x_0 à l'ordre $n - 1$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$. On en déduit

$$P_n(x - x_0) - Q_n(x - x_0) = (a_n - b_n)(x - x_0)^n.$$

De plus, on sait que $P_n(x - x_0) - Q_n(x - x_0) = o((x - x_0)^n)$ car P_n et Q_n sont parties régulières du DL de f en x_0 à l'ordre n . Donc

$$a_n - b_n = o_{x_0}(1).$$

Or $a_n - b_n$ est une constante indépendante de x . Donc $a_n = b_n$ et $P_n = Q_n$. □

REMARQUE 1.7 : $\odot$ f admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si $t \mapsto f(x_0 + t)$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 . Ainsi on a donc, de façon équivalente

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

ou

$$f(x_0 + t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o_0(t^n).$$

On peut donc toujours se ramener à un DL au voisinage de 0 .

- $\odot$ Si $x \mapsto f(x)$ admet un DL à l'ordre n en 0 , alors pour tout $\lambda \neq 0$, $x \mapsto f(\lambda x)$ admet un DL à l'ordre n en 0 donné par

$$f(\lambda x) = a_0 + \lambda a_1 x + \lambda^2 a_2 x^2 + \dots + \lambda^n a_n x^n + o(x^n)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficients du DL de f . Par exemple, $\lambda = -1$ permet de déduire le DL de $\ln(1-x)$ à partir de celui de $\ln(1+x)$, donné en Proposition 1.24.

PROPOSITION 1.30: DL ET PARITÉ

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \in I$ telle que f admet un DL à l'ordre n en 0 , de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors :

- $\odot$ Si f est paire, tous ses coefficients impairs sont nuls : $a_1 = a_3 = \dots = a_{2k+1} = 0$.
- $\odot$ Si f est impaire, tous ses coefficients pairs sont nuls : $a_0 = a_2 = \dots = a_{2k} = 0$.

Démonstration. Si f est paire, $f(x) = f(-x)$, donc

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \dots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$$

Par unicité du DL on a $a_k = (-1)^k a_k$, donc $a_{2k+1} = 0$. On procède de même pour f impaire. $\square$

Par exemple, les DL de $\sin$ et $\cos$, donnés en Proposition 1.24, ne contiennent que des termes impairs et paires, respectivement. Cette propriété est très utile pour vérifier certains calculs.

DÉFINITION 1.7

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \bar{I}$. On dit que f admet un **développement limité fort** (abrégé DL fort) à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f = P_n(x - x_0) + O_{x_0}((x - x_0)^{n+1}) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + O_{x_0}((x - x_0)^{n+1}).$$

REMARQUE 1.8 : Si f admet un DL fort en x_0 à l'ordre n alors f admet un DL en x_0 à l'ordre n , car $O((x - x_0)^{n+1}) = o((x - x_0)^n)$, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour une fonction suffisamment dérivable, la formule de Taylor-Lagrange (Théorème 1.2) fournit un DL fort. Dans la Proposition 1.24, les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut donc appliquer Taylor-Lagrange et remplacer les $o(x^n)$ par des $O(x^{n+1})$. Par exemple

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

est un DL fort de $\exp$ en 0 à l'ordre 2 .

1.5. Opérations sur les DL

On rappelle quelques propriétés utiles sur les petits-o (avec $x_0 = 0$ pour simplifier), que l'on va utiliser plusieurs fois dans cette section, sous l'appellation « **règles de calcul sur les petits-o** » :

$$o(\lambda x^n) = \lambda o(x^n) = o(x^n), \quad \forall m > n, \quad x^m = o(x^n), \quad \forall m \geq n, \quad o(x^m) = o(x^n),$$

mais aussi

$$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n),$$

et

$$o(x^m)o(x^n) = o(x^{n+m}), \quad x^m o(x^n) = o(x^{n+m}).$$

Enfin, pour limiter les erreurs, on écrit **toujours** la partie régulière d'un DL en ordonnant les puissances par ordre croissant : $a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$.

On rappelle enfin que si P est un polynôme de degré n donné par $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, la troncature de P à l'ordre $m < n$ est le polynôme Q de degré m donné par $Q(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$.

PROPOSITION 1.31: TRONCATURE D'UN DL

Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière P_n , alors f admet un DL à l'ordre m en x_0 pour tout $m < n$. Sa partie régulière est la troncature de P_n à l'ordre m .

Démonstration. Si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

alors pour $m < n$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_m(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m).$$

En effet, avec les règles ci-dessus, on a

$$a_{m+1}(x - x_0)^{m+1} + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^m)$$

pour $m < n$. □

1.5.1 Somme et produit

PROPOSITION 1.32: SOMME DE DL

Si $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ et $g(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ avec P_n et Q_n deux polynômes de degré n , alors $f + g$ admet un DL en x_0 à l'ordre n donné par

$$(f + g)(x) = P_n + Q_n + o((x - x_0)^n).$$

Démonstration. C'est la conséquence directe de $o((x - x_0)^n) + o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$. □

EXEMPLE 1.12 : Calculons le DL en 0 et à l'ordre n des fonctions $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. D'après la Proposition 1.24,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \end{aligned}$$

Donc, en sommant les deux et en divisant par 2 :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}), \quad (x \rightarrow 0),$$

pour $n = 2k$. De même

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}), \quad (x \rightarrow 0),$$

pour $n = 2k + 1$. A comparer avec les DL de $\cos$ et $\sin$.

PROPOSITION 1.33: PRODUIT DE DL

Si f et g admettent un DL à l'ordre n en x_0 , de parties régulières respectives P_n et Q_n , alors fg admet un DL à l'ordre n en x_0 . Sa partie régulière est la troncature de $P_n Q_n$ à l'ordre n .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n))(Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)) \\ &= P_n(x - x_0)Q_n(x - x_0) + P_n(x - x_0)o((x - x_0)^n) \\ &\quad + Q_n(x - x_0)o((x - x_0)^n) + o((x - x_0)^n)o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Or $P_n(x - x_0) = O_{x_0}(1)$, donc

$$P_n(x - x_0)o((x - x_0)^n) = O_{x_0}(1)o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n).$$

De même, $Q_n(x - x_0)o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$. De plus, $o((x - x_0)^n)o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^{2n}) = o((x - x_0)^n)$. Enfin, $P_n Q_n$ est un polynôme de degré $2n$. Notons $c_0, c_1, \dots, c_{2n}$ ses coefficients, de sorte que

$$\begin{aligned} P_n(x - x_0)Q_n(x - x_0) &= c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n \\ &\quad + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots + c_{2n}(x - x_0)^{2n} \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

En effet, d'après les règles de calcul sur les petits- o

$$c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots + c_{2n}(x - x_0)^{2n} = o((x - x_0)^n).$$

Finalement

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

□

En pratique on retiendra que si on fait un calcul à l'ordre n , tous les termes d'ordre supérieur sont « absorbés » dans le $o(x^n)$.

EXEMPLE 1.13 : Calculons un DL d'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. D'après les DL usuels (Proposition 1.24) on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \textcolor{red}{xo(x^3)} - \frac{x^3}{6} + \frac{\textcolor{red}{x^5}}{12} - \frac{\textcolor{red}{x^3}}{6}o(x^3) + o(x^3) - \frac{x^2}{2}o(x^3) + o(x^3)o(x^3). \end{aligned}$$

Or, d'après les règles de calcul sur les petits- o ,

$$xo(x^3) + \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{6}o(x^3) + o(x^3) - \frac{x^2}{2}o(x^3) + o(x^3)o(x^3) = o(x^3).$$

Donc

$$\sin(x) \cos(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

REMARQUE 1.9 : Les formules de somme et de produit des DL ont un analogue naturel dans le cas des DL forts.

1.5.2 Composition, inverse et fonction réciproque

PROPOSITION 1.34: DL D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Soit f une fonction admettant un DL en a à l'ordre n , de partie régulière P . Soit $b = f(a)$ et g une fonction admettant un DL en b à l'ordre n , de partie régulière Q . Alors $g \circ f$ admet un DL en a à l'ordre n , dont la partie régulière est la troncature à l'ordre n du polynôme $Q(P(x) - b)$.

Démonstration. On a $g(y) = Q_n(y - b) + o_b((y - b)^n)$ au voisinage de $b = f(a)$. Donc en posant $y = f(x)$ on a $y \rightarrow b$ lorsque $x \rightarrow a$. On en déduit

$$g \circ f(x) = Q_n(f(x) - b) + o_a((f(x) - b)^n), \quad (x \rightarrow a)$$

De plus on a $f(x) = P(x) + o_a((x - a)^n)$ avec $P(x) = b + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n$. En particulier, $f(x) - b = O_a(x - a)$, donc en utilisant les règles de calcul

$$o_a((f(x) - b)^n) = o_a((O_a(x - a))^n) = o_a(O_a((x - a)^n)) = o_a((x - a)^n).$$

Posons ensuite $Q(y - b) = b_0 + b_1(y - b) + b_2(y - b)^2 + \dots + b_n(y - b)^n$. On a pour $k > 1$

$$(f(x) - b)^k = (P(x) - b + o_a((x - a)^n))^k = (P(x) - b)^k + o_a((x - a)^n)$$

où l'on a utilisé les règles de calcul et le fait que $P(x) - b = o_a(1)$. D'où, par linéarité

$$Q(f(x) - b) = Q(P(x) - b) + o_a((x - a)^n)$$

Donc

$$g \circ f(x) = Q(P(x) - b) + o_a((x - a)^n).$$

Enfin, $Q(P(x) - b)$ est un polynôme de degré n^2 , mais seuls les termes de degré inférieur ou égaux à n ne sont pas absorbés dans le $o_a((x - a)^n)$. $\square$

Notons le changement de point de calcul : la propriété ne s'applique que si l'on connaît le DL de f en a et le DL de g en $b = f(a)$.

EXEMPLE 1.14 : Calculons un DL de $\exp(\sin(x))$ en 0 à l'ordre 4. D'après les DL usuels (Proposition 1.24) on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0$$

En particulier $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$. On a donc besoin du DL de $\exp$ en $\sin(0) = 0$, qui est

$$\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + o(y^4).$$

Donc, pour $y = \sin(x)$

$$\begin{aligned} \exp(\sin(x)) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 + o \left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 \right) \end{aligned}$$

On développe ensuite chaque puissance, en ne gardant que les termes qui ne sont pas négligeables devant x^4 :

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 &= x^2 - 2 \frac{x^4}{6} + o(x^4), \\ \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^3 &= x^3 + o(x^4), \\ \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 &= x^4 + o(x^4), \\ o \left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 \right) &= o(x^4). \end{aligned}$$

On a donc, en rassemblant les termes,

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).\end{aligned}$$

REMARQUE 1.10 (Application au DL de $\frac{1}{f}$ et $\frac{f}{g}$) : Supposons que f admette un DL en 0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

avec $a_0 \neq 0$. Alors on peut calculer le DL suivant :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)},$$

et composer par le DL de $\frac{1}{1+y}$ à l'ordre n en $y = 0$:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots + (-1)^ny^n + o(y^n).$$

En remplaçant $y = \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)$ et en ne conservant que les termes non négligeables devant x^n , on obtient un DL de $\frac{1}{f}$ à l'ordre n en 0.

Avec la formule du produit de DL, on peut ainsi calculer le DL de $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ en x_0 si l'on connaît le DL de f et de g en x_0 , et si $g(x_0) \neq 0$.

REMARQUE 1.11 (Application au DL des fonctions réciproques) : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \in I$. On suppose f continue et strictement monotone sur I , avec $f(0) = 0$. Ainsi f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Supposons que f admette un DL à l'ordre n en 0, avec $f'(0) \neq 0$. Alors, en utilisant la composition, on peut montrer que la fonction réciproque f^{-1} admet un DL à l'ordre n , que l'on peut calculer en utilisant la relation $f \circ f^{-1}(x) = x$ et l'unicité du DL.

EXEMPLE 1.15 : $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de 0. $f^{-1} = \arcsin(x)$. On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On cherche donc un DL de la forme

$$\arcsin(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$

car $\arcsin(0) = 0$. On compose ensuite

$$\begin{aligned}x &= \sin(\arcsin(x)) = \arcsin(x) - \frac{\arcsin(x)^3}{6} + o((\arcsin(x))^3) \\ &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - \frac{(a_1)^3x^3}{6} + o(x^3) \\ x &= a_1x + a_2x^2 + \left(a_3 - \frac{(a_1)^3}{6}\right)x^3 + o(x^3).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Par unicité du DL on identifie les coefficients de la partie régulière à gauche et à droite. On en déduit $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_3 - \frac{(a_1)^3}{6} = 0$, soit $a_3 = \frac{1}{6}$. On vérifie au passage que $a_1 = \arcsin'(0) = 1$. Finalement,

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

1.5.3 Primitive et dérivée

PROPOSITION 1.35: DL D'UNE PRIMITIVE

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et supposons que f' admet un DL d'ordre n en x_0 , de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Alors f admet un DL d'ordre $n + 1$ en x_0 , donné par

$$f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

Démonstration. Posons

$$R(x) = f(x) - f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}.$$

R est dérivable et l'on a

$$R'(x) = f'(x) - a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Par hypothèse $R'(x) = o((x - x_0)^n)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad |R'(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|^n$$

Pour $x > x_0$, posons $g(x) = \varepsilon \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$, de sorte que $g'(x) = \varepsilon |x - x_0|^n$ et $|R'(x)| \leq g'(x)$ pour $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$. On applique l'inégalité des accroissements finis (Proposition 1.23), en remarquant que $R(x_0) = g(x_0) = 0$, ce qui donne

$$|R(x)| \leq \varepsilon \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1}.$$

On procède de même pour $x < x_0$ avec $g(x) = \varepsilon \frac{(x_0 - x)^{n+1}}{n+1}$ et on déduit l'inégalité ci-dessus pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Donc $R(x) = o((x - x_0)^{n+1})$. $\square$

EXEMPLE 1.16 : Retrouver le DL de $\ln(1 + x)$ à partir du DL de $\frac{1}{1+x}$ donné en Proposition 1.24 (calcul laissé au lecteur).

REMARQUE 1.12 : Il n'est pas toujours possible de dériver un DL. Considérons par exemple la fonction $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

donc $f(x) = o(x^2)$ et f admet un DL d'ordre 2. Cependant, pour $x \neq 0$

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2 \cos(\frac{1}{x^2}).$$

A cause du second terme, cette expression n'admet pas de limite en 0, alors que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 mais f' n'est pas continue en 0, donc f' n'admet pas de DL en 0.

PROPOSITION 1.36

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivable en $x_0 \in I$. Alors f admet un DL à l'ordre n en x_0 et f' admet un DL à l'ordre $n - 1$ en x_0 et l'on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

et

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

Démonstration. Laissée au lecteur. Utiliser la formule de Taylor-Young. $\square$

1.6. Développements asymptotiques [Hors Programme]

[Cette partie n'a pas été vue en cours et n'est pas exigible en colle ou en examen.]

Toute la théorie des développements limités se fait au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. En particulier on ne peut pas prendre $x_0 = \pm\infty$. Cependant, les relations de dominance, prépondérance et équivalence sont bien définies en $+\infty$. Ainsi au voisinage de l'infini, on peut s'inspirer des développements limités pour étudier les propriétés asymptotiques d'une fonction.

Plutôt qu'une théorie générale, on se contentera de quelques cas intéressants illustrés par des exemples. Les énoncés suivants discutent le cas en $+\infty$, mais l'étude en $-\infty$ est analogue.

DÉFINITION 1.8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I voisinage de $+\infty$. On dit que f admet un **développement asymptotique** (abrégé DA) ou développement limité généralisé à l'ordre n en $+\infty$ s'il existe un polynôme P tel que

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad (x \rightarrow +\infty).$$

REMARQUE 1.13 : $\odot$ L'existence d'un DA implique que $\lim_{x \rightarrow \infty} f$ est finie.

- $\odot$ L'expression $P(\frac{1}{x})$ n'est pas un polynôme mais a des propriétés similaires.
- $\odot$ Au voisinage de $+\infty$ on a $x^{-n} = o(x^{-m})$ pour $0 \leq n < m$. On écrit donc les puissances négatives par ordre décroissant. En pratique, on pose $x = \frac{1}{t}$ et on se ramène aux calculs de DL en 0.

EXEMPLE 1.17 : $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{3+x+x^2}$ en $+\infty$. On pose $x = \frac{1}{t}$ avec $t > 0$ ce qui donne

$$f(x) = t\sqrt{3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{3t^2 + t + 1}$$

Au voisinage de $t = 0$ on a

$$\sqrt{1+t+3t^2} = 1 + \frac{1}{2}(t+3t^2) - \frac{1}{8}(t+3t^2)^2 + o(t^2) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{11}{8}t^2 + o(t^2)$$

Donc, en revenant à la variable x , f admet un DA à l'ordre 2 en $+\infty$, donné par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{11}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

DÉFINITION 1.9

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I voisinage de $+\infty$. On dit que f a une asymptote polynomiale P de degré d en $+\infty$ si

$$f(x) = P(x) + o(1) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 + o(1), \quad (x \rightarrow +\infty).$$

REMARQUE 1.14 : 1. L'existence d'une asymptote polynomiale de degré $d > 0$ implique que $\lim_{x \rightarrow \infty} f$ est infinie.

2. En $+\infty$ on a $x^n = o(x^m)$ pour $0 \leq n < m$, à l'inverse de $x_0 = 0$. On écrit donc les puissances dans l'ordre décroissant.
3. Si $P = a_1$ ou $P = a_1 x + a_0$, on retrouve les notions d'asymptote horizontale et oblique.
4. Pour trouver la courbe polynomiale asymptote à f , on cherche (si elle existe) la plus grande puissance x^d tel que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^d} = a_d$ avec $a_d \in \mathbb{R}$. Puis on recommence avec $f(x) - a_d x^d$, etc.
5. Si on connaît l'asymptote polynomiale P d'une fonction f , on peut étudier sa position relative, donnée par le premier terme non nul du DA de $f - P$.
6. La notion d'asymptote polynomiale est beaucoup moins générale que les DL et les DA. De nombreuses fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ n'ont pas d'asymptote polynomiale. C'est le cas de $f(x) = \exp(x)$.

EXEMPLE 1.18 : $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$ en $+\infty$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2.$$

Ensuite, on a $f(x) - 2x^2 = \frac{-3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x^2 = -3.$$

Ainsi, f a pour asymptote polynômiale $P(x) = 2x^2 - 3$ en $+\infty$. De plus,

$$f(x) - P(x) = \frac{x + 6}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{t} + 6}{\frac{1}{t^2} + 1} = \frac{6 + t}{1 + t^2}$$

où l'on a posé $x = \frac{1}{t}$ avec $t > 0$. On calcule un DL au voisinage de $t = 0$:

$$\frac{6 + t}{1 + t^2} = (6t^2 + t)(1 - t^2 + o(t^2)) = t + 6t^2 + o(t^2).$$

Finalement, $f - P$ admet un DA à l'ordre 2 en $+\infty$

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En particulier $f - P > 0$ au voisinage de $+\infty$, donc la courbe de f est au dessus de celle de P .

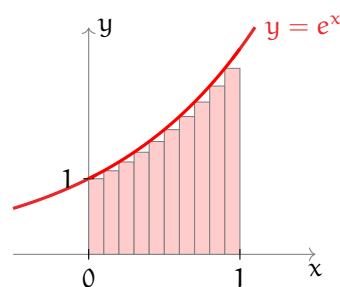
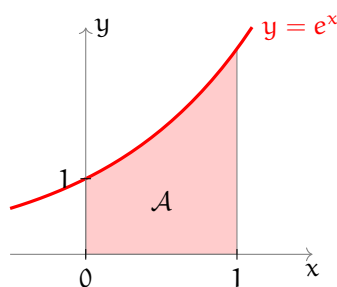
2 INTÉGRATION



Objectifs :

- Fonctions en escalier et intégrale au sens de Riemann
- Théorème fondamental de l'analyse
- Calcul de primitives (intégration par parties, changement de variable, décomposition en éléments simples,...)

Motivation : aire sous une courbe



L'intégrale d'une fonction f est définie formellement comme l'aire sous la courbe, délimitée par deux points a et b de son ensemble de définition. Si une telle aire $\mathcal{A}$ existe, on l'appelle intégrale de a à b de f , que l'on note

$$\mathcal{A} = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

Une théorie mathématique de l'intégrale répond à deux questions, quasiment indépendantes :

1. Quelles sont les fonctions pour lesquelles l'intégrale est bien définie ?
2. Pour ces fonctions, comment calculer l'intégrale ?

Une approche naturelle est de se ramener à l'aire la plus simple : celle d'un rectangle. En approximant f par une fonction constante par morceaux, on peut espérer calculer $\mathcal{A}$ de façon approchée.

Cette approche par discrétisation est utilisée depuis la Grèce antique pour calculer certaines aires, mais c'est au XVII^{ème} siècle qu'Isaac Newton (1642-1727) établit un lien remarquable entre l'intégrale d'une fonction et sa primitive. C'est le théorème fondamental de l'analyse, généralisé ensuite par Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), qui invente au passage la notation infinitésimale. Le symbole $\int$ doit ainsi être compris comme un « S » étiré, qui signifie « somme » sur tous les éléments infinitésimaux dx de l'intervalle $[a, b]$.

Cependant, ce calcul infinitésimal ne s'applique qu'aux fonctions suffisamment régulières, et il faudra ensuite attendre les travaux du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) pour répondre complètement à la première question. C'est l'intégrale dite au sens de Riemann, que nous allons étudier dans ce chapitre.

2.1. Intégrale des fonctions en escalier

Dans toute cette section, on ne considère que des intervalles $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui sont fermés et bornés, et on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 2.1

Une **subdivision** de $[a, b]$ est une famille finie $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

Notons qu'une telle subdivision contient $n + 1$ points et n sous-intervalles de $[a, b]$.

DÉFINITION 2.2

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall x \in]a_{i-1}, a_i[, \quad f(x) = \lambda_i.$$

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

REMARQUE 2.1 : $\odot$ On dit que la subdivision σ ci-dessus est **adaptée** à f .

- $\odot$ Cette définition ne mentionne que les intervalles **ouverts** $]a_{i-1}, a_i[$, mais ne requiert aucune condition sur f en a_i .

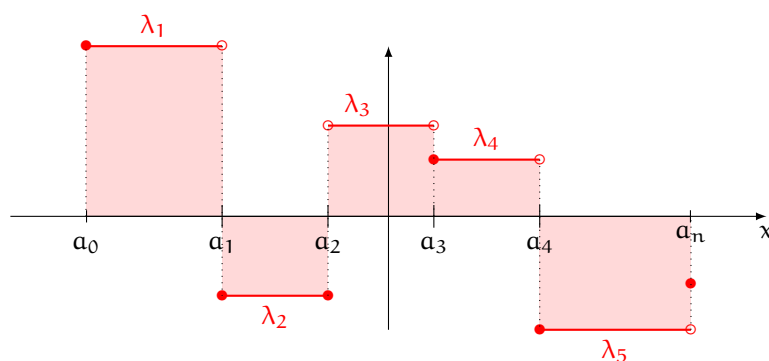


FIGURE 2.1 – Exemple de subdivision et de fonction en escalier. Son intégrale est la somme (relative) des rectangles.

DÉFINITION 2.3

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et σ une subdivision adaptée à f . On définit l'**intégrale de f relativement à σ** par

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1})$$

REMARQUE 2.2 : $\odot$ Si $\lambda_i > 0$, on retrouve l'aire d'un rectangle de hauteur λ_i et de base $a_i - a_{i-1}$

- $\odot$ Si $\lambda_i < 0$, on a l'aire relative $-|\lambda_i|(a_i - a_{i-1})$
- $\odot$ Si $\lambda \in \mathbb{C}$ la formule reste valable même si l'interprétation en terme d'aire est moins évidente. On a $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $I(f, \sigma)$ est à valeur complexe.
- $\odot$ La définition ci-dessus ne dépend pas des valeurs $f(a_i)$.

EXEMPLE 2.1 : La fonction signe modifiée, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 2022 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est une fonction en escalier sur $[-1, 1]$, avec une subdivision adaptée $\sigma = (-1, 0, 1)$. On a $I(f, \sigma) = -1 + 1 = 0$

DÉFINITION 2.4

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ' est une **subdivision plus fine** que σ , noté $\sigma \leq \sigma'$, si $\{\sigma\} \subset \{\sigma'\}$, où $\{\sigma\} = \{a_0, \dots, a_n\}$.

Une subdivision plus fine ajoute des points à la subdivision initiale, et contient donc plus de morceaux. Par exemple $(-1, -0.5, 0, 0.5, 1)$ est une subdivision plus fine que $(-1, 0, 1)$ sur $[-1, 1]$. Ce n'est pas le cas de $(-1, -0.5, 0.5, 1)$ car elle ne contient pas le point 0 de la subdivision initiale.

PROPOSITION 2.1

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et σ une subdivision adaptée à f . Si $\sigma \leq \sigma'$, alors σ' est aussi adaptée à f et l'on a

$$I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$$

Démonstration. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et σ' tel que $\sigma \leq \sigma'$. On ne traitera que le cas où σ et σ' diffèrent par un seul point a' . Soit k tel que $a' \in]a_{k-1}, a_k[$. Sur cet intervalle, on a $f(x) = \lambda_k$. Donc sur les intervalles $]a_{k-1}, a'[,$ et $]a', a_k[$ on a $f(x) = \lambda_k$. Donc $\sigma' = (a_0, \dots, a_{k-1}, a', a_k, \dots, a_n)$ est aussi adaptée à f . De plus, puisque $a_k - a_{k-1} = (a_k - a') + (a' - a_{k-1})$, on a

$$\begin{aligned} I(f, \sigma) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (a_i - a_{i-1}) + \lambda_k (a_k - a') + \lambda_k (a' - a_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1}) \\ &= I(f, \sigma'). \end{aligned}$$

La preuve générale est analogue. □

PROPOSITION 2.2

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et σ_1, σ_2 deux subdivisions adaptées à f . Alors $I(f, \sigma_1) = I(f, \sigma_2)$. L'intégrale des fonctions en escaliers est donc indépendante du choix de la subdivision, on la note

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. On considère σ' définie par $\{\sigma'\} = \{\sigma_1\} \cup \{\sigma_2\}$, de sorte que $\sigma_1 \leq \sigma'$ et $\sigma_2 \leq \sigma'$. Donc d'après la proposition précédente, $I(f, \sigma_1) = I(f, \sigma') = I(f, \sigma_2)$. □

PROPOSITION 2.3: LINÉARITÉ

Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in \mathbb{K}$. Alors $f + g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $cf \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. De plus on a $0 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, où 0 est la fonction identiquement nulle.

De plus on a

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (cf) = c \int_a^b f, \quad \int_a^b 0 = 0.$$

Démonstration. Soit σ_f et σ_g deux subdivisions respectivement adaptées à f et g . On note $\{\lambda_i\}$ et $\{\mu_i\}$ les valeurs de f et g sur chaque intervalle de leurs subdivisions. On considère σ' définie par $\{\sigma'\} = \{\sigma_f\} \cup \{\sigma_g\}$. Sur chaque intervalle de σ' on a $f(x) + g(x) = \lambda_i + \mu_j$ pour un certain i et j . Donc σ' est adaptée à $f + g$ et $f + g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. De plus on a

$$\int_a^b (f + g) = I(f + g, \sigma') = I(f, \sigma') + I(g, \sigma') = I(f, \sigma_f) + I(g, \sigma_g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

On a utilisé la Proposition 2.2 et le fait que $I(f + g, \sigma') = I(f, \sigma') + I(g, \sigma')$ pour toute subdivision adaptée à la fois à f et g . Cette propriété s'obtient en revenant à la définition de $I(f, \sigma)$.

Par ailleurs, sur chaque intervalle de σ_f , on a $cf(x) = c\lambda_i$ pour un certain i , donc σ_f est adaptée à cf et $cf \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. De plus on a

$$\int_a^b (cf) = \sum_{i=1}^n c\lambda_i(a_i - a_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i - a_{i-1}) = c \int_a^b f$$

Enfin, la subdivision (a, b) avec $\lambda_1 = 0$ est une subdivision adaptée à la fonction nulle, donc $0 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et l'on a

$$\int_a^b 0 = 0(b - a) = 0.$$

□

REMARQUE 2.3 : La première partie de la proposition nous dit que $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$, c'est en fait un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{[a, b]} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}\}$. En effet $f + g$ définit le groupe abélien $(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), +)$ dont l'élément neutre est la fonction nulle 0 , et cf définit la multiplication par un scalaire c , compatible avec $+$. Par exemple $c(f + g) = cf + cg$.

La seconde partie de la proposition nous dit que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$$

est une **application linéaire**.

REMARQUE 2.4 : Dans la suite on utilisera aussi la notation $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ pour les fonctions en escalier à valeurs positives. Cependant, on gardera bien en tête que $\mathbb{R}_+$ n'est pas un corps et que $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ n'a pas la structure d'espace vectoriel.

PROPOSITION 2.4: MONOTONIE

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tel que $f \leq g$ sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Démonstration. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et g (une telle subdivision existe toujours quitte à prendre une subdivision plus fine). Notons λ_i et μ_i les valeurs de f et g sur $]a_{i-1}, a_i[$. Par hypothèse, on a $\lambda_i \leq \mu_i$ pour tout i . Donc

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i(a_i - a_{i-1}) \leq \int_a^b g.$$

□

PROPOSITION 2.5: INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, alors $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Démonstration. On rappelle l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{K}$:

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

pour tout $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}$. C'est la généralisation (obtenue par récurrence) de $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, valable sur $\mathbb{R}$ (valeur absolue) ou $\mathbb{C}$ (module).

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et λ_i la valeurs de f sur $]a_{i-1}, a_i[$ pour chaque i . On remarque que σ est adaptée à $|f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et que $|f(x)| = |\lambda_i|$ pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$. On a donc

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| (a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| (a_i - a_{i-1}) = \int_a^b |f|,$$

où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire et le fait que $a_i - a_{i-1} > 0$. $\square$

PROPOSITION 2.6: BORNE SUPÉRIEURE

Si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et l'on a $\left| \int_a^b f \right| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$

Démonstration. On reprends les notations de la preuve précédente. f ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $[a, b]$ et l'on a : λ_i et $f(a_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et $f(a)$, donc f est bornée. De plus, en reprenant le calcul de la preuve précédente,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| (a_i - a_{i-1}) \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

$\square$

PROPOSITION 2.7: RELATION DE CHASLES

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in]a, b[$. Alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Démonstration. Laissée au lecteur. $\square$



Pour $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ on notera par convention

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = - \int_a^b f,$$

ce qui permet notamment d'étendre la relation de Chasles au cas où $c \leq a$ et $c \geq b$.

2.2. Fonctions intégrables au sens de Riemann

DÉFINITION 2.5

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann**, ou **Riemann-intégrable** (abrégié RI), si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\phi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \phi_\varepsilon(x)| \leq \psi_\varepsilon(x)$$

et

$$0 \leq \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

On note $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 2.8: CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est Riemann-intégrable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\phi_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\psi_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \phi_n(x)| \leq \psi_n(x)$$

avec, de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = 0$$

Démonstration. Laissez au lecteur. Indication : $(\Rightarrow)$ Prendre $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. $(\Leftarrow)$ Utiliser la définition en ε de $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = 0$. □

PROPOSITION 2.9: CAS DES FONCTIONS RÉELLES

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f est Riemann-intégrable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $g_n, h_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad h_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (g_n - h_n) = 0.$$

Démonstration. On part de la proposition précédente. Soit ϕ_n et ψ_n la suite de fonctions associées à f . Toutes les fonctions sont à valeurs réelles, on peut donc utiliser les propriétés de la valeur absolue.

$$\begin{aligned} & |f(x) - \phi_n(x)| \leq \psi_n(x) \\ \Leftrightarrow & -\psi_n(x) \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \psi_n(x) \\ \Leftrightarrow & \phi_n(x) - \psi_n(x) \leq f(x) \leq \phi_n(x) + \psi_n(x) \end{aligned}$$

Donc en posant $h_n = \phi_n - \psi_n$ et $g_n = \phi_n + \psi_n$ on a le sens direct. Réciproquement, on pose $\phi_n = \frac{h_n + g_n}{2}$ et $\psi_n = \frac{g_n - h_n}{2}$. Enfin, on vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (g_n - h_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = 0.$$

□

REMARQUE 2.5 : Cette dernière caractérisation est plus intuitive : une fonction est Riemann intégrable si on peut l'encadrer par une suite de deux fonctions en escalier qui ont la même intégrale à la limite. **Cependant, cette image n'est valable que pour les fonctions à valeurs réelles.**

THÉORÈME 2.1: INTÉGRALE DE RIEMANN

Soit $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$. Soit ϕ_n et ψ_n tel que $|f - \phi_n| \leq \psi_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = 0$, selon la Proposition 2.8. Alors la suite

$$I_n = \int_a^b \phi_n$$

est convergente, et sa limite est indépendante du choix de ϕ_n et ψ_n . On note cette limite

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx$$

et on l'appelle **l'intégrale de f** .

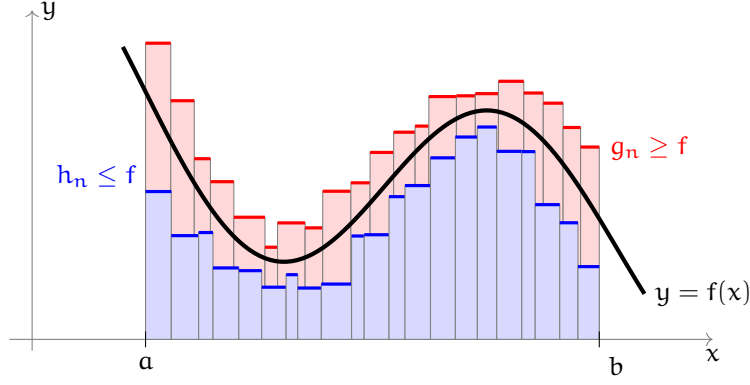


FIGURE 2.2 – Une fonction à valeurs réelles encadrée par deux fonctions en escalier.

Démonstration. Montrons d'abord que la suite I_n est convergente. Pour cela, on va montrer que c'est une suite de Cauchy. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On calcule,

$$|I_n - I_m| = \left| \int_a^b \phi_n - \int_a^b \phi_m \right| = \left| \int_a^b (\phi_n - \phi_m) \right| \leq \int_a^b |\phi_n - \phi_m|,$$

où l'on a utilisé la linéarité et l'inégalité triangulaire pour les fonctions en escalier. De plus, pour $x \in [a, b]$ on a

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| \leq |\phi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \phi_m(x)| \leq \psi_n + \psi_m$$

En particulier, la monotonie de l'intégrale des fonctions en escalier nous dit que

$$\int_a^b |\phi_n(x) - \phi_m(x)| \leq \int_a^b \psi_n + \psi_m.$$

Ensuite, puisque $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, alors $\int_a^b \psi_n \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad \int_a^b \psi_n \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour $n, m \geq N_0$ on a

$$|I_n - I_m| \leq \int_a^b |\phi_n - \phi_m| \leq \int_a^b (\psi_n + \psi_m) = \int_a^b \psi_n + \int_a^b \psi_m \leq 2\varepsilon,$$

donc la suite I_n est de Cauchy dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc elle converge.

Montrons maintenant que la limite est indépendante du choix de ϕ_n et ψ_n . Soit ϕ_n^1, ψ_n^1 et ϕ_n^2, ψ_n^2 qui vérifient les propriétés de l'énoncé, et notons $I_n^1 = \int_a^b \phi_n^1$ et $I_n^2 = \int_a^b \phi_n^2$. Montrons que $|I_n^1 - I_n^2| \rightarrow 0$. On calcule

$$|I_n^1 - I_n^2| = \left| \int_a^b \phi_n^1 - \int_a^b \phi_n^2 \right| = \left| \int_a^b (\phi_n^1 - \phi_n^2) \right| \leq \int_a^b |\phi_n^1 - \phi_n^2|.$$

Comme précédemment, on a

$$|\phi_n^1(x) - \phi_n^2(x)| \leq |\phi_n^1(x) - f(x)| + |f(x) - \phi_n^2(x)| \leq \psi_n^1 + \psi_n^2,$$

et donc, par monotonie, la même relation pour l'intégrale de a à b . Donc

$$|I_n^1 - I_n^2| \leq \int_a^b |\phi_n^1 - \phi_n^2| \leq \int_a^b \psi_n^1 + \psi_n^2 = \int_a^b \psi_n^1 + \int_a^b \psi_n^2.$$

Or $\int_a^b \psi_n^1 \rightarrow 0$ et $\int_a^b \psi_n^2 \rightarrow 0$ car $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$. Donc $|I_n^1 - I_n^2| \rightarrow 0$, et I_n^1 et I_n^2 ont la même limite. $\square$

REMARQUE 2.6 : On a naturellement que $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, en prenant $\phi_n = f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\psi_n = 0$. Dans ce cas l'intégrale de Riemann coïncide avec celle des fonctions en escalier.

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent aux fonctions Riemann-intégrables.

PROPOSITION 2.10: LINÉARITÉ

Soit $f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in \mathbb{K}$. Alors $f + g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et $cf \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$. De plus on a $0 \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, où 0 est la fonction identiquement nulle. De plus on a

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (cf) = c \int_a^b f, \quad \int_a^b 0 = 0.$$

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in \mathbb{K}$. On va montrer directement que $cf + g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et que $\int_a^b (cf + g) = c \int_a^b f + \int_a^b g$. Soit ϕ_n^f, ψ_n^f en escalier tel que $|f - \phi_n^f| \leq \psi_n^f$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n^f = 0$, selon la Proposition 2.8. Soit ϕ_n^g, ψ_n^g associées de façon similaire à g . On a $c\phi_n^f + \phi_n^g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et, de plus

$$|(cf + g) - (c\phi_n^f + \phi_n^g)| \leq |c||f - \phi_n^f| + |g - \phi_n^g| \leq |c|\psi_n^f + \psi_n^g.$$

avec $|c|\psi_n^f + \psi_n^g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Par ailleurs,

$$\int_a^b |c|\psi_n^f + \psi_n^g = |c| \int_a^b \psi_n^f + \int_a^b \psi_n^g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier (Proposition 2.3). Donc $cf + g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$. On en déduit

$$\int_a^b (cf + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (c\phi_n^f + \phi_n^g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c \int_a^b \phi_n^f + \int_a^b \phi_n^g \right) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n^f + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n^g = c \int_a^b f + \int_a^b g,$$

où l'on a aussi utilisé la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier et le fait que, par définition $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n^f = \int_a^b f$, et de même pour g .

Enfin, la fonction nulle est en escalier donc Riemann-intégrable, et son intégrale est nulle. $\square$

REMARQUE 2.7 : Comme pour les fonctions en escalier, l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (c'est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{[a, b]}$) et l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire.

PROPOSITION 2.11: MONOTONIE

Si $f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$ avec $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

De façon équivalente, si $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$.

Démonstration. On passe d'un énoncé à l'autre via $f \leftrightarrow g - f$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale. Supposons donc $f \geq 0$. Soit ψ_n, ϕ_n associées à f selon la Proposition 2.8. Comme f est à valeur réelles, $|f - \phi_n| \leq \psi_n$ devient

$$-\psi_n \leq f - \phi_n \leq \psi_n.$$

Donc, en particulier

$$\phi_n + \psi_n \geq f \geq 0.$$

Or, $\phi_n + \psi_n$ est en escalier, donc en utilisant la monotonie de l'intégrale des fonctions en escalier

$$\int_a^b (\phi_n + \psi_n) \geq 0$$

En utilisant la linéarité et en passant à la limite, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n \geq 0.$$

Donc $\int_a^b f \geq 0.$

□



Comme pour les fonctions en escalier, la propriété de monotonie n'est valable que pour les **fonctions à valeurs réelles**.

PROPOSITION 2.12

Si $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$,

1. alors $|f| \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ (inégalité triangulaire)

2. alors f est bornée et (borne supérieure)

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Démonstration. 1. Soit ϕ_n, ψ_n en escalier, associées à f selon la Proposition 2.8. On utilise ensuite la deuxième inégalité triangulaire $||a| - |b|| \leq |a - b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$||f(x)| - |\phi_n(x)|| \leq |f(x) - \phi_n(x)| \leq \psi_n(x),$$

donc $||f| - |\phi_n|| \leq |f - \phi_n| \leq \psi_n$. Or $|\phi_n|, \psi_n$ sont en escalier et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = 0$. Donc $|f|$ est Riemann-intégrable et l'on a, par définition

$$\int_a^b |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\phi_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b \phi_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n \right| = \left| \int_a^b f \right|,$$

où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire sur la fonction en escalier ϕ_n et le fait que $x \mapsto |x|$ est une fonction continue.

2. Pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$|f(x) - \phi_n(x)| \leq \psi_n(x)$$

On utilise ensuite le fait que $|f(x)| - |\phi_n(x)| \leq |f(x) - \phi_n(x)|$ (conséquence de la deuxième inégalité triangulaire), donc $|f(x)| - |\phi_n(x)| \leq \psi_n(x)$, soit

$$|f(x)| \leq \psi_n(x) + |\phi_n(x)|.$$

Or $\psi_n + |\phi_n| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, donc $\psi_n + |\phi_n|$ est bornée, car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $[a, b]$. Donc f est bornée et l'on a, grâce à l'inégalité triangulaire pour l'intégrale

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

On a utilisé le fait que $\int_a^b c = c(b - a)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.

□

REMARQUE 2.8 : Le fait que $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K}) \Rightarrow f$ bornée est une restriction très forte et l'un des défaut de cette théorie. Ainsi toute fonction non bornée n'est pas Riemann-intégrable.



Si $fg \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, alors on peut montrer (admis) que $fg \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$. En revanche,

$$\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$$

PROPOSITION 2.13: INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Si $f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration. En exercice. □

PROPOSITION 2.14: RELATION DE CHASLES

Soit $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in]a, b[$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et l'on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Démonstration. Laissée au lecteur. □

PROPOSITION 2.15

Soit $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ tel que $f = g$ sauf en un nombre fini de points, c'est à dire qu'il existe $\{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq x_i$. Alors

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

Démonstration. Laissée au lecteur. □

PROPOSITION 2.16: FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

1. On définit $\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$. Alors f est Riemann-intégrable si et seulement si $\bar{f}$ est Riemann-intégrable et l'on a

$$\int_a^b \bar{f} = \overline{\int_a^b f}.$$

2. On définit $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, de sorte que $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$. Alors f est Riemann-intégrable si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont Riemann-intégrables. Dans ce cas on a

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$

Autrement dit, $\operatorname{Re} \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im} \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f)$.

Démonstration. 1. On admettra que cet énoncé est vrai pour les fonctions en escalier (démonstration laissée au lecteur). Ensuite, si $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{C})$ avec $|f - \phi_n| \leq \psi_n$ et $\int_a^b \psi_n \rightarrow 0$, alors

$$|\bar{f} - \overline{\phi_n}| = |\overline{f - \phi_n}| = |f - \phi_n| \leq \psi_n.$$

Donc $\bar{f} \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{C})$ et l'on a, puisque ϕ_n est en escalier,

$$\int_a^b \bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \overline{\phi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\int_a^b \phi_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n} = \overline{\int_a^b f}.$$

2. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale et le fait que $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$ dans un sens et

$$\operatorname{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im}(f) = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

dans l'autre. □

2.3. Critères d'intégrabilité

DÉFINITION 2.6: FONCTIONS RÉGLÉES

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **réglée** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\phi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \phi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

De façon équivalente, f est réglée si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\phi_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \phi_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, f est réglée si elle est la limite de fonctions en escalier, mais de façon **uniforme** sur $[a, b]$.

PROPOSITION 2.17

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est réglée, alors elle est Riemann-intégrable.

Démonstration. Posons $\psi_n(x) = \frac{1}{n}$. Ainsi ϕ_n et ψ_n sont en escalier et l'on a

$$|f(x) - \phi_n(x)| \leq \frac{1}{n} = \psi_n,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0,$$

donc $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$. □

THÉORÈME 2.2: INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS CONTINUES

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est réglée.

Démonstration. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, d'après le théorème de Heine. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ telle que cette proposition est vraie. On considère une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la distance entre deux points de σ est inférieure ou égale à η . Par exemple $a_i = a + \frac{b-a}{n}i$ pour $i = 0, \dots, n$. On définit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier par $\phi(a) = f(a)$ et $\phi(x) = f(a_i)$ pour $x \in]a_{i-1}, a_i]$. Soit $x \in]a, b]$ et soit i tel que $a_{i-1} < x \leq a_i$. En particulier $|x - a_i| \leq |a_i - a_{i-1}| \leq \eta$. Donc, puisque f est uniformément continue

$$|f(x) - \phi(x)| \leq |f(x) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Enfin, pour $x = a$ on a $|f(a) - \phi(a)| = 0 \leq \varepsilon$. Donc

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon,$$

et $\phi \in ([a, b], \mathbb{K})$. Donc f est réglée. □

PROPOSITION 2.18

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ positive et continue, telle que $\int_a^b f = 0$. Alors $f = 0$.

Démonstration. En exercice. □



La continuité et la positivité sont essentielles ici. Par exemple la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 en $x = 0$ et 0 ailleurs n'est pas nulle mais d'intégrale nulle.

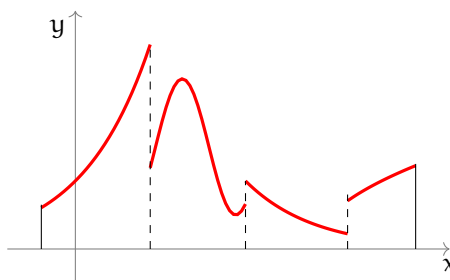
DÉFINITION 2.7: FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ telle que pour tout $i = 1, \dots, n$, la restriction

$$f|_{]a_{i-1}, a_i[}$$

soit continue et admette des limites finies en a_{i-1} et a_i . Une telle subdivision σ est dite **adaptée** à f .

EXEMPLE 2.2 : Une fonction continue est continue par morceaux. Les fonctions en escalier sont continues par morceaux. La fonction suivante est continue par morceaux :



La deuxième partie de la définition est essentielle. Par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas continue par morceau sur $[-1, 1]$, car elle n'admet pas de limite finie en 0. Notons aussi qu'une fonction continue par morceaux a un nombre fini de points de discontinuité.

PROPOSITION 2.19: INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors elle est Riemann-intégrable.

Démonstration. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f . Pour chaque $i = 1, \dots, n$, la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ se prolonge à une fonction f_i , continue sur $[a_{i-1}, a_i]$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 2.2, il existe ϕ_i en escalier tel que

$$\forall x \in [a_{i-1}, a_i], \quad |f_i(x) - \phi_i(x)| \leq \varepsilon.$$

On définit maintenant $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$\phi(x) = \phi_i(x), \quad x \in]a_{i-1}, a_i[, \quad i = 1, \dots, n,$$

et $\phi(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. Par construction, ϕ est en escalier et $|f - \phi| \leq \varepsilon$. Donc f est réglée. □

THÉORÈME 2.3: INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS MONOTONES

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est monotone alors f est réglée.

Notons qu'il existe des fonctions monotones qui ne sont pas continues par morceaux, par exemple avec une infinité de discontinuités.

[Le lemme qui suit et la preuve du Théorème 2.3 n'ont pas été vus en cours.]

LEMME 2.1

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone alors l'image réciproque d'un intervalle est un intervalle.

Démonstration. On rappelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie convexe. C'est à dire que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$x, y \in I, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, montrons que

$$I := f^{-1}(J) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in J\}$$

est un intervalle. Si I est vide ou réduit à un point, alors c'est un intervalle. On suppose donc que I contient au moins deux points, notés a et b . Par définition, $f(a)$ et $f(b) \in J$. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq c \leq b$. Supposons f croissante, alors

$$f(a) \leq f(c) \leq f(b).$$

Or J est un intervalle, donc $f(c) \in J$, donc $c \in I$. Donc I est un intervalle. $\square$

Démonstration du Théorème 2.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Supposons f croissante, de sorte que $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$ (attention, si f n'est pas continue $f([a, b])$ n'est pas forcément un intervalle). Soit $\varepsilon > 0$. On découpe $[f(a), f(b)]$ en intervalles de taille ε en définissant $y_i = f(a) + i\varepsilon$ pour $i = 0, \dots, n$ avec $n = E\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$, et $y_{n+1} = b$. Pour $i = 0, \dots, n$ on pose

$$J_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}]).$$

D'après le lemme ci-dessus, J_i est un intervalle pour tout i . De plus on a

$$\bigcup_{i=0}^n J_i = [a, b].$$

Pour chaque $J_i \neq \emptyset$ on choisit $x_i \in J_i$, et on définit $\phi_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi_\varepsilon(x) = f(x_i), \quad \forall x \in J_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

ϕ_ε est en escalier et pour $x \in [a, b]$, $x \in J_i$ pour un certain i . Donc

$$|f(x) - \phi_\varepsilon(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon$$

car $f(x), f(x_i) \in [y_i, y_{i+1}[$ et $|y_{i+1} - y_i| \leq \varepsilon$. Donc f est réglée. $\square$

DÉFINITION 2.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ et soit $-\infty < a < b < +\infty$. On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si la restriction $f|_{[a, b]}$ est Riemann-intégrable.

PROPOSITION 2.20

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ tel que f est bornée sur $[a, b]$ et Riemann-intégrable sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors f est Riemann-intégrable.

Démonstration. Admise. $\square$

EXEMPLE 2.3 : La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 3 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'admet pas de limite à gauche en 0. Donc f n'est pas continue, ni même continue par morceaux sur $[0, 1]$. En fait, on peut montrer que f n'est pas réglée. En revanche, f est bornée et f est continue sur $[\varepsilon, 1]$ pour tout ε , donc elle est Riemman-intégrable sur $[\varepsilon, 1]$ pour tout ε . Donc f est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ d'après la proposition précédente.

Notons enfin que **toutes les fonctions ne sont pas Riemann-intégrables**. Toutes les fonctions non bornées par exemple. Pour les fonctions bornées, la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon, est bornée mais n'est pas Riemann-intégrable.

2.4. Intégrale et primitives

Dans cette section, sauf indication contraire, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 2.9: FONCTIONS LOCALEMENT INTÉGRABLES

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **localement intégrable sur I** si pour tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$, la restriction $f|_{[a, b]}$ est Riemann-intégrable.

EXEMPLE 2.4 : 1. La fonction $f(x) = x^2$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$, car non bornée. En revanche, elle est localement intégrable sur $]0, 1]$ car pour tout $0 < a < b \leq 1$, $f|_{[a, b]}$ est Riemann-intégrable.

DÉFINITION 2.10

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ localement intégrable. Soit $a \in I$. On définit

$$F_a : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto F_a(x) = \int_a^x f \end{cases}$$

REMARQUE 2.9 : Avec les conventions sur l'intégrale, on a $F_a(a) = 0$ et si $x < a$, $F_a(x) = \int_a^x f = -\int_x^a f$. Enfin, pour $a, b \in I$ on a, en utilisant la relation de Chasles :

$$F_a(x) - F_b(x) = \int_a^x f - \int_b^x f = \int_a^x f + \int_x^b f = \int_a^b f.$$

Donc $F_a(x) - F_b(x)$ est une constante indépendante de x .

THÉORÈME 2.4

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est localement intégrable, alors F_a est continue.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Montrons que F_a est continue en x_0 . On suppose que x_0 est à l'intérieur de I , c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $J = [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$ (si x_0 est au bord de I , la preuve sera similaire mais en considérant $J = [x_0, x_0 + \eta]$ ou $J = [x_0 - \eta, x_0]$). f est localement intégrable sur I , donc elle est intégrable sur J . En particulier, elle est bornée sur J . On note

$$M = \sup_{x \in J} |f(x)|$$

On calcule ensuite, pour $x \in J$

$$|F_a(x) - F_a(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq \left(\sup_{t \in [x_0, x]} |f| \right) |x - x_0| \leq M|x - x_0|$$

car $[x_0, x] \subset J$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F_a(x) = F_a(x_0),$$

donc F_a est continue en x_0 . (En fait, on a montré que F_a est Lipschitzienne au voisinage de x_0 , donc que F_a est localement Lipschitzienne.) $\square$

REMARQUE 2.10 : Ce théorème est une première illustration du fait que l'intégrale augmente la régularité. Ainsi, il suffit que f soit Riemann-intégrable (par exemple continue par morceaux ou en escaliers) pour que $x \mapsto F_a(x)$ soit continue.

THÉORÈME 2.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ localement intégrable et $a \in I$. Si f admet une limite à droite en $x_0 \in I$, notée $f(x_0^+)$ alors F_a admet une dérivée à droite en x_0 qui vaut $f(x_0^+)$. Si f admet une limite à gauche en $x_0 \in I$, notée $f(x_0^-)$ alors F_a admet une dérivée à gauche en x_0 , qui vaut $f(x_0^-)$.

Démonstration. Supposons que f admette une limite à droite en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que

$$x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0^+)| \leq \varepsilon.$$

De plus, f est Riemann-intégrable sur $[x_0, x_0 + \eta]$ car localement intégrable. On a donc $F_a(x) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^x f$. D'autre part $f(x_0^+)$ est une constante, donc $\int_{x_0}^x f(x_0^+) = f(x_0^+)(x - x_0)$. Donc

$$|F_a(x) - F_a(x_0) - f(x_0^+)(x - x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f - \int_{x_0}^x f(x_0^+) \right| = \left| \int_{x_0}^x (f - f(x_0^+)) \right| \leq \varepsilon |x - x_0|. \quad (2.1)$$

On a donc, pour $x_0 < x < x_0 + \eta$

$$\left| \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0^+) \right| \leq \varepsilon.$$

Donc F_a admet une dérivée à droite qui vaut $f(x_0^+)$. $\square$

COROLLAIRE 2.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ localement intégrable et $a \in I$.

1. Si f est continue en x_0 , alors F_a est dérivable en x_0 avec $F'_a(x_0) = f(x_0)$.
2. Si f est continue sur I (c'est à dire de classe $\mathcal{C}^0$), alors F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

DÉFINITION 2.11: PRIMITIVE

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$, dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

PROPOSITION 2.21

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ admet une primitive F , alors elle admet une infinité de primitives, qui sont toutes de la forme $F + c$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Pour tout $c \in \mathbb{K}$, on a $(F + c)' = F' = f$, donc $F + c$ est une primitive de f . Soit G une primitive de f . On a pour tout $t \in I$, $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc $(F - G)' = 0$ sur I , donc $F - G = c$ avec $c \in \mathbb{K}$. $\square$

COROLLAIRE 2.2

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ admet une primitive F , alors pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, f admet une unique primitive G telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration. Il suffit de prendre $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$. □

THÉORÈME 2.6: THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. Alors

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration. C'est la conséquence directe du Théorème 2.5 et du Corollaire 2.1. On vérifie de plus que $F_a(a) = 0$. □



L'hypothèse de continuité est essentielle. Si f est seulement continue par morceaux sans être continue, alors il existe x_0 tel que la limite à gauche et à droite de f en x_0 ne coïncident pas. Donc, d'après le Théorème 2.5, F_a n'est pas dérivable en x_0 , et n'est donc **pas** une primitive de f .

COROLLAIRE 2.3

- ⊙ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue et soit F une primitive de f . Alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$
- ⊙ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$

Le théorème fondamental de l'analyse relie deux notions a priori très différentes : l'intégrale, associée à l'aire sous une courbe, et la primitive, opération inverse de la dérivée. On peut ainsi calculer l'intégrale d'une fonction si on connaît une primitive. Reste donc à savoir calculer celle-ci.

2.5. Calcul de primitives



1. Pour une fonction F on note

$$[F]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

appelé crochet d'intégration. En particulier on a $[F]_a^a = 0$, $[F]_a^b = -[F]_b^a$. Et si F est une primitive de f avec f continue on a $\int_a^b f = [F]_a^b$.

2. Pour une fonction continue f , on notera

$$\int f(x) dx$$

une primitive quelconque de f . Explicitement, on a $\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.

3. On rappelle que la variable d'une intégrale est muette $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt \dots$

Les dérivées des fonctions usuelles nous permettent déjà de connaître de nombreuses primitives. Par exemple

$$\int \exp(x) dx = \exp(x), \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x), \dots$$

Une liste de primitives des fonctions usuelles est donnée en Annexe A. Ensuite, la linéarité de l'intégrale permet de calculer une primitive de toute combinaison linéaire de fonctions usuelles.

2.5.1 Intégration par parties

PROPOSITION 2.22: FORMULE D'INTÉGRATION PAR PARTIES (IPP)

Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $[a, b] \subset I$. Alors

$$\int_a^b uv' = - \int_a^b u'v + [uv]_a^b.$$

Démonstration. Le produit uv est de classe $\mathcal{C}^1$, on utilise donc le Corollaire 2.3 et la règle de dérivation du produit :

$$[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

□

Dans un calcul de primitive, cette formule s'écrit

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

EXEMPLE 2.5 : 1. Sur $I =]0, +\infty[$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$ on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$, donc

$$\int \ln(x)dx = x \ln(x) - \int \frac{x}{x}dx = x \ln x - x$$

2. Sur $I = \mathbb{R}$ avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$ donc

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x) = [x \cos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(x))dx = 0 - 0 + [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

THÉORÈME 2.7: FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n , avec H_n l'énoncé de la proposition.

Initialisation. Pour $n = 0$, f est $\mathcal{C}^1$ et d'après le Corollaire 2.3 on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx,$$

ce qui correspond à H_0 .

Hérédité. Soit $n \leq 1$ tel que H_{n-1} est vraie, et montrons H_n . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. En particulier f est $\mathcal{C}^n$, on peut donc utiliser H_{n-1} :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx.$$

On effectue ensuite une intégration par parties sur le deuxième terme. On pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} & \Rightarrow & \quad u(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} \\ v(x) &= f^{(n)}(x) & v'(x) &= f^{(n+1)}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx &= \left[-\frac{(b-x)^n}{n!} \right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \\ &= -0 + \frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx.\end{aligned}$$

En rassemblant tous les termes on obtient la formule pour H_n . □

REMARQUE 2.11 : La formule de Taylor avec reste intégral permet de redémontrer les formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange vues au chapitre précédent.

2.5.2 Changement de variable

THÉORÈME 2.8: CHANGEMENT DE VARIABLE

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $\phi : J \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$ on a

$$\int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt.$$

Démonstration. f est continue donc elle admet une primitive, que l'on note F . On a, d'une part,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

D'autre part, puisque $F' = f$, on a par composition $(F \circ \phi)'(u) = \phi'(u) F'(\phi(u)) = \phi'(u) f(\phi(u))$. Donc

$$\int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_a^b (F \circ \phi)'(x) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

□

Ce théorème est la simple conséquence de la dérivée des fonctions composées, mais il a de nombreuses applications.

⊙ Reconnaître une dérivée composée.

EXEMPLE 2.6 : Avec $\phi(x) = \sin(x)$ et $f(x) = x^2$ on a

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin^2(x) dx = \int_0^{\pi/2} \phi'(x) (\phi(x))^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3(x))' dx = \frac{1}{3} \left(\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0) \right) = \frac{1}{3}$$

On pourra ainsi reconnaître les dérivées composées des fonctions usuelles : $(\sin(u))' = u' \cos(u)$,

$(\cos(u))' = -u' \sin(u)$, $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$, ... Si jamais on ne reconnaît pas de dérivée composée, on peut simplement poser $t = \phi(x)$. On en déduit $dt = \phi'(x) dx$ et on utilise la formule du changement de variable.

EXEMPLE 2.7 : Calculons une primitive suivante en posant $t = e^x$, donc $dt = e^x dx$:

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan(t) + C = \arctan(e^x) + C$$

⊙ Changement de variable inverse. On lit la formule « dans l'autre sens », pour transformer certaines expressions. Dans ce cas, on suppose de plus que ϕ' ne s'annule pas sur l'intervalle considéré, de sorte que $\phi : I \rightarrow J$ est une bijection. En lisant la formule du théorème précédent de droite à gauche, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

En pratique, on pose $t = \phi(x)$, on en déduit (formellement) $dt = \phi'(x) dx$. On vérifie que ϕ' ne s'annule pas, donc que ϕ est une bijection et on en déduit l'image réciproque de a et b . On remplace alors t , dt et les bornes de l'intégrale comme dans la formule ci-dessus.

EXEMPLE 2.8 : Calculons

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

On pose $t = \phi(x) = \sin(x)$, donc $dt = \cos(x)dx$. De plus, $\phi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-1, 1[$ satisfait $\phi'(x) = \cos(x) \neq 0$ est donc une bijection. On a donc, par changement de variables

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cos(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)| \cos(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx$$

On utilise ensuite le fait que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, de sorte que

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Notons que la courbe associée à $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est un demi-cercle de rayon 1 et on vérifie que I est bien l'aire du demi-disque correspondant.

- ⊙ Enfin, on peut aussi poser $x = \phi(t)$ avec ϕ' qui ne s'annule pas. On a donc $x = \phi^{-1}(t)$ avec $(\phi^{-1})'(t) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(t))}$, de sorte que

$$\int_a^b g(\phi(x)) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \frac{g(t)}{\phi'(\phi^{-1}(t))} dt.$$

EXEMPLE 2.9 :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})} dx$$

- ⊙ **Changement de variable affine.** On pose $t = \phi(x) = \alpha x + \beta$, souvent pour démontrer certaines propriétés sans calculer l'intégrale. On a ainsi, pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+t_0}^{b+t_0} f(t-t_0) dt, \quad \int_a^b f(t) dt = \alpha \int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(\alpha t) dt.$$

Enfin, en posant $t = a + (b-a)x$, on peut toujours se ramener à une intégrale entre 0 et 1.

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx.$$

Par exemple le reste intégral de la formule de Taylor du Théorème 2.7 peut se réécrire

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx = (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (b-a)u) du,$$

où l'on a posé $x = a + (b-a)u$, et utilisé le fait que $(b-x) = (b-a)(1-u)$.

PROPOSITION 2.23

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Si f est périodique de période T , alors $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$.
2. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
3. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Démonstration. 1. Si f est périodique, on pose $t = u - T$, soit $u = t + T$ et l'on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u-T) du = \int_{a+T}^{b+T} f(u) du.$$

2. Si f est paire, on utilise la relation de Chasles

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(-u)du + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(u)du + \int_0^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt,$$

où l'on a posé $t = -u$ dans la première intégrale.

3. Si f est impaire on procède de même, mais cette fois-ci on a

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = -\int_a^0 f(-u)du = -\int_0^a f(u)du,$$

donc la somme des deux termes est nulle. □

REMARQUE 2.12 : Si $t = \phi(x)$ avec ϕ une bijection strictement décroissante, alors $a < b$ donne $\phi^{-1}(a) > \phi^{-1}(b)$. On obtient un signe pour ré-ordonner les bornes de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx = -\int_{\phi^{-1}(b)}^{\phi^{-1}(a)} f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi^{-1}(b)}^{\phi^{-1}(a)} f(\phi(x))|\phi'(x)|dx$$

Cette formule reste vraie si ϕ est strictement croissante (en ordonnant les bornes dans l'ordre croissant). Une généralisation du facteur $|\phi'(x)|$ apparaîtra naturellement dans les intégrales multiples sous le nom de jacobien, noté J .

2.5.3 Fractions rationnelles

On rappelle que $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble a une structure d'anneau euclidien. Dans cette section, on énonce certains résultats (admis) d'arithmétique des polynômes que l'on va utiliser pour calculer des primitives de fractions rationnelles.

DÉFINITION 2.12: FRACTION RATIONNELLE

Une **fraction rationnelle** sur $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$. On définit le degré d'une fraction rationnelle par $\deg(R) = \deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z}$. On note par $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 2.24

Une fraction rationnelle $R \in \mathbb{K}(X)$ se décompose de manière unique par

$$R(X) = \tilde{P}(X) + \tilde{R}(X)$$

avec $\tilde{P} \in \mathbb{K}[X]$ et $\tilde{R} \in \mathbb{K}(X)$ et $\deg(\tilde{R}) < 0$. Le polynôme $\tilde{P}$ est appelé **partie entière** de R .

Il s'agit d'une application la division Euclidienne sur les polynômes. Avec $R = \frac{P}{Q}$, on écrit la division de P par Q dans $\mathbb{K}[X]$: $P(X) = Q\tilde{P} + B$ avec $\deg(B) < \deg(Q)$ ($\tilde{P}$ est le quotient et B est le reste). On a ensuite $R = \tilde{P} + \frac{B}{Q}$. L'algorithme pour trouver $\tilde{P}$ et $\tilde{R}$ est le même que pour les entiers.

EXEMPLE 2.10 : Décomposons la fraction rationnelle de degré 1

$$R(X) = \frac{3X^3 + 4X^2 - 5}{X^2 + 1}.$$

On écrit la division polynomiale

$$\begin{array}{r} 3X^3 + 4X^2 \quad -5 \quad | \quad X^2 + 1 \\ -3X^3 \quad \quad -3X \quad \quad \quad | \quad 3X + 4 \\ \hline 4X^2 - 3X - 5 \\ -4X^2 \quad \quad -4 \\ \hline -3X - 9 \end{array}$$

On en déduit $3X^3 + 4X^2 - 5 = (X^2 + 1)(3X + 4) - 3X - 9$, donc

$$R(X) = 3X + 4 + \frac{-3X - 9}{X^2 + 1}.$$

On vérifie que $R(X) - (3X + 4)$ est bien de degré strictement négatif.

Grâce à la proposition précédente, calculer une primitive d'une fraction rationnelle quelconque revient au calcul d'une primitive d'un polynôme et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif. On va donc se concentrer sur l'étude de ces dernières.

THÉORÈME 2.9: DÉCOMPOSITION EN POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ se décompose de façon unique en produit de polynômes irréductibles :

$$P(X) = \lambda P_1(X)^{m_1} \dots P_k(X)^{m_k}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $m_1 \deg(P_1) + \dots + m_k \deg(P_k) = \deg(P)$. Les entiers $m_i \in \mathbb{N}$ sont appelés multiplicité des P_i . Les polynômes irréductibles dépendent du corps $\mathbb{K}$:

- ⊙ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $P_i(X) = X - \alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
- ⊙ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a $P_i(X) = X - \alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (première espèce) ou $P_i = a_i X^2 + b_i X + c_i$ avec $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $\Delta = b_i^2 - 4a_i c_i < 0$ (deuxième espèce).

Cette décomposition est unique si on impose que le coefficient dominant de chaque P_i est égal à 1.

REMARQUE 2.13 : Les polynômes irréductibles sont l'analogue des nombres premiers pour les polynômes. La simplicité des polynômes irréductible sur $\mathbb{C}$ vient du fait que c'est un corps algébriquement clos (Théorème de d'Alembert-Gauss). De plus, les α_i sont les racines (complexes ou réelles) de P et les m_i correspondent à la multiplicité des racines. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les polynômes de deuxième espèce n'ont pas de racines réelles, et leurs racines complexes $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ apparaissent par paires conjuguées dans la décomposition de P .

EXEMPLE 2.11 : Le polynôme $P(X) = X^3 - 1$ se décompose sur $\mathbb{R}$:

$$P(X) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

et sur $\mathbb{C}$:

$$P(X) = (X - 1) \left(X - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(X - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)$$

THÉORÈME 2.10: DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR $\mathbb{C}$

Soit $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ avec $\deg(R) < 0$. On note

$$Q = \lambda (X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_k)^{m_k}$$

la décomposition de $Q \in \mathbb{C}[X]$ en polynômes irréductibles. Alors R se décompose de façon unique en une combinaison linéaire sur $\mathbb{C}$ des éléments simples suivants :

$$\frac{1}{(X - \alpha_i)^j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad 1 \leq j \leq m_i.$$

EXEMPLE 2.12 : Ce théorème nous donne la décomposition suivante sur $\mathbb{C}(X)$.

$$R(X) = \frac{X}{(X+1)(X-i)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Reste à trouver ces coefficients. En multipliant par $X+1$ on a

$$\frac{X}{(X-i)^2} = a + \frac{b(X+1)}{X-i} + \frac{c(X+1)}{(X-i)^2},$$

donc en prenant $X = -1$ on en déduit $a = \frac{-1}{(1+i)^2} = \frac{i}{2}$. De même avec $(X-i)^2$ et $X = i$ on a $c = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2}$. Enfin, on peut par exemple prendre $X = 0$ pour en déduire $a + ib - c = 0$, donc $b = i(a - c) = -\frac{i}{2}$. Finalement

$$\frac{X}{(X+1)(X-i)^2} = \frac{i}{2(X+1)} - \frac{i}{2(X-i)} + \frac{1+i}{2(X-i)^2}.$$

THÉORÈME 2.11: DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR $\mathbb{R}$

Soit $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ avec $\deg(R) < 0$. On note

$$Q = \lambda P_1^{m_1} \dots P_k^{m_k}$$

la décomposition de $Q \in \mathbb{R}[X]$ en polynômes irréductibles. Alors R se décompose de façon unique en une combinaison linéaire sur $\mathbb{R}$ des éléments simples suivants :

- ⊙ $\frac{1}{(X - \alpha_i)^j}$ avec $1 \leq j \leq m_i$ si $P_i(X) = X - \alpha_i$
- ⊙ $\frac{X}{(X^2 + b_i X + c_i)^j}$ et $\frac{1}{(X^2 + b_i X + c_i)^j}$ avec $1 \leq j \leq m_i$ si $P_i(X) = X^2 + b_i X + c_i$ avec $b_i^2 - 4c_i < 0$.

EXEMPLE 2.13 : Sur $\mathbb{R}$ on a donc

$$\frac{X^2 + 5}{(X+1)^2(X^2 + X + 1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

En suivant l'exemple précédent, on peut en déduire $a = 4$, $b = 6$, $c = -4$ et $d = -5$.

Il ne reste plus qu'à savoir calculer une primitive des différents éléments simples qui apparaissent dans cette décomposition. **Les formules qui suivent ne sont pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement** sur un exemple concret. On retiendra surtout la méthode utilisée pour chaque élément simple et les différents cas possibles.

PROPOSITION 2.25

Soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln(|x-a|).$$

Démonstration. Notons que cette primitive est définie seulement si $(x-a)^{-1}$ est continue, donc sur $] -\infty, a[$ ou bien sur $]a, +\infty[$ (mais pas sur l'union des deux !). Pour $x > a$ on a

$$(\ln(x-a))' = \frac{1}{x-a}$$

Et pour $x < a$ on a

$$(\ln(a-x))' = -\frac{1}{a-x} = \frac{1}{x-a}.$$

□

PROPOSITION 2.26

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geq 2$, alors

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^n} dx = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}}$$

Démonstration.

$$\left(\frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}} \right)' = ((x - \alpha)^{-n+1})' = (-n+1)(x - \alpha)^{-n} = \frac{-n+1}{(x - \alpha)^n}.$$

□



La formule pour $n \geq 2$ est valable pour $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En revanche, le cas $n = 1$ n'est valable que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, car le logarithme complexe n'est pas défini sur $\mathbb{C}$ tout entier.

PROPOSITION 2.27

Soit $b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = b^2 - 4c < 0$, alors

$$\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right).$$

Démonstration. On se ramène à une primitive de $\frac{1}{1+t^2}$. On commence par écrire le polynôme sous une forme canonique

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = d \left(\left(\frac{x}{\sqrt{d}} + \frac{b}{2\sqrt{d}} \right)^2 + 1 \right)$$

où l'on a posé $d = c - \frac{b^2}{4} > 0$. On pose ensuite $t = \phi(x) = \frac{x}{\sqrt{d}} + \frac{b}{2\sqrt{d}}$. On a $\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{d}} \neq 0$ et $dt = \frac{1}{\sqrt{d}} dx$ donc $dx = \sqrt{d} dt$. D'où

$$\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx = \frac{1}{d} \int \frac{1}{t^2 + 1} \sqrt{d} dt = \frac{1}{\sqrt{d}} \arctan(t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{d}} + \frac{b}{2\sqrt{d}} \right).$$

□

Pour les éléments simples de seconde espèce avec un numérateur, on remarque d'abord que

$$\frac{\lambda X + \mu}{(X^2 + bX + c)^n} = \frac{\lambda}{2} \frac{2X + b}{(X^2 + bX + c)^n} + \frac{\mu - \frac{b\lambda}{2}}{(X^2 + bX + c)^n}.$$

Le deuxième terme a déjà été traité ci-dessus pour $n = 1$, on se restreint à l'étude du premier

PROPOSITION 2.28

Soit $b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = b^2 - 4c < 0$, alors

$$\int \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} dx = \ln(x^2 + bx + c),$$

et pour $n \geq 2$

$$\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^n} dx = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{n-1}}.$$

Démonstration. Laissée au lecteur. Il suffit de reconnaître des dérivées composées comme dans les Propositions 2.25 et 2.26. On remarquera aussi que $x^2 + bx + c > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Les primitives des deux types d'éléments simples restant, à savoir

$$\frac{1}{X - (a + ib)}, \quad \frac{1}{(x^2 + bx + c)^n},$$

seront traitées en exercice.

2.5.4 Polynômes trigonométriques

Un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\sin^p(x) \cos^q(x).$$

Pour trouver une primitive d'un tel terme, il existe une méthode générale qui marche toujours mais qui peut être un peu longue, et quelques raccourcis dans des cas particuliers.

- ⊙ Si $p = 1$ ou $q = 1$, on a une primitive simplement par dérivée composée. Par exemple

$$\int \sin(x) \cos^{2022}(x) dx = -\frac{1}{2023} \cos^{2023}(x)$$

- ⊙ Si p ou q est impair, on peut se ramener au cas précédent en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Par exemple

$$\cos^4(x) \sin^3(x) = \cos^4(x) \sin(x) \sin^2(x) = \cos^4(x) \sin(x) (1 - \cos^2(x)) = \cos^4(x) \sin(x) - \cos^6(x) \sin(x).$$

- ⊙ Sinon, on utilise les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

pour **linéariser** l'expression. C'est à dire exprimer $\sin^p(x) \cos^q(x)$ comme une combinaison linéaire de $\cos(a_i x)$ et $\sin(b_i x)$, dont on connaît des primitives.

EXEMPLE 2.14 : Calculons une primitive de $\cos^3(x)$.

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 6\cos(x)) \\ &= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\int \cos^3(x) dx = \frac{1}{12} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x).$$

2.6. Sommes de Riemann

DÉFINITION 2.13: SUBDIVISION POINTÉE

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **subdivision pointée** de $[a, b]$ la donnée (σ, ξ) où

- ⊙ $\sigma = (a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b)$ est une subdivision de $[a, b]$,
- ⊙ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est un ensemble de points tel que

$$\xi_i \in [a_{i-1}, a_i], \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On appelle **pas de la subdivision** σ la quantité $\delta(\sigma) = \max_i \{a_i - a_{i-1}\}$.

DÉFINITION 2.14: SOMME DE RIEMANN

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et (σ, ξ) une subdivision pointée de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann de f pour la subdivision pointée (σ, ξ) la quantité

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i).$$

THÉORÈME 2.12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est Riemann-intégrable alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (\sigma, \xi) \text{ subdivision pointée, } \delta(\sigma) \leq \eta \Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tel que $|f - \phi| \leq \psi$ et $\int_a^b \psi \leq \varepsilon$. Soit $(x_0, \dots, x_k)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à ϕ et ψ . En particulier, ϕ et ψ sont constantes sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$. Soit (σ, ξ) une subdivision pointée de $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) - \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\xi_i) - \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(\xi_i) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx \end{aligned}$$

Pour chaque $i = 1, \dots, n$ on distingue deux cas :

1. Si aucun des x_i n'est dans $[a_{i-1}, a_i]$, alors ϕ et ψ sont constantes et l'on a $\phi(x) = \phi(\xi_i)$ et $\psi(x) = \psi(\xi_i)$ pour tout $x \in [a_{i-1}, a_i]$. Dans ce cas,

$$|f(\xi_i) - f(x)| = |f(\xi_i) - \phi(x) + \phi(x) - f(x)| \leq |f(\xi_i) - \phi(\xi_i)| + |\phi(x) - f(x)| \leq \psi(\xi_i) + \psi(x) \leq 2\psi(x),$$

donc

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2\psi(x) dx$$

2. Si au moins un $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ alors on majore simplement par

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i)| + |f(x)| dx \leq (a_i - a_{i-1}) 2M \leq 2M\delta(\sigma)$$

où $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Notons que le second cas apparaît au plus $k + 1$ fois car on a $k + 1$ points $x_0, \dots, x_k$. On scinde donc la somme en deux

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx &= \sum_{\substack{i=1 \\ \text{Cas 1}}}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx + \sum_{\substack{i=1 \\ \text{Cas 2}}}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f(x)| dx \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ \text{Cas 1}}}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2\psi(x) + (k + 1) 2M\delta(\sigma) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2\psi(x) + (k + 1) 2M\delta(\sigma) \\ &\leq 2\varepsilon + (k + 1) 2M\delta(\sigma). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\int_{a_{i-1}}^{a_i} 2\psi(x) \geq 0$ pour supprimer « Cas 1 » dans la première somme. Finalement si on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{(k+1)2M}$ on a

$$\delta(\sigma) \leq \eta \Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

DÉFINITION 2.15: MÉTHODE DES RECTANGLES

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable. On considère pour $n \geq 2$, la subdivision σ donnée par

$$a_i = a + \frac{(b-a)}{n}i,$$

de pas constant $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

- ⊙ Si $\xi_i = a_{i-1}$, la somme de Riemann correspondante $S_n^G(f) = S(f, \sigma, \xi)$ est appelée **méthode des rectangles à gauche** et l'on a

$$S_n^G(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right).$$

- ⊙ Si $\xi_i = a_i$, la somme de Riemann correspondante $S_n^D(f) = S(f, \sigma, \xi)$ est appelée **méthode des rectangles à droite** et l'on a

$$S_n^D(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right).$$

Le théorème précédent nous dit que

$$S_n^G(f), S_n^D(f) \rightarrow \int_a^b f, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ces formules permettent un calcul numérique simple pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale.

EXEMPLE 2.15 : Le code Python suivant

```
def rectangles_gauche(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a
    S = 0
    for i in range(n):
        S += f(x)
        x += h
    return S * h

import numpy as np
print(rectangles_gauche(np.sin, 0, np.pi/2, 10))
```

renvoie $S_n^G(\sin) = 0.919, 0.992$ et 0.999 pour $n = 10, 100$ et 1000 , respectivement, ce qui correspond bien à l'approximation de $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1$.

Les sommes de Riemann sont aussi très utiles pour calculer certaines sommes infinies. En **reconnaissant une somme de Riemann**, on identifie ainsi la limite d'une somme comme une intégrale que l'on peut calculer à l'aide d'une primitive.

EXEMPLE 2.16 : On considère la suite

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$ continue pour $x \in [0, 1]$ on a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à f , $a = 0$, $b = 1$ et la subdivision pointée

$$\sigma = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1), \quad \xi_i = \frac{i}{n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

c'est à dire $u_n = S(f, \sigma, \xi)$ (en fait on a même $u_n = S_n^D(f)$). Le pas de la subdivision est $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, donc d'après le Théorème 2.12 on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^1 f(x) dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



Objectifs :

- Caractériser une équation différentielle (ordre, linéaire, homogène,...)
- Équations à variables séparables
- Équations linéaires d'ordre 1 et 2
- Équations de Bernoulli et Riccati

Motivation : les équations différentielles sont partout !

Les équations différentielles permettent de traduire dans le langage mathématique l'évolution dans le temps et dans l'espace de n'importe quel phénomène quantitatif qui évolue de façon continue. On trouve des équations différentielles dans toutes les sciences : physique, chimie, biologie, géologie, économie,...

EXEMPLE 3.1 : Voici quelques exemples issus de la physique. On rappelle que pour une grandeur $x(t)$, on note sa vitesse $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$ et son accélération $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t)$.

- L'équation de la position $x(t)$ d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k :

$$m\ddot{x} = -kx \quad (3.1)$$

- L'équation du pendule simple : angle $\theta(t)$ d'une masse m accrochée à un fil de longueur ℓ soumis à la gravité g :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0 \quad (3.2)$$

- L'équation de la vitesse $v(t)$ d'une masse m en chute libre soumise à un frottement f :

$$\dot{v} = g - \frac{f}{m}v \quad (3.3)$$

- L'équation de la tension $u(t)$ au borne d'un condensateur dans un circuit RLC (résistance R , impédance L et capacité C) soumis à une tension $E(t)$:

$$LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = E \quad (3.4)$$

- L'équation d'évolution du nombre de noyaux radioactifs $N(t)$, avec constante de désintégration λ :

$$\dot{N} = -\lambda N \quad (3.5)$$

On peut étudier les équations différentielles à différents niveaux. D'abord, on peut chercher une solution explicite par exemple à l'aide de fonctions usuelles. On parle alors de résolution explicite. Plus généralement, on peut ensuite se demander : quand est-ce qu'une solution existe et combien y en a-t-il ? quelles sont les conditions pour qu'il existe une unique solution ? quel est l'intervalle de temps maximal pour lequel cette solution existe ? Enfin, pour de nombreuses équations différentielles, il n'existe pas de solution explicite, mais on peut quand même étudier certaines propriétés des solutions (régularité, majoration, comportement asymptotique, etc...)

Le but de ce chapitre introductif est d'établir un cadre général et de définir certains termes pour caractériser les équations différentielles. On étudie ensuite quelques méthodes de résolution explicite, en s'appuyant sur certains théorèmes généraux qui sont admis, car leur preuve requiert des outils plus avancés qui seront vu dans les années d'étude ultérieures.

3.1. Généralités

DÉFINITION 3.1: ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Soit $n \geq 1$ entier. Une **équation différentielle d'ordre n** est une équation de la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad t \in I$$

avec $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $J \subset I$ un intervalle. Une **solution** de cette équation sur J est une fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\forall t \in J \quad F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

REMARQUE 3.1 : $\odot$ Si on ne précise pas I , c'est qu'on travaille avec $I = \mathbb{R}$, ou bien que préciser I fait partie de la résolution.

- $\odot$ On notera le plus souvent $y(t)$ avec y la fonction inconnue et t la variable, mais il existe d'autres conventions : $y(x)$, $x(t)$,...
- $\odot$ Ici on a $y : J \rightarrow \mathbb{R}$, on parle d'équation différentielle **scalaire**. Si on considère $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on parle de **système différentiel** (voir Section 3.3).

EXEMPLE 3.2 : On reprend l'exemple précédent : (3.1), (3.2), (3.4) sont des équations différentielles d'ordre 2, avec respectivement

$$F(t, x, x', x'') = mx'' - kx, \quad F(t, \theta, \theta', \theta'') = \theta'' + \frac{g}{\ell} \sin(\theta), \quad F(t, u, u', u'') = LCu'' + RCu' + u - E(t),$$

alors que (3.3) et (3.5) sont des équation différentielles d'ordre 1, avec respectivement

$$F(t, v, v') = v' - g + \frac{f}{m}v, \quad F(t, N, N') = N' + \lambda N.$$

DÉFINITION 3.2: FORME RÉSOLUE

Une équation différentielle est dite **sous forme résolue** si elle est de la forme

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

avec $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue, c'est à dire que $F(t, u_0, \dots, u_n) = u_n - f(t, u_0, \dots, u_n)$.



Il n'est pas toujours possible d'écrire une équation sous une forme résolue (problème de division par 0, radical,...) mais nous n'aborderons pas ce problème. La plupart des équations considérées ici sont déjà sous forme résolue.

Une équation différentielle admet parfois plusieurs solutions, mais en imposant des conditions sur la fonction (par exemple des conditions initiales) on peut rendre la solution unique. Un principe général, que l'on énoncera plus précisément plus loin, nous dit que pour une équation d'ordre n il faut n conditions initiales : une pour chaque dérivée de y à $t = 0$.

EXEMPLE 3.3 : $\odot$ Pour l'équation (3.3) de la chute libre sans frottements ($f=0$), d'ordre 1, on a une infinité de solutions données par

$$v(t) = gt + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Si l'on impose maintenant la condition initiale $v(0) = v_0$, on a une unique solution $v(t) = gt + v_0$.

- $\odot$ Pour l'équation (3.1) de la masse accrochée à un ressort, d'ordre 2, on a une infinité de solutions données par

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. En imposant les deux conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$ on a une unique solution :

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

DÉFINITION 3.3: PROBLÈME DE CAUCHY

Soit $t_0 \in I$ et $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle d'ordre n , munie de la condition initiale

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

est appelée **problème de Cauchy**.

REMARQUE 3.2 : En général, si on demande de résoudre une équation différentielle sans préciser de condition initiale, cela signifie qu'on demande de trouver toutes les solutions de celle-ci.

PROPOSITION 3.1: LIEN AVEC LES PRIMITIVES

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'équation différentielle d'ordre 1

$$y' = f(t)$$

admet une infinité de solutions sur I , données par les primitives de f , $y(t) = \int f(t)dt + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Une équation différentielle est donc une généralisation (très large) de la notion de primitive. De plus, les primitives vont jouer un rôle essentiel tout le long de ce chapitre.



Dans les équations différentielles, il est courant de ne pas écrire explicitement la variable pour la fonction et ses dérivées. Ainsi $y' = f(t)$ doit être compris comme $y'(t) = f(t)$. Dans le doute, on peut toujours écrire les dépendances temporelles partout où c'est nécessaire.

3.2. Équations à variables séparables

DÉFINITION 3.4: ÉQUATION À VARIABLES SÉPARABLES

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Une équation différentielle d'ordre 1 est dite à **variables séparables** si elle est de la forme

$$y' = f(t)g(y)$$

Si f est constante, on dit que cette équation est **autonome**.

PROPOSITION 3.2

On considère l'équation à variables séparables $y' = f(t)g(y)$.

1. Soit $z \in I$ tel que $g(z) = 0$, alors la fonction constante $y(t) = z$ est solution de l'équation.
2. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in]z_1, z_2[$. Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f et $\tilde{G} :]z_1, z_2[\rightarrow \mathbb{R}$

une primitive de $\frac{1}{g}$. Il existe un intervalle J tel que l'équation possède une infinité de solutions données par

$$y(t) = \tilde{G}^{-1}(F(t) + C)$$

avec $C \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in J$.

Démonstration. Pour le premier point, on vérifie que pour $y(t) = z$ on a bien $y'(t) = 0$ et $f(t)g(y(t)) = 0$. Dans le deuxième cas, puisque g ne s'annule pas sur $]z_1, z_2[$ on cherche à résoudre

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t).$$

Posons $u = \tilde{G}(y)$. Puisque $\tilde{G}$ est une primitive de $\frac{1}{g}$ on a $u' = y'\tilde{G}'(y) = \frac{y'}{g(y)}$. Donc si y est solution on a $u'(t) = f(t)$. Donc $u(t) = F(t) + C$, où F est une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$, soit $\tilde{G}(y) = F(t) + C$. De plus, la fonction $\frac{1}{g}$ ne s'annule pas sur $]z_1, z_2[$, donc sa primitive $\tilde{G}$ est strictement monotone sur $]z_1, z_2[$, et réalise donc une bijection entre $]z_1, z_2[$ et son image $\tilde{G}(]z_1, z_2[)$, de réciproque $\tilde{G}^{-1}$. Donc $y(t) = \tilde{G}^{-1}(F(t) + C)$ pour tout t tel que $F(t) + C \in \tilde{G}(]z_1, z_2[)$. $\square$

REMARQUE 3.3 : 1. Dans le cas autonome où $f(t) = t$, la solution est donnée par $y(t) = \tilde{G}^{-1}(ft + C)$.

2. La formule de la proposition ci-dessus n'est pas à connaître, seule la méthode compte. Pour s'en souvenir, on peut utiliser la notation intégrale. On part de $y' = f(t)g(y)$ et on considère J tel que $g(y(t))$ ne s'annule pas sur J (déterminé a posteriori). On a alors $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$, soit en intégrant de part et d'autre

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int f(t) dt.$$

On effectue le changement de variable $v = y(t)$ à gauche et l'on a $dv = y'(t)dt$ donc

$$\int \frac{1}{g(v)} dv = \int f(t) dt.$$

On a donc « séparé les variables » et on n'a plus qu'à calculer une primitive de f et de $\frac{1}{g}$, puis inverser la relation $\tilde{G}(y) = F(t) + C$. Notons que si $\tilde{G}^{-1}$ existe, elle n'est pas toujours explicite.

EXEMPLE 3.4 : On cherche à résoudre l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' = 2t\sqrt{1-y^2}$$

On remarque d'abord que $y = 1$ et $y = -1$ sont des solutions évidentes. Ensuite, soit J un intervalle tel que $\sqrt{1-y^2}$ ne s'annule pas sur J , c'est à dire que $y(t) \in]-1, 1[$ pour tout $t \in J$. On a alors

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2t.$$

Les variables sont séparées, on peut donc intégrer de part et d'autre. On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\arcsin(y(t)) = t^2 + C$ donc

$$y(t) = \sin(t^2 + C).$$

Cette solution est a priori définie sur J tel que $\sin(t^2 + C) \in]-1, 1[$, qui donne une infinité d'intervalles disjoints que l'on explicitera pas. En fait, on remarque que $y^2(t) = 1$ lorsque $t^2 + C = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, mais dans ce cas on a $y'(t) = 2\cos(t^2 + C) = 0$ pour ces points, donc y est encore solution de l'équation différentielle. Donc $J = \mathbb{R}$.

Remarque : Cette solution n'est pas unique. On peut aussi choisir J un intervalle où $\sin(t^2 + C) \in]-1, 1[$, puis recoller avec les fonction constantes $y = 1$ et $y = -1$ en dehors.



Toutes les équations d'ordre 1 ne sont pas à variables séparables. Par exemple $y' = y^2 + t$, n'est pas de la forme $y' = f(t)g(y)$. Même si on peut « séparer » y de t en écrivant $y' - y^2 = t$, le membre de gauche n'est pas une dérivée totale, on ne peut pas utiliser la primitive d'une fonction composée, et la méthode ci-dessus ne marche pas.

3.3. Équations différentielles linéaires

DÉFINITION 3.5: ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

Une équation différentielle est dite **linéaire** si elle est de la forme

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b \quad (3.6)$$

avec $a_0, \dots, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. De plus,

- ⊙ si $b = 0$, cette équation est dite **homogène**,
- ⊙ si $b \neq 0$, l'**équation homogène associée** à (3.6) est $a_n y^{(n)} + a_1 y' + \dots + a_0 y = 0$,
- ⊙ si les fonctions $a_0, \dots, a_n$ sont des constantes (et b quelconque), l'équation est dite à **coefficients constants**.

EXEMPLE 3.5 : Les équations différentielles (3.1), (3.3), (3.4) et (3.5) sont linéaires. L'équation du pendule simple (3.2) n'est pas linéaire. En revanche si on remplace $\sin(\theta)$ par θ , son équivalent en 0 (approximation des petites oscillations), cette équation devient aussi linéaire.

PROPOSITION 3.3: PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Si y_1 est solution de l'équation $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1$,
et y_2 est solution de l'équation $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$,
alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda b_1 + \mu b_2.$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En particulier toute combinaison linéaire de solutions d'une équation homogène est aussi solution de cette équation.

Démonstration. On utilise le fait que

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(n)} = \lambda y_1^{(n)} + \mu y_2^{(n)}$$

puis on calcule $a_n(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(n)} + \dots + a_1(\lambda y_1 + \mu y_2)' + a_0(\lambda y_1 + \mu y_2)$. On regroupe les termes et on utilise les deux hypothèses. $\square$

COROLLAIRE 3.1

Soit y_p une solution particulière de l'équation $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$. Alors l'ensemble des solutions de cette équation est de la forme $y_p + y_h$, où y_h est une solution de l'équation homogène associée.

Démonstration. Soit y_p une solution particulière et y une solution générale. On a

$$\begin{aligned} a_n y_g^{(n)} + \dots + a_1 y_g' + a_0 y_g &= b \\ a_n y_p^{(n)} + \dots + a_1 y_p' + a_0 y_p &= b \end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première, on en déduit que $y_g - y_p$ est solution de l'équation

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

c'est à dire l'équation homogène associée. Donc $y_g - y_p = y_h$. $\square$

REMARQUE 3.4 : Ces résultats nous disent que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel, et que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire non homogène est soit vide, soit un espace affine de même direction que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

3.3.1 Équations d'ordre 1

On s'intéresse ici à la résolution exacte de l'équation

$$y' = ay + b$$

avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

PROPOSITION 3.4: CAS HOMOGÈNE D'ORDRE 1

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$y(t) = C \exp(A(t))$$

avec $C \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I .

Démonstration. a est continue sur I , soit A une de ses primitives. Soit y une solution.

Posons $u(t) = y(t) \exp(-A(t))$, de sorte que

$$u'(t) = y'(t) \exp(-A(t)) - A'(t)y(t) \exp(-A(t)) = (y'(t) - a(t)y(t)) \exp(-A(t)) = 0$$

Donc $u(t) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$. $\square$

REMARQUE 3.5 : 1. Ce résultat nous donne **toutes** les solutions de l'équation homogène. On en a une infinité, données par différentes valeurs de $C \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1. Avec une condition initiale sur y , on peut fixer la constante C et la solution est unique.

2. Si $a(t) = a$ constante, on retrouve que $y(t) = Ce^{at}$ est solution de $y' = ay$.

PROPOSITION 3.5: CAS GÉNÉRAL D'ORDRE 1

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$y(t) = \left(C + \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s)) ds \right) \exp(A(t))$$

avec $t_0 \in I$, $C \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I .

Démonstration. D'après le Corollaire 3.1, l'ensemble des solutions est donné par $y_p + y_h$ où y_h est une solution de l'équation homogène associée, déjà donnée en Proposition 3.4 : $y_h(t) = C \exp(A(t))$ avec $C \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a . Il reste donc à trouver une seule solution particulière. Pour cela, on utilise une méthode appelée « variation de la constante » qui revient à dire que les constantes apparaissant dans l'équation homogène deviennent dépendante de t . On cherche donc $y_p(t) = c(t) \exp(A(t))$ ou $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. y_p est solution de l'équation $y' = ay + b$ si et seulement si

$$c' \exp(A) + cA' \exp(A) = ac \exp(A) + b$$

c'est à dire $c' \exp(A) = b$. On en déduit

$$c(t) = \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s)) ds$$

Donc y_p est une solution particulière, et $y = y_p + y_h$ donne le résultat. $\square$

REMARQUE 3.6 : La formule ci-dessus n'est pas à connaître par cœur, seule la méthode compte : on résout d'abord l'équation homogène associée puis on trouve une solution particulière par variation de la constante.

EXEMPLE 3.6 : Résolvons l'équation $y' + 2y = 1 + e^{-t}$. L'équation homogène associée est $y' + 2y = 0$, l'ensemble de ses solutions est $y_h(t) = Ce^{-2t}$ (attention au signe !). On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = c(t)e^{-2t}$, qui est solution si et seulement si

$$c'e^{-2t} - 2ce^{-2t} + 2ce^{-2t} = 1 + \exp(t),$$

c'est à dire $c'(t) = (1 + e^{-t})e^{2t} = e^{2t} + e^t$. Donc une solution particulière est

$$y_p(t) = \left(\frac{1}{2}e^{2t} + e^t\right)e^{-2t} = \left(\frac{1}{2} + e^{-t}\right)$$

et l'ensemble des solutions est

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + e^{-t}\right) + Ce^{-2t}$$

avec $C \in \mathbb{R}$, définie sur $t \in \mathbb{R}$.

COROLLAIRE 3.2

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay + b, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une unique solution y , définie sur I , donnée par la formule

$$\forall t \in I \quad y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s)) \, ds\right) \exp(A(t)),$$

où A est l'unique primitive de a sur I telle que $A(t_0) = 0$.

On verra dans la suite du cours que ce résultat d'existence et d'unicité se généralise pour les équations différentielles linéaires d'ordre n .

Jusqu'à présent, nous avons considéré des équations d'ordre 1 sous leur forme résolue, mais la Définition 3.5 est un peu plus générale, il reste donc un dernier cas à traiter.

DÉFINITION 3.6: RECOLLEMENT

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $ay' + by = c$ avec $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose que a s'annule en $t_0 \in I$ et que a ne s'annule pas pour $t \neq t_0$. De sorte que pour $t \neq t_0$, l'équation peut s'écrire sous sa forme résolue $y' + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$. Pour $t < t_0$, elle admet un ensemble de solutions y_1 et sur $t > t_0$, un ensemble de solutions y_2 . On parle de **recollement** lorsqu'il existe une solution de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I , qui coïncide avec y_1 sur $t < t_0$, avec y_2 sur $t > t_0$. En particulier il faut vérifier que

$$y_1(t_0) = y_2(t_0), \quad y_1'(t_0) = y_2'(t_0).$$

EXEMPLE 3.7 : On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1-t)y' - y = t.$$

On commence par la résoudre sur $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. Sur I_1 , une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est $-\ln(1-t)$ donc les solutions de l'équation homogène sont les

$$y_h(t) = C \exp(-\ln(1-t)) = \frac{C}{1-t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation non-homogène de la forme $y_p(t) = \frac{c(t)}{1-t}$; alors c doit vérifier $c'(t) = t$, donc $c(t) = \frac{t^2}{2}$ convient. Ainsi, les solutions de l'équation sur I_1 sont les

$$y_1(t) = \frac{\alpha + t^2}{2(1-t)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

De même, on trouve que les solutions sur I_2 sont les

$$y_2(t) = \frac{\beta + t^2}{2(1-t)}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution y sur $\mathbb{R}$; donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1, \\ \frac{\beta + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

On veut que y soit continue en 0; or $1-t \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$, donc nécessairement $\alpha + t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$ (car sinon y_1 n'aurait pas de limite finie en 1), d'où $\alpha = -1$. De manière similaire, on doit avoir $\beta = -1$. On a donc

$$\forall t \neq 1, \quad y(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{(1+t)}{2}.$$

On vérifie ensuite que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 , et qu'elle est solution de l'équation différentielle.

REMARQUE 3.7 : On remarque ici que le recollement est unique car toute autre valeur de α ou β fait exploser la solution en $t = 1$, mais on verra en exercice qu'il existe parfois une infinité de recollements possibles pour une équation donnée.

3.3.2 Équations de Bernoulli et Riccati

Les deux familles d'équations de cette section **ne sont pas linéaires**, mais on peut les résoudre en se ramenant au cas linéaire. Elles doivent leur nom aux mathématiciens suisse Jacques Bernoulli (1654-1705) et italien Jacopo Riccati (1676-1754).

DÉFINITION 3.7: EQUATION DE BERNOULLI

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Une **équation de Bernoulli** est une équation différentielle non-linéaire d'ordre 1 de la forme

$$y' = ay + by^\alpha.$$

Pour résoudre une telle équation, on se place sur un intervalle où $y > 0$ (déterminé à postériori). et on divise par y^α pour obtenir

$$y' y^{-\alpha} = ay^{1-\alpha} + b.$$

Si on pose $z = y^{1-\alpha}$, on obtient alors

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = az + b,$$

qui est une équation linéaire du premier ordre. Il faut bien sûr faire attention à l'intervalle sur lequel on travaille.

DÉFINITION 3.8: EQUATION DE RICCATI

Soit $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. une équation de Riccati est une équation différentielle non-linéaire d'ordre 1 de la forme

$$y' = ay^2 + by + c.$$

Supposons connue une solution particulière y_p de l'équation de Riccati, et cherchons une solution de cette équation de la forme $y = z + y_p$. Alors

$$z' + y_p' = az^2 + ay_p^2 + 2ay_pz + bz + by_p + c,$$

d'où l'on déduit

$$z' = az^2 + (2ay_p + b)z$$

puisque y_p est solution de l'équation de Riccati. Cette dernière équation est de type Bernoulli avec $\alpha = 2$, donc on procède au changement d'inconnue $w = \frac{1}{z}$ pour se ramener à l'équation linéaire du premier ordre

$$-w' = a + (2ay_p + b)w.$$

La partie la plus délicate de la résolution est de trouver une solution particulière y_p ; on peut commencer par en chercher une sous une forme simple (constante, polynomiale, etc.).

EXEMPLE 3.8 : On cherche des solutions de l'équation

$$ty' + y - ty^3 = 0.$$

Il s'agit d'une équation de Bernoulli. La fonction nulle est solution; on cherche une autre solution y . Sur un intervalle J où y ne s'annule pas, l'équation devient

$$t \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - t = 0.$$

De plus, on suppose J contenu dans un intervalle où $t \neq 0$ pour ne pas se poser la question du recollement des solutions, par exemple $J \subset I =]0, +\infty[$. On pose $z = \frac{1}{y^2}$; alors y est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si

$$-\frac{t}{2}z' + z - t = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto ct^2$, $c \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto 2t$ est une solution particulière de l'équation non-homogène, donc la solution générale est de la forme $z : t \mapsto 2t + ct^2$. Par définition z prend des valeurs strictement positives sur J ; c'est toujours le cas lorsque $c \geq 0$, mais lorsque $c < 0$ il est nécessaire d'avoir $t < -\frac{2}{c}$. Finalement, la fonction définie par

$$\begin{aligned} \odot \quad & \text{si } c < 0 : \forall t \in]0, -\frac{2}{c}[, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}, \\ \odot \quad & \text{si } c > 0 : \forall t \in]0, +\infty[, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}, \end{aligned}$$

est une solution de l'équation.

REMARQUE 3.8 : Les méthodes ci-dessus permettent de trouver une ou plusieurs solutions, mais ne dit rien sur l'ensemble des solutions.

3.3.3 Systèmes différentiels linéaires

Les équations différentielles considérées jusqu'ici étaient scalaires, c'est à dire que l'inconnue y est à valeur dans $\mathbb{R}$. On peut généraliser au cas où l'inconnue Y est à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 3.9: SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

Soit $n \geq 1$ entier. Un **système différentiel linéaire du premier ordre** de taille n est une équation différentielle de la forme

$$Y' = AY + B$$

où $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des fonctions continues, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$. Une **solution** de ce système est une fonction $Z : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : pour tout $t \in I$, $Z'(t) = A(t)Z(t) + B(t)$.

Dans cette définition, on dit qu'une fonction à valeurs matricielles est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) si et seulement si toutes les fonctions coefficients sont continues (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$).

EXEMPLE 3.9 : Le système suivant est un système différentiel linéaire du premier ordre de taille 3

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + 2y_3 + b_1 \\ y_2' = ay_2 + y_3 + b_2 \\ y_3' = cy_1 + 3y_2 + dy_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ a(t) & 0 & 1 \\ c(t) & 3 & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 3.6

L'équation différentielle linéaire d'ordre n

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ est équivalente au système différentiel linéaire d'ordre 1 de taille n :

$$Y' = AY + B, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire chaque ligne du système matriciel. Les $n - 1$ première lignes donnent $y^{(k)} = y^{(k)}$ pour $k = 1, \dots, n - 1$ et la dernière ligne donne l'équation d'ordre n . $\square$

Ainsi, toute équation d'ordre n se ramène à un système d'ordre 1 et de taille n . Le théorème qui suit est fondamental et doit son nom aux mathématiciens français Augustin Louis Cauchy (1789-1857) et allemand Rudolf Lipschitz (1832-1903). Il existe en fait une version bien plus générale, qui va au delà du cas linéaire, mais que l'on abordera pas ici.

THÉORÈME 3.1: THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINÉAIRE

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ continues, $t_0 \in I$ et $Y_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors le système différentiel linéaire

$$Y' = AY + B \tag{3.7}$$

admet une unique solution $Y : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Y(t_0) = Y_0$.

Démonstration. Admise (nécessite des connaissances provenant de cours ultérieurs). $\square$

Le principe de superposition s'applique aussi aux systèmes différentiels linéaires.

COROLLAIRE 3.3

L'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est un espace vectoriel de dimension n . L'ensemble des solutions de (3.7) est un espace affine de dimension n .

REMARQUE 3.9 : Ainsi, résoudre un système d'ordre 1 de taille n revient à trouver n solutions indépendantes du système homogène et une solution particulière. Une version matricielle de la méthode de variation de la constante existe pour trouver une solution particulière, mais il n'existe pas de formule générale pour trouver l'ensemble des solutions homogènes, sauf si A est à coefficients constants. Même dans ce cas, l'expression des solutions requiert des notions d'algèbre linéaire (réduction des endomorphismes et exponentielle de matrice) qui seront vus dans des cours ultérieurs.

On peut quand même résoudre certains systèmes « à la main », par exemple si A est échelonnée on peut remonter le système en résolvant des équations scalaires d'ordre 1. Par exemple, on peut en principe résoudre

$$\begin{cases} x' = (1 + t^2)x + 2y + z + \sin(t), \\ y' = ty + 3z, \\ z' = \cos(t). \end{cases}$$

avec les méthodes des sections précédentes.

COROLLAIRE 3.4

Soient $t_0 \in I$ et $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b, \\ y(t_0) = y_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution y , définie sur I .

Démonstration. C'est la conséquence directe du Théorème 3.1 et de la Proposition 3.6 □

3.3.4 Équations d'ordre supérieur

On s'intéresse dans cette section à l'équation différentielle linéaire d'ordre n à **coefficients constants** :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

PROPOSITION 3.7: ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(t) = e^{\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle homogène

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ si et seulement si λ est solution de l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Le polynôme P est appelé polynôme caractéristique.

Démonstration. On a $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$ pour tout $k \geq 1$. En remplaçant dans l'équation homogène on a

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \Leftrightarrow (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

et on en déduit l'équation caractéristique car $e^{\lambda t} \neq 0$. □



L'équation caractéristique revient à remplacer $y^{(k)}$ par λ^k pour $k \geq 1$ et $y = y^{(0)}$ par $1 = \lambda^0$. De plus on fera attention aux différents signes selon la forme de l'équation différentielle. Par exemple, l'équation caractéristique associée à $y'' = 2y' - 3y$ est $r^2 - 2r + 3 = 0$. Dans le doute, on peut toujours repartir de $y(t) = e^{\lambda t}$ et remplacer dans l'équation différentielle.

Ainsi, chaque racine du polynôme caractéristique P fournit une solution homogène. Si P est scindé à racines simples, on a donc n solutions indépendantes, c'est à dire une base de l'ensemble des solutions. Cependant P , peut avoir des racines multiples, ou des racines complexes. On se concentre d'abord sur le cas $n = 2$ qui contient déjà toutes ces subtilités, avant d'énoncer le résultat à l'ordre n .

THÉORÈME 3.2: SOLUTIONS HOMOGÈNES À L'ORDRE 2

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ est donnée par

$$y_h(t) = Ay_1(t) + By_2(t),$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ et y_1, y_2 dépendent des racines λ_1, λ_2 du polynôme caractéristique $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$.
2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$.
3. Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, alors $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Démonstration. 1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sont solutions de l'équation homogène d'après la Proposition 3.7. De plus, ces deux solutions sont indépendantes si $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En effet, soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tel que $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$. En prenant la valeur en $t = 0$ de cette équation et de sa dérivée on en déduit

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0 \end{cases}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$.

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_2 t}$, il faut donc trouver une deuxième solution indépendante. Vérifions que $y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ est aussi solution. En dérivant deux fois on a

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + b(\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t} + cte^{\lambda_1 t} \\ &= ((a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)t + 2a\lambda_1 + b) e^{\lambda_1 t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a utilisé l'équation caractéristique et le fait que si λ_1 est une racine double de P alors $P'(\lambda_1) = 2a\lambda_1 + b = 0$. Enfin, y_1 et y_2 sont indépendantes car $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ implique que $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$ (prendre $t = 0$).

3. Si λ_1 et λ_2 sont complexes et conjuguées, alors $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ sont solutions indépendante de l'équation homogène, mais ne sont pas à valeurs réelles. Cependant, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire des deux. On pose donc

$$y_1(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad y_2(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 t}) = e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

et on obtient deux solutions indépendantes à valeurs réelles. □

EXEMPLE 3.10 : L'équation différentielle homogène d'ordre 2

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

a pour polynôme caractéristique est $P = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$, donc les fonctions $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = e^{3t}$ forment une base de l'espace des solutions de l'équation homogène, et la solution générale s'écrit

$$y_h(t) = Ae^t + Be^{3t}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.3: SOLUTIONS HOMOGÈNES À L'ORDRE n

'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ est donnée par les combinaisons linéaires (réelles) des fonctions générée par les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$.

1. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ racine de P de multiplicité $m \geq 1$, on a les m fonctions indépendantes $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ avec $k = 0, \dots, m - 1$.

2. Pour chaque paire $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ racine de P de multiplicité $m \geq 1$, on a les $2m$ fonctions indépendantes

$$t \mapsto t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad t \mapsto t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

pour $k = 0, \dots, m-1$ et avec $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de ces fonction constitue une base des solutions de l'équation homogène.

Démonstration. Admise. □

PROPOSITION 3.8: VARIATION DE LA CONSTANCE

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose connue une base $y_1, \dots, y_n$ des solutions de l'équation homogène associée. Alors une solution particulière est donnée par

$$y_p = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 qui vérifient

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On réécrit l'équation d'ordre n sous la forme d'un système d'ordre 1 mais de taille n , $Y' = AY + B$, donné en Proposition 3.6. Les solutions de l'équation homogène $y_1, \dots, y_n$ génèrent $Y_1, \dots, Y_n : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$, des solutions du système homogène $Y' = AY$. On pose $Y_p = \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_n Y_n$. Explicitement, on a

$$Y_p = \alpha_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

C'est une solution du système différentiel si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i' Y_i + \alpha_i Y_i') = \sum_{i=1}^n \alpha_i A Y_i + B$$

Puisque Y_i est solution du système homogène on a, par linéarité, $\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i' = \sum_{i=1}^n \alpha_i A Y_i$. Donc Y_p est solution si et

seulement si $\sum_{i=1}^n \alpha_i' Y_i = B$. C'est une équation vectorielle, qui contient n lignes. Pour chacune d'elles on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1' y_1 + \dots + \alpha_n' y_n = 0 \\ \alpha_1' y_1' + \dots + \alpha_n' y_n' = 0 \\ \dots \\ \alpha_1' y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n' y_n^{(n-1)} = b \end{cases},$$

que l'on peut récrire sous forme matricielle. On obtient l'énoncé de la proposition. □

EXEMPLE 3.11 : On reprend l'exemple précédent et on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = (2t + 1)e^{-t}.$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = e^{3t}$. On pose donc $y_p = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, et on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (2t + 1)e^{-t} \end{pmatrix},$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \alpha_1' y_1 + \alpha_2' y_2 = 0, \\ \alpha_1' y_1' + \alpha_2' y_2' = (2t + 1)e^{-t}. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)e^t + \alpha_2'(t)e^{3t} = 0, \\ \alpha_1'(t)e^t + 3\alpha_2'(t)e^{3t} = (2t + 1)e^{-t}. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation à la seconde, on trouve

$$\alpha_2'(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) e^{-4t} \quad \text{puis} \quad \alpha_1'(t) = -\left(t + \frac{1}{2}\right) e^{-2t}.$$

En intégrant, on obtient

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{16} (4t + 3) e^{-4t}, \quad \alpha_1(t) = \frac{1}{2} (t + 1) e^{-2t}$$

et on trouve finalement

$$y_p(t) = \frac{1}{2} (t + 1) e^{-t} - \frac{1}{16} (4t + 3) e^{-t} = \left(\frac{1}{4}t + \frac{5}{16}\right) e^{-t},$$

Finalement, on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y : t \mapsto Ae^t + Be^{3t} + \left(\frac{1}{4}t + \frac{5}{16}\right) e^{-t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$



Objectifs :

- Maîtriser la terminologie des séries (convergence, divergence,...)
- Connaître les critères de convergence
- Identifier les séries classiques (géométrique, harmonique, de Riemann,...)

Motivation

Le but des séries est de donner un sens mathématique aux sommes contenant une infinité de termes. Dans certains cas, la réponse est évidente, par exemple $1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$. À l'inverse, il y a des cas où une somme infinie peut donner un nombre fini. Par exemple, on va montrer l'identité suivante sur la série géométrique :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 2$$

Dans d'autres cas, la réponse n'est pas claire. Quel sens donner à $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$? Est-ce que la somme suivante est finie : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$?

Dans ce chapitre, on étudie les *séries numériques*, c'est à dire que les termes de la série sont des nombres (réels ou complexes), qui repose sur la théorie des suites numériques. Dans les années d'études supérieures, on généralisera ces notions aux séries de fonctions, notamment les séries entières et les séries de Fourier.

4.1. Terminologie, convergence, divergence

Dans tout ce chapitre on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 4.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ou complexes. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est appelée **série de terme général** u_n et u_n est appelée le **terme général** de la série. On dit que la série converge (ou est convergente, abrégé CV) si la suite S_n admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Sinon on dit que la série diverge (ou est divergente, abrégé DV). La suite (S_n) s'appelle aussi la **suite des sommes partielles**.



On note $\sum u_n$ pour abréger « la série de terme général u_n ». Si la série converge, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite de la suite S_n .



On distinguera bien la série $\sum u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de la limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in \mathbb{K}$. La première existe toujours alors que l'on ne peut écrire la deuxième seulement si la série converge.

REMARQUE 4.1 : Si le terme général est indexé par $n \geq n_0$ on adapte les notations : $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ et la limite, si elle existe, devient $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

PROPOSITION 4.1: SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

Soit $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$, de terme général $u_n = q^n$ (suite géométrique de raison q), est appelée **série géométrique**. Elle est convergente si et seulement si $|q| < 1$, auquel cas on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Si $q = 1$ on a $S_n = 1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1$ et la série diverge. Supposons $|q| < 1$ On a $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ et donc

$$qS_n = q(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

La différence des deux nous donne $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$, donc pour $q \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Puisque $|q| < 1$ on a $q^{n+1} \rightarrow 0$ car $|q^{n+1}| = |q|^{n+1}$. Donc $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Supposons maintenant $|q| \geq 1$ et supposons par l'absurde que la série est convergente. On a donc $S_n \rightarrow \ell$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De même, $S_{n+1} \rightarrow \ell$, donc $S_{n+1} - S_n \rightarrow 0$. Or $S_{n+1} - S_n = q^{n+1}$ avec $|q| \geq 1$, donc q^{n+1} ne tend pas vers 0 et l'on a une contradiction. $\square$

EXEMPLE 4.1 : Avec $q = \frac{1}{2}$ on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

PROPOSITION 4.2

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Démonstration. On reprend la preuve de la proposition précédente. On considère $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Si la série converge, alors $S_n \rightarrow \ell$, $S_{n-1} \rightarrow \ell$ et donc $S_n - S_{n-1} = u_n \rightarrow \ell - \ell = 0$. $\square$

COROLLAIRE 4.1

Par contraposée, si u_n ne tend pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ est divergente. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.

EXEMPLE 4.2 : Avec $u_n = (-1)^n$ on a $S_n = 0$ si n est impair et $S_n = 1$ si n est pair. La suite S_n n'admet donc pas de limite. Plus simplement, on a $|u_n| = 1$ donc $u_n \not\rightarrow 0$ et la série est grossièrement divergente.



La réciproque est **fausse**.

EXEMPLE 4.3 : On a $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ mais $\sum u_n$ diverge. En effet, si on récrit $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + \dots + (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n) \rightarrow +\infty.$$

PROPOSITION 4.3: SOMME TÉLESCOPIQUE

Si $u_n = v_{n+1} - v_n$ alors $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée **somme télescopique** et l'on a $S_n = v_{n+1} - v_0$.

Démonstration. Laissée au lecteur. □

PROPOSITION 4.4

Soit (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n = v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (i.e. l'une converge si et seulement si l'autre converge).

Démonstration. On pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $S'_n = v_0 + \dots + v_n$. Pour $n \leq n_0$ on a

$$S_n - S'_n = u_0 - v_0 + u_1 - v_1 + \dots + u_{n_0} - v_{n_0}.$$

Donc $S_n - S'_n$ est constante à partir d'un certain rang. Donc (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge. □

PROPOSITION 4.5: LINÉARITÉ DES SÉRIES

Soit (a_n) et $(b_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors :

1. $\sum 0$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$,
2. Si $\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ converge alors $\sum (a_n + b_n)$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

3. Si $\sum a_n$ converge et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\sum (\lambda a_n)$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration. Posons

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k).$$

On a $C_n = A_n + \lambda B_n$, donc si A_n et B_n ont des limites alors C_n a aussi une limite et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} B_n.$$

□

REMARQUE 4.2 : Cette proposition nous dit que l'ensemble $\mathcal{S} = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u_n) &\longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 4.2

Si $\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ diverge alors $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

Démonstration. Supposons que $\sum (a_n + b_n)$ converge. Alors, d'après la proposition précédente, $\sum ((a_n + b_n) - a_n) = \sum b_n$ converge. Contradiction. $\square$



Si $\sum a_n$ diverge et $\sum b_n$ diverge, **on ne peut rien dire** sur la nature de $\sum (a_n + b_n)$.

EXEMPLE 4.4 : $a_n = 1$ et $b_n = -1$. $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent grossièrement, mais leur somme converge.

PROPOSITION 4.6: SÉRIES COMPLEXES

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent. Dans ce cas on a

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n), \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On rappelle que pour une suite à valeurs complexe $S_n \rightarrow S$ est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S| = 0.$$

On pose $S_n = x_n + iy_n$ et $S = x + iy$ avec $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{cases}$$

On conclut en remarquant que

$$x_n = \operatorname{Re}(S_n) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(u_k), \quad y_n = \operatorname{Im}(S_n) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(u_k).$$

D'autre part on a $x = \operatorname{Re}(S)$ et $y = \operatorname{Im}(S)$ avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. $\square$

PROPOSITION 4.7: CRITÈRE DE CAUCHY POUR LES SÉRIES

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \geq 0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, pour tout $m > 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k = 0$.

Démonstration. On rappelle qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On revient ensuite à la définition d'une suite de Cauchy pour $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq N, \quad |S_n - S_m| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $n \geq N$ et $m \geq 0$. En particulier $n + m \geq N$ donc $|S_{n+m} - S_n| \leq \varepsilon$. Or

$$S_{n+m} - S_n = \sum_{k=0}^{n+m} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k.$$

□

PROPOSITION 4.8

La **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Démonstration. Pour $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$ on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc cette série ne satisfait pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

□

4.2. Convergence absolue et séries à termes positifs**DÉFINITION 4.2: CONVERGENCE ABSOLUE**

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

PROPOSITION 4.9

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est aussi convergente et l'on a

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Si $\sum |u_n|$ converge, alors on a le critère de Cauchy : pour tout $m \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k| = 0$$

De plus, on a l'inégalité triangulaire

$$0 \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k|$$

Donc par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k = 0.$$

Donc $\sum u_k$ satisfait le critère de Cauchy, donc elle est convergente. De plus on a, pour tout n ,

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

Donc puisque les deux limites existent on peut prendre la limite de cette inégalité et en déduire le résultat.

□

REMARQUE 4.3 : La convergence absolue est un critère simple qui permet de ramener la question de la convergence à une série à termes positifs.



La réciproque est fautive. Il existe des séries dites semi-convergente qui sont convergentes sans être absolument convergentes. Voir l'Exemple 4.7 plus loin.

DÉFINITION 4.3: SÉRIE À TERMES POSITIFS

On dit qu'une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout n .

REMARQUE 4.4 : 1. Si $u_n \leq 0$ pour tout n , on peut prendre $v_n = -u_n \geq 0$. Ainsi l'important est surtout que le terme général soit de signe constant.

2. Si $u_n \geq 0$ à partir de $n \geq n_0$, alors d'après la Proposition 4.4 les critères ci-dessous s'appliquent aussi.



Les critères de convergence qui suivent ne sont valables que pour les séries à termes positifs. On se gardera bien de les appliquer aux autres séries plus générales.

PROPOSITION 4.10

Soit $(u_n)_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout n et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Alors

1. $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_n$ est majorée.
2. $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Démonstration. On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0,$$

donc la suite $(S_n)_n$ est croissante. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. $\square$

REMARQUE 4.5 : Dans le cas où la suite S_n diverge, on pourra noter $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$, mais on retiendra que cette notation n'est valable que pour les séries à termes positifs. En général, une série peut être divergente sans avoir de limite.

PROPOSITION 4.11: COMPARAISON

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors, si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge. Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Si $\sum v_n$ converge alors la suite $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$ est majorée, d'après la proposition précédente. De plus, pour tout n

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k = S'_n$$

Donc S_n est majorée, donc $\sum u_n$ converge. $\square$

EXEMPLE 4.5 : Étudions la série

$$\sum u_n, \quad u_n = \frac{1}{2^n(2 + \cos(n))}.$$

Pour tout n on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3$. En particulier $u_n \geq 0$. De plus on a

$$u_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, c'est la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, qui est une série à termes positifs. Donc, par comparaison $\sum u_n$ converge.

PROPOSITION 4.12: DOMINANCE

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites tel que $v_n \geq 0$ pour tout n et $u_n = O_{+\infty}(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration. Puisque $u_n = O_{+\infty}(v_n)$, soit $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq C v_n$$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq N} C v_n$ converge aussi, et donc par comparaison, $\sum_{n \geq N} |u_n|$ converge. Enfin, la nature de la série ne change pas en ajoutant un nombre fini de termes. Donc $\sum |u_n|$ converge. $\square$

REMARQUE 4.6 : Dans la proposition ci-dessus, on suppose seulement que $v_n \geq 0$ et rien sur le signe de u_n .

PROPOSITION 4.13: ÉQUIVALENCE

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites tel que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout n . Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergente ou divergente).

Démonstration. Puisque $u_n \sim_{+\infty} v_n$, il existe $(\omega_n)_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = v_n(1 + \omega_n)$$

En particulier on a $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $v_n = O_{+\infty}(u_n)$ et on peut simplement appliquer la proposition précédente. $\square$

REMARQUE 4.7 : Les critères ci-dessus permettent de déduire la convergence d'une série en utilisant une série plus simple, mais il ne nous disent rien sur la valeur limite de la série lorsqu'elle est convergente.

EXEMPLE 4.6 : Considérons les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a $u_n \geq 0, v_n \geq 0$ et $u_n \sim_{+\infty} v_n$. En écrivant

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

la première série se calcule par somme télescopique :

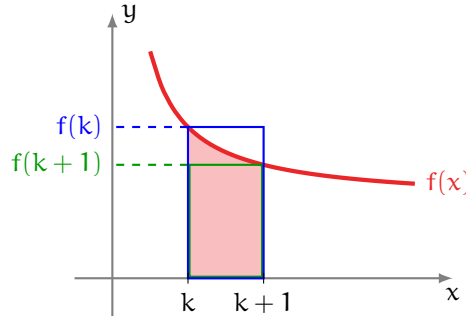
$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Donc $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} = 1$. On en déduit que $\sum v_n$ est convergente, par contre on ne sait rien sur la valeur de la somme infinie.

LEMME 4.1: COMPARAISON SOMME-INTÉGRALE

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive et décroissante. Alors, pour tout $n, m \geq 0$

$$\int_n^{n+m+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{n+m} f(k) \leq \int_{n-1}^{n+m} f(t)dt$$



Démonstration. Soit $k \geq 0$ et $t \in [k, k+1]$. f est décroissante donc $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant entre k et $k+1$ on en déduit

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

Si on somme l'inégalité de gauche de $k = n-1$ à $n+m-1$ on obtient, avec la relation de Chasles, puis en changeant d'indice dans la somme :

$$\sum_{k=n-1}^{n+m-1} f(k+1) \leq \int_{n-1}^{n+m} f(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{n+m} f(k) \leq \int_{n-1}^{n+m} f(t)dt.$$

De même, en sommant l'inégalité de droite de $k = n$ à $n+m$ on obtient

$$\int_n^{n+m+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{n+m} f(k).$$

□

PROPOSITION 4.14: SÉRIES DE RIEMANN

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Pour $\alpha = 1$ on retrouve la série harmonique, qui est divergente d'après la Proposition 4.8.

Soit $\alpha \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n} \in [0, 1]$, donc

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Donc, par comparaison, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Soit $\alpha > 1$, on applique le lemme précédent à la fonction $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ décroissante. Avec $n = 2$ et $N = m + 2$ on a donc

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Donc, après intégration

$$\frac{(N+1)^{-\alpha+1} - 2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{N^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}.$$

Puisque $\alpha > 1$ alors $\frac{N^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ est bornée lorsque $N \rightarrow \infty$. Donc $S_N = \sum_{k=2}^N \frac{1}{n^\alpha}$ est bornée pour tout N . C'est une série à termes positifs donc elle converge.

Remarque : Si $\alpha < 1$ alors $\frac{(N+1)^{-\alpha+1}-2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \rightarrow \infty$ et on retrouve que $S_N \rightarrow \infty$.

□

PROPOSITION 4.15: SÉRIES DE BERTRAND

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ est appelée série de Bertrand. Si $\alpha > 1$ elle converge et si $\alpha < 1$ elle diverge. Pour $\alpha = 1$, la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

Démonstration. C'est une série à termes positifs donc on peut utiliser les critères de comparaisons. De plus, notons que $\ln(n) \geq 1$ pour $n \geq 3$.

Supposons $\alpha > 1$. Si $\beta > 0$, pour $n \geq 3$ on a

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge (c'est une série de Riemann avec $\alpha > 1$), donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ converge. Si $\beta \leq 0$ on a

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^a} \right)$$

pour tout a tel que $1 < a < \alpha$. En effet on a

$$\frac{n^a}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} = \frac{n^{a-\alpha}}{(\ln(n))^{\beta}} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, par croissance comparée et $a - \alpha < 0$. Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge pour $a > 1$, donc par dominance, $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ converge.

Supposons $\alpha < 1$. Soit a tel que $\alpha < a < 1$. Pour n assez grand on a

$$\frac{1}{n^a} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} \right).$$

En effet

$$\frac{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}{n^a} = n^{\alpha-a}(\ln(n))^{\beta} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, par croissance comparée et $\alpha - a < 0$, pour tout β . Or $\sum \frac{1}{n^a}$ diverge pour $a < 1$, donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ diverge.

Supposons $\alpha = 1$. Si $\beta < 0$ on a

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}$$

pour $n \geq 3$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}$ diverge. Le cas $\beta = 0$ est déjà traité par les séries de Riemann. On suppose donc $\beta > 0$ et on considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^{\beta}}$ pour $x > 1$, qui est décroissante. On utilise la comparaison série intégrale pour $n = 3$ et $m = n - 3$ soit

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln(x))^{\beta}} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln(k))^{\beta}} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln(x))^{\beta}}$$

Pour $\beta \neq 1$ on a $\int \frac{dx}{x(\ln(x))^{\beta}} = \frac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta}$ donc

$$\frac{1}{1-\beta} ((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln(3))^{1-\beta}) \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln(k))^{\beta}} \leq \frac{1}{1-\beta} ((\ln(n))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}).$$

Pour $\beta > 1$, le terme de droite a une limite finie lorsque $n \rightarrow \infty$, donc $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln(k))^{\beta}}$ est bornée, donc la série converge. Si $\beta < 1$, le terme de gauche tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, donc $S_n \rightarrow +\infty$ et la série diverge. Pour $\beta = 1$ on a $\int \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln(\ln(x))$ donc l'inégalité précédente devient

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

Le membre de gauche tends vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, donc $S_n \rightarrow +\infty$ et la série diverge. $\square$

4.3. Critères de convergence

PROPOSITION 4.16: RÈGLE DES RACINES DE CAUCHY

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$ existe. Alors

1. Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Supposons $\ell < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < \ell + \varepsilon < 1$. Puisque $|u_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| |u_n|^{\frac{1}{n}} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon + \ell$, donc $|u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^n$. Or $\sum (\ell + \varepsilon)^n$ est une série géométrique convergente car $0 < \ell + \varepsilon < 1$. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

Supposons maintenant $\ell > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Comme dans le cas précédent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left| |u_n|^{\frac{1}{n}} - \ell \right| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. En particulier on a $|u_n|^{\frac{1}{n}} \geq \ell - \varepsilon$, donc $|u_n| \geq (\ell - \varepsilon)^n$ avec $\ell - \varepsilon > 1$. Donc $|u_n| \rightarrow +\infty$, donc la suite ne tend pas vers 0. Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. $\square$

PROPOSITION 4.17: RÈGLE DU QUOTIENT DE D'ALEMBERT

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell$$

existe. Alors

1. Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Supposons $\ell < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < \ell + \varepsilon < 1$. Puisque $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_{n+1}| \leq (\ell + \varepsilon)|u_n|$$

Par récurrence sur n , on en déduit $|u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N}|u_N|$ pour $n \geq N$. Or $\sum (\ell + \varepsilon)^{n-N}$ est une série géométrique convergente car $0 < \ell + \varepsilon < 1$. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

Supposons maintenant $\ell > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq \ell - \varepsilon$ pour $n \geq N$. On en déduit $|u_n| \geq (\ell - \varepsilon)^{n-N}|u_N|$ pour $n \geq N$, avec $\ell - \varepsilon > 1$. Donc $|u_n| \rightarrow +\infty$, donc la suite ne tend pas vers 0. Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. $\square$

REMARQUE 4.8 : $\odot$ Pour les deux critères ci-dessus, dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut pas conclure : tous les cas sont possibles. Par exemple, pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a

$$|u_n|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) \rightarrow 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1,$$

alors que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. D'autre part, avec $u_n = \frac{1}{n^2}$ on a

$$|u_n|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-2\frac{\ln(n)}{n}\right) \rightarrow 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1$$

alors que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

- $\odot$ Ces deux critères de convergence sont aussi très utiles pour étudier les séries à termes positifs. Dans ce cas, on peut enlever les $|\cdot|$ dans le calcul de ℓ .

DÉFINITION 4.4: SÉRIE ALTERNÉE

Une série de la forme $\sum (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$ pour tout n est appelée **série alternée**.

PROPOSITION 4.18: CRITÈRE DE LEIBNIZ

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante et positive telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$. Alors la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Cette proposition est une conséquence d'un résultat plus général, voir Théorème 4.1 ci-dessous.

EXEMPLE 4.7 : La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge car $v_n = \frac{1}{n}$ satisfait les critères ci-dessus. En revanche, cette série n'est pas absolument convergente car la série harmonique diverge. C'est un exemple typique de série **semi-convergente**.

THÉORÈME 4.1: SOMMATION D'ABEL

Soit $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que

1. (a_n) est décroissante, positive et telle que $a_n \rightarrow 0$
2. Les sommes partielles de (b_n) sont bornées :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq M$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. On effectue un changement dans la sommation en posant $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Par hypothèse $|B_n| \leq M$. De plus, $b_0 = B_0$ et pour $n \geq 1$ on a $b_n = B_n - B_{n-1}$. On écrit donc la somme partielle

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\ &= a_0 B_0 + a_1 (B_1 - B_0) + \dots + a_{n-1} (B_{n-1} - B_{n-2}) + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0 (a_0 - a_1) + B_1 (a_1 - a_2) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_n a_n. \end{aligned}$$

D'une part, (B_n) est bornée et $a_n \rightarrow 0$ donc $B_n a_n \rightarrow 0$. D'autre part, $|B_k (a_k - a_{k+1})| \leq M (a_k - a_{k+1})$ car B_n est bornée par M et (a_n) est décroissante. Donc, par somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |B_k (a_k - a_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = M (a_0 - a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M a_0.$$

Donc, par comparaison, $\sum B_k (a_k - a_{k+1})$ est absolument convergente. Donc (S_n) converge, donc $\sum a_n b_n$ converge. $\square$

Démonstration de la Proposition 4.18. On pose $a_n = v_n$ qui est décroissante, positive et telle que $a_n \rightarrow 0$, et $b_n = (-1)^n$. De plus on a $\sum_{k=0}^n b_k = 1$ si n est pair et 0 sinon, donc $\sum_{k=0}^n b_k$ est bornée. Le théorème de sommation d'Abel s'applique, donc $\sum (-1)^n v_n$ converge. $\square$

EXEMPLE 4.8 : On considère la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$. Si $e^{i\theta} = 1$ on retrouve la série harmonique, qui diverge. Si $e^{i\theta} \neq 1$ on pose $a_n = \frac{1}{n}$ qui est positive, décroissante avec $a_n \rightarrow 0$, et $b_n = e^{in\theta}$. On a, par série géométrique,

$$\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{1 + |e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|},$$

donc $\sum_{k=0}^n b_k$ est bornée. Donc le théorème de sommation d'Abel s'applique et $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge si $e^{i\theta} \neq 1$. C'est un autre exemple de série semi-convergente.

Remarque : si $e^{i\theta} = -1$ on retrouve la série harmonique alternée.

PROPOSITION 4.19

Soit $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est :

1. absolument convergente pour $\alpha > 1$
2. semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \neq 0 [2\pi]$, et divergente si $\theta = 0 [2\pi]$.
3. grossièrement divergente pour $\alpha \geq 0$.

Démonstration. Laissée au lecteur. □

4.4. Compléments

On cherche à définir le produit de deux séries et étudier sa convergence. Commençons par des sommes finies, et réarrangeons les termes en fonction de la somme des indices. Pour deux termes on a :

$$(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme 0}} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme 1}} + \underbrace{a_1 b_1}_{\text{somme 2}},$$

où la somme des indices vaut respectivement 0, 1 et 2. Pour trois termes on a

$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme 0}} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme 1}} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{\text{somme 2}} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{\text{somme 3}} + \underbrace{a_2 b_2}_{\text{somme 4}},$$

où la somme des indices vaut respectivement 0, 1, 2, 3 et 4. Pour n termes, on a donc

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

DÉFINITION 4.5: PRODUIT DE CAUCHY

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. On appelle série produit ou **produit de Cauchy** la série $\sum c_n$ avec

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}.$$

THÉORÈME 4.2

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Démonstration. Admise. □

EXEMPLE 4.9 : Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente, et $\sum b_n$ avec $b_n = \frac{1}{2^n}$, qui converge absolument. Le produit de Cauchy est la série de terme général

$$c_n = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{2^{n-i}}$$

La série $\sum c_n$ est absolument convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

DÉFINITION 4.6: SÉRIE COMMUTATIVEMENT CONVERGENTE

On dit que la série $\sum u_n$ est commutativement convergente si pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge.

THÉORÈME 4.3

La série $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente. Dans ce cas, pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$$

Démonstration. Admise. □

COROLLAIRE 4.3: S

$\sum u_n$ est seulement semi-convergente avec $u_n \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell.$$

REMARQUE 4.9 : Lorsque la série n'est pas absolument convergente, des phénomènes étranges apparaissent. Par exemple, la série harmonique alternée converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Notons S sa somme (en fait $S = \ln 2$). Regroupons les termes par paquets de 3. En simplifiant, on trouve la moitié de la somme !

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

1.1. (Rappel) Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	Ensemble de dérivabilité	$f'(x)$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\text{signe}(x)$
x^n ($n > 0$ entier)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n ($n < 0$ entier)	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^α ($\alpha > 0$ non entier)	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
x^α ($\alpha < 0$ non entier)	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
b^x ($b > 0$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(b)b^x$
$\ln(x)$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\int f(x)dx$	Intervalles maximaux
x^n ($n > 0$ entier)	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^{-1}	$\mathbb{R}^*$	$\ln x $	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
x^n ($n < -1$ entier)	$\mathbb{R}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
x^α ($\alpha > 0$ non entier)	$]0; +\infty[$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$
x^α ($\alpha < 0$ non entier)	$]0; +\infty[$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

f	f'
$f \circ u = f(u)$	$u'f'(u)$
$\ln(u)$ ($u > 0$)	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$

f	$\int f$
$u'f(u)$	$F(u)$ (F primitive de f)
$\frac{u'}{u}$ ($u \neq 0$)	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$

1.2. Fonctions hyperboliques

DÉFINITION A.1: COSINUS ET SINUS HYPERBOLIQUE

On définit le cosinus hyperbolique ch (ou $\cosh$) et le sinus hyperbolique sh (ou $\sinh$) par

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & x &\mapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

PROPOSITION A.1

1. ch est paire et sh est impaire.
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x), \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x).$$

3. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors que $\text{sh}(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$.
4. ch est strictement décroissante sur $[-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, \infty]$. Elle possède un minimum global en $x = 0$, avec $\text{ch}(0) = 1$.
5. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle possède un point d'inflexion en $x = 0$, avec $\text{sh}(0) = 0$.
6. On a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{ch}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty.$$

7. Les fonctions ch et sh n'ont pas d'asymptote, mais on a

$$\text{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}, \quad \text{ch}(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}, \quad \text{sh}(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{2}.$$

Démonstration. Laissée au lecteur. Par calcul direct et en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle. $\square$

PROPOSITION A.2

Au voisinage de $x = 0$ on a

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}), & (x \rightarrow 0), \\ \text{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}), & (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Démonstration. Déjà vue dans l'exemple 1.12. $\square$

PROPOSITION A.3

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= 1, \\ \text{ch}(x+y) &= \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y), \\ \text{sh}(x+y) &= \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y). \end{aligned}$$

Démonstration. Laissée au lecteur. Par calcul direct et en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle. $\square$

DÉFINITION A.2: TANGENTE HYPERBOLIQUE

On définit la tangente hyperbolique th (ou $\tanh$) par

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \end{aligned}$$

Il existe de nombreuses façons d'écrire $\text{th}(x)$:

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

PROPOSITION A.4

1. th est impaire, en particulier $\text{th}(0) = 0$.

2. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x).$$

3. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle possède un point d'inflexion en $x = 0$.

4. $\text{th}(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$.

5. th a une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ et l'on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1.$$

6. Au voisinage de 0 on a

$$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4), \quad (x \rightarrow 0).$$

7. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}(x + y) = \frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\text{th}(y)}.$$

Démonstration. 1-5 laissés au lecteur (calcul direct et propriétés des fonction exponentielle, ch et sh). Pour 6, on utilise le DL de ch et sh en 0 :

$$\text{th}(x) = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Pour 7, on utilise les formules pour ch et sh et on factorise par $\text{ch}(x)\text{ch}(y)$

$$\text{th}(x + y) = \frac{\text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)} = \frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\text{th}(y)}.$$

□

1.3. (Rappel) Régularité des fonctions réciproques**PROPOSITION A.5**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f réalise une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermé délimité par $f(a)$ et $f(b)$, et sa réciproque f^{-1} est continue.

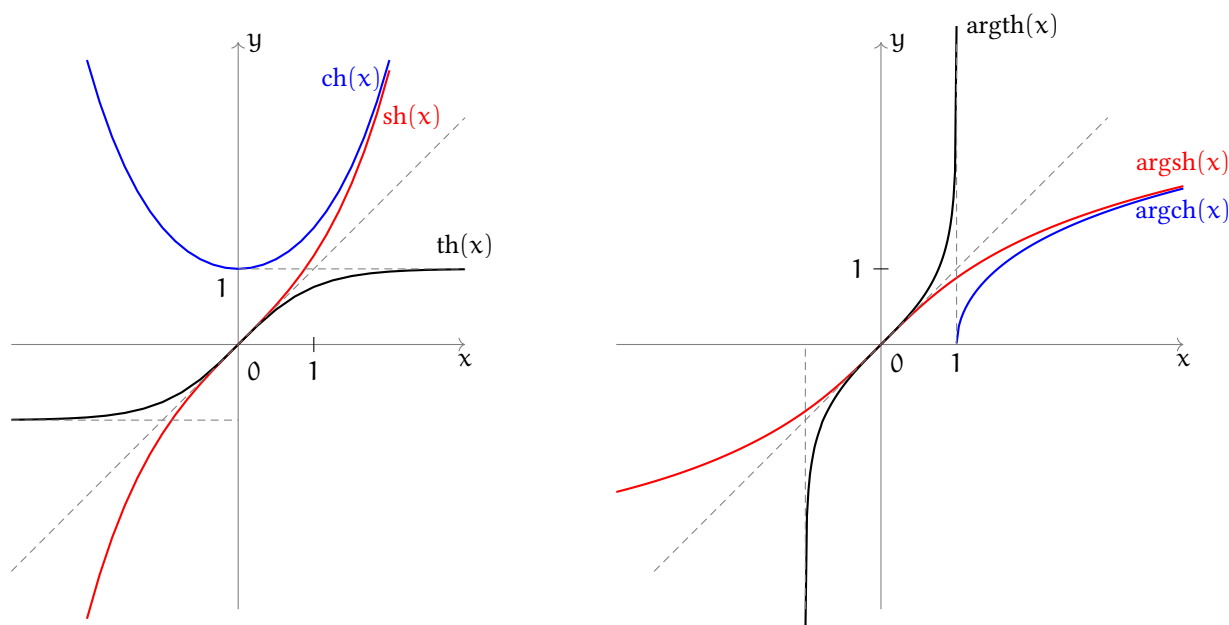


FIGURE A.1 – Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions réciproques respectives .

PROPOSITION A.6

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et l'on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

1.4. Fonctions trigonométriques réciproques

On rappelle d'abord quelques valeurs remarquables du sinus et du cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Les autres valeurs remarquables sont déduites soit en traçant le cercle trigonométrique, soit en utilisant la parité de $\sin$ et $\cos$ et l'une des formules suivantes

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y), \quad \cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).$$

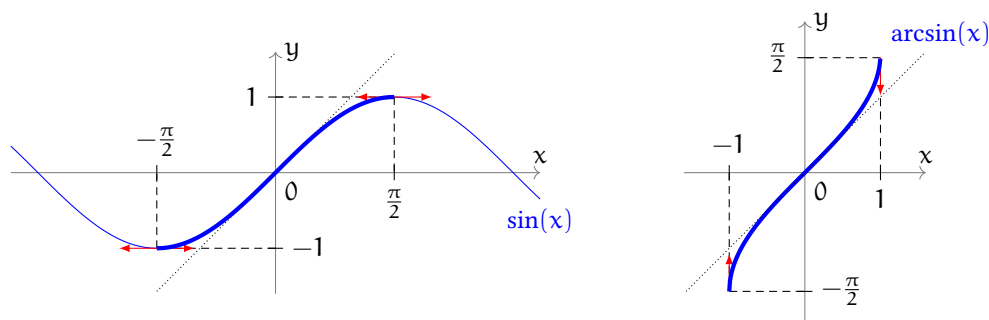
Par exemple $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

DÉFINITION A.3: ARC SINUS

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, d'image $[-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection entre ces intervalles et on appelle **arc sinus**, notée $\arcsin$ (ou asin ou $\sin^{-1}$),

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

la fonction réciproque associée, qui est continue.



Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $y = \arcsin(x)$ est l'unique valeur dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ telle que $\sin(y) = x$. Par exemple :

$$\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

PROPOSITION A.7

- ⊙ Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\sin(\arcsin(x)) = x$.
- ⊙ Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Démonstration. C'est la définition d'une fonction réciproque. □



Pour $|x| > 1$, la fonction arcsin n'est pas définie. Pour $|x| > \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\sin(x))$ est bien définie mais n'est pas égal à x . Par exemple

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}.$$

PROPOSITION A.8

Pour $x \in]-1, 1[$, la fonction arcsin est dérivable et l'on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition A.6. La fonction sin est une bijection strictement monotone de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, sin est dérivable et l'on a $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Donc arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et l'on a

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

On a utilisé le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\cos(x) > 0$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de sorte que $\cos(x) = +\sqrt{1-\sin^2(x)}$. Enfin, on a $\sin^2(\arcsin(y)) = (\sin(\arcsin(y)))^2 = y^2$. □



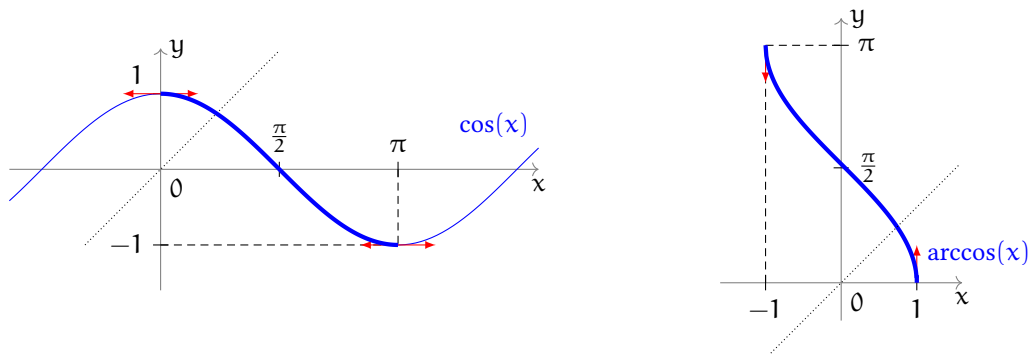
arcsin est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Elle n'est pas dérivable en 1 et -1.

DÉFINITION A.4: ARC COSINUS

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, d'image $[-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection entre ces intervalles et on appelle **arc cosinus**, notée $\arccos$ (ou acos ou $\cos^{-1}$),

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

la fonction réciproque associée, qui est continue.



Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, $y = \arccos(x)$ est l'unique valeur dans $[0, \pi]$ telle que $\cos(y) = x$. Par exemple :

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

PROPOSITION A.9

- ⊙ Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\cos(\arccos(x)) = x$.
- ⊙ Pour tout $x \in [0, \pi]$ on a $\arccos(\cos(x)) = x$.

Démonstration. C'est la définition d'une fonction réciproque. □



Pour $|x| > 1$, la fonction $\arccos$ n'est pas définie. Pour $|x| > \pi$, $\arccos(\cos(x))$ est bien défini mais n'est pas égal à x . Par exemple

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}.$$

PROPOSITION A.10

Pour $x \in]-1, 1[$, la fonction $\arccos$ est dérivable et l'on a

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition A.6. La fonction $\cos$ est une bijection strictement monotone de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et pour tout $x \in]0, \pi[$, $\cos$ est dérivable et l'on a $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$. Donc $\arccos$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et l'on a

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(y))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

On a utilisé le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0, \pi[$, de sorte que $\sin(x) = +\sqrt{1-\cos^2(x)}$. Enfin, on a $\cos^2(\arccos(y)) = (\cos(\arccos(y)))^2 = y^2$. □



$\arccos$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Elle n'est pas dérivable en 1 et -1 .

PROPOSITION A.11

Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Posons $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$. Pour $x \in] -1, 1[$, f est dérivable et l'on a $f'(x) = 0$. Donc $f(x) = C$. En prenant $x = 0$ on en déduit $C = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Enfin, on vérifie que la propriété reste vraie en $x = 1$ et $x = -1$. $\square$

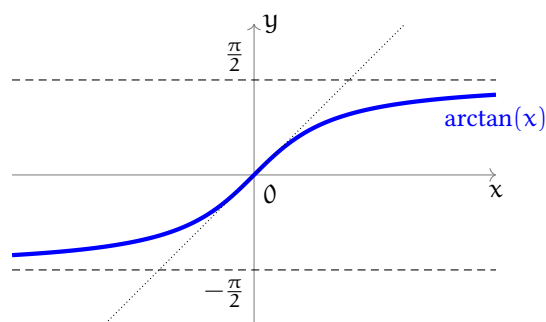
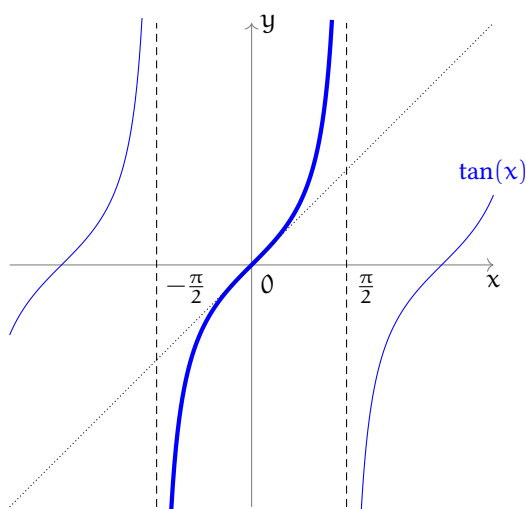
REMARQUE A.1 : Cette proposition permet d'exprimer $\arccos$ en fonction de $\arcsin$ et permet ainsi de déduire les propriétés d' $\arccos$ à partir de celles de $\arcsin$ (par exemple son développement limité).

DÉFINITION A.5: ARC TANGENTE

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Son image est $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection entre ces intervalles et on appelle **arc tangente**, notée $\arctan$ (ou atan ou $\tan^{-1}$),

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

la fonction réciproque associée, qui est continue.



Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $y = \arctan(x)$ est l'unique valeur dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que $\tan(y) = x$. Par exemple :

$$\arctan(0) = 0, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

De plus on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

PROPOSITION A.12

- ⊙ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\tan(\arctan(x)) = x$.
- ⊙ Pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $\arctan(\tan(x)) = x$.

Démonstration. C'est la définition d'une fonction réciproque. □



Pour $|x| > \frac{\pi}{2}$, $\arctan(\tan(x))$ est bien défini mais n'est pas égal à x . Par exemple

$$\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0 \neq \pi.$$

PROPOSITION A.13

Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\arctan$ est dérivable et l'on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition A.6. La fonction $\tan$ est une bijection strictement monotone de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan$ est dérivable et l'on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$. Donc $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

On a utilisé le fait que $\tan^2(\arctan(y)) = (\tan(\arctan(y)))^2 = y^2$. □

REMARQUE A.2 : La proposition ci-dessus est fondamentale pour calculer une primitive des éléments simples de seconde espèce.

PROPOSITION A.14: SYMÉTRIES

Les fonctions $\arcsin$ et $\arctan$ sont impaires et la fonction $\arccos$ possède un centre de symétrie en $(0, \frac{\pi}{2})$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \arcsin(-x) &= -\arcsin(x), & \forall x \in [-1, 1], \\ \arctan(-x) &= -\arctan(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \arccos(-x) &= \pi - \arccos(x), & \forall x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Démonstration. □

PROPOSITION A.15: DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les fonctions $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$ sont infiniment dérivables au voisinage de 0 et l'on a

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), & (x \rightarrow 0), \\ \arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \dots - \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), & (x \rightarrow 0), \\ \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), & (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Démonstration. En exercice. □

Ces formules générales ne sont pas à connaître, mais il est bon d'avoir les premiers termes en tête (au moins un équivalent).

1.5. Fonctions hyperboliques réciproques

Les trois fonctions qui suivent sont représentées sur la Figure A.1 pour comparer avec leur fonction hyperbolique d'origine.

DÉFINITION A.6: ARGUMENT SINUS HYPERBOLIQUE

La fonction sh est strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est continue, on l'appelle **argument sinus hyperbolique**, notée $\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou argsinh), telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \text{argsh}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{sh}(y) = x.$$

PROPOSITION A.16

La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition A.6. La fonction sh est une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, sh est dérivable et l'on a $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x) \neq 0$. Donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\text{argsh}'(y) = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2(\text{argsh}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

On a utilisé le fait que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ et $\text{ch}(x) > 0$, donc $\text{ch}(x) = \sqrt{1+\text{sh}^2(x)}$. Enfin on a $\text{sh}^2(\text{argsh}(y)) = (\text{sh}(\text{argsh}(y)))^2 = y^2$. $\square$

DÉFINITION A.7: ARGUMENT COSINUS HYPERBOLIQUE

La fonction ch est strictement monotone de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection entre ces intervalles et sa fonction réciproque est continue, on l'appelle **argument cosinus hyperbolique**, notée $\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ (ou argcosh), telle que

$$\forall x \geq 1, \quad \forall y \geq 0, \quad y = \text{argch}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{ch}(y) = x.$$

PROPOSITION A.17

La fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et l'on a

$$\forall x > 1, \quad \text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition A.6. La fonction ch est une bijection strictement monotone de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, ch est dérivable et l'on a $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x) \neq 0$. Donc argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et l'on a

$$\text{argch}'(y) = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(y))} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(\text{argch}(y)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

On a utilisé le fait que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ et $\text{sh}(x) > 0$ pour $x > 0$, donc $\text{sh}(x) = \sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}$ pour tout $x > 0$. Enfin on a $\text{ch}^2(\text{argch}(y)) = (\text{ch}(\text{argch}(y)))^2 = y^2$. $\square$

DÉFINITION A.8: ARGUMENT TANGENTE HYPERBOLIQUE

La fonction th est strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$. Elle réalise donc une bijection entre ces intervalles et sa fonction réciproque est continue, on l'appelle **argument tangente hyperbolique**, notée $\text{argth} :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\operatorname{argtanh}$), telle que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad y = \operatorname{argth}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th}(y) = x.$$

PROPOSITION A.18

La fonction argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et l'on a

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition A.6. La fonction th est une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, th est dérivable et l'on a $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) \neq 0$. Donc argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et l'on a

$$\operatorname{argth}'(y) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

On a utilisé le fait que $\operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(y)) = (\operatorname{th}(\operatorname{argth}(y)))^2 = y^2$. □

PROPOSITION A.19: FORMES EXPLICITES

On a les formes explicites suivante pour les fonctions hyperboliques réciproques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right),$$

$$\forall x \geq 1, \quad \operatorname{argch}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation $y = \operatorname{argsh}(x) \Leftrightarrow \operatorname{sh}(y) = x$. On a donc

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

En multipliant par $2e^y$ on obtient

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

On pose $X = e^y$ et on se ramène aux racines du polynôme $X^2 - 2xX - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4(x^2 + 1) > 0$, les racines sont donc $X_{\pm} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. De plus, on cherche $X = e^y > 0$, donc $X = X_+$. Finalement

$$y = \ln(X_+) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

La preuve pour argch est analogue. Pour argth , cette méthode fonctionne mais on a aussi la preuve suivante. On part de

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

Donc en prenant une primitive de cette équation on a, pour $x \in] -1, 1[$,

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} (\ln|1+x| - \ln|1-x|) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C.$$

Enfin, $\operatorname{argth}(0) = 0$ donc $C = 0$. □

PROPOSITION A.20: DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les fonctions argsh et argth sont infiniment dérivables au voisinage de 0 et l'on a

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \quad (x \rightarrow 0), \\ \operatorname{argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \quad (x \rightarrow 0).\end{aligned}$$

Démonstration. Admise. □

Ces formules générales ne sont pas à connaître, mais il est bon d'avoir les premiers termes en tête (au moins un équivalent). Notons que le développement de argch au voisinage de 1 n'existe pas car la fonction n'y est pas dérivable.

1.6. (Résumé) Dérivée et primitive des fonctions réciproques

f	$\mathcal{D}_f$	dérivable sur	$f'(x)$
$\arcsin$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
argsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
argch	$[1, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
argth	$] -1, 1[$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\int f(x)dx$	Intervalles maximaux
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$\arcsin$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$	$\operatorname{argch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$] -\infty, -1[$ ou $] -1, 1[$ ou $]1, +\infty[$

Notons que pour la dernière primitive on retrouve argth sur l'intervalle $] -1, 1[$, et que argsh et argch ont aussi une forme explicite donnée en Proposition A.19.