

Analyse 3

Double Licence IASO — L2

2024 — 2025

Ce texte est issu d'un cours donné à l'Université Paris Dauphine – PSL en 2024 – 2025 au premier semestre de la deuxième année de Double Licence : Intelligence Artificielle et Science des Organisations. Il peut être utilisé librement et la source est disponible sur demande.

Il s'agit d'un cours d'analyse standard de deuxième année de licence de mathématique. On étudie les séries numériques, les intégrales généralisées, les suites et séries de fonctions et les séries entières. Cependant, dans la perspective de l'intelligence artificielle, un fil conducteur possible est l'approximation des fonctions. C'est un outil essentiel en traitement du signal et des données, que l'on retrouve toujours en amont de toute intelligence artificielle prédictive (comme un réseau de neurones). Il est ainsi essentiel de savoir approximer certaines fonctions par d'autres qui sont plus simples à implémenter numériquement. On pensera notamment aux polynômes, aux séries entières et au polynômes trigonométriques. On mettra donc en valeur tous les résultats d'approximation de fonction que l'on croquera dans ce cours dans les Chapitres 4 et 5. Les Chapitres 1, 2 et 3 introduisent les notions nécessaires pour énoncer les résultats des chapitres suivants.

Merci de signaler toute typo ou erreur à tauber@ceremade.dauphine.fr.

Pré-requis. Tout le cours d'Analyse 1 et 2 de première année. Principalement les limites des suites et des fonctions, mais aussi les développements limités et asymptotiques, l'intégrale de Riemann, la continuité et la dérivabilité des fonctions.

Crédits. Le corps du texte est librement inspiré des cours de mes prédécesseurs Guillaume Vigeral, Jacques Fejoz et Emeric Bouin. Le thème $\text{\LaTeX}$ de mise en page a été créé par Sylvain Porret-Blanc. Certaines figures du Chapitre 2 et 3 sont adaptées du cours en ligne Exo7, dont la [source](#) est en accès libre. La Section 3 du Chapitre 4 concernant les réseaux de neurones est inspirée du chapitre 5 du livre « The mathematical engineering of deep learning » de Lique, B., Moka, S., et Nazarathy, Y. (2024), après une suggestion d'Alexandre Allauzen.

TABLE DES MATIÈRES

1	Suites de Cauchy	4
2	Séries numériques	7
1	Terminologie, convergence, divergence	7
2	Convergence absolue et séries à termes positifs	12
3	Critères de convergence	16
4	Compléments	19
3	Intégrales généralisées	21
1	Intervalle non borné	22
2	Intervalle borné semi-ouvert	27
3	Intégrale doublement généralisée	30
4	Suites et séries de fonctions	31
1	Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions	31
2	Propriétés de la convergence uniforme	33
3	Applications : approximation de fonction	36
4	Séries de fonctions	39
5	Séries entières	43
1	Rayon de convergence	43
2	Opérations sur les séries entières	46
3	Développement d'une fonction en série entière	49
4	Comportement sur le cercle de convergence	52

1 SUITES DE CAUCHY

Pré-requis : Chapitre du cours d'Analyse 2 sur la convergence des suites.



Objectifs :

- ⊙ Définition d'une suite de Cauchy
- ⊙ Théorème de complétude de $\mathbb{R}$.

Motivation

Parmi toutes les équations que l'on aimerait résoudre, il est rarissime qu'on sache trouver une solution d'une équation, qui soit donnée par une formule "explicite". ⁽¹⁾ Généralement, on essaye alors de chercher une suite de solutions approchées qui converge vers une solution. Mais comment montrer que la suite converge si on ne connaît justement pas sa limite a priori ?

Deux résultats vus en première année répondent à cette question dans certaines situations. Ils peuvent être considérés comme des conséquences de la propriété de la borne supérieure ou du théorème des segments emboîtés (voir le Cours d'Analyse 1) :

THÉORÈME 1.1: (RAPPEL)

Toute suite réelle croissante et majorée converge dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1.2: BOLZANO-WEIERSTRASS (RAPPEL)

Toute suite réelle bornée possède une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$.

Ce court chapitre introduit une autre propriété qui permet de montrer qu'une suite converge, dans des conditions plutôt plus générales que les deux théorèmes précédents : c'est la notion de suite de Cauchy.

DÉFINITION 1.1

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ est **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon .$$

C'est dire que les termes de la suite sont proches les uns des autres lorsque n est grand. De façon équivalente, on pourra aussi utiliser la définition suivante

PROPOSITION 1.1

Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |x_p - x_q| \leq \varepsilon .$$

(1). Parfois, une telle formule n'existe même pas, sans parler de la trouver. La théorie de Galois, par exemple, montre que les racines d'un polynôme de degré supérieur à 5 ne sont pas, sauf cas exceptionnel, des fonctions simples des coefficients du polynôme. Pour des équations non polynomiales, la situation ne fait qu'empirer.

Démonstration. Immédiate. □

PROPOSITION 1.2

Si (x_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors elle est de Cauchy.

Démonstration. Soit (x_n) une suite qui admet une limite finie ℓ . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |x_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc que, pour le même n_0 , $\forall n \geq n_0$,

$$\forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - \ell| + |\ell - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

La réciproque du résultat ci-dessus requiert un résultat intermédiaire :

PROPOSITION 1.3

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$

$$\exists n_0, \forall p \geq 0, |x_{n_0+p} - x_{n_0}| \leq 1.$$

Donc pour $n \geq n_0$ on a $|x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|, |x_{n_0}| + 1\}$$

Donc la suite est bornée. □

Le résultat clef suivant est une conséquence du Théorème 1.2.

THÉORÈME 1.3: COMPLÉTUDE DE $\mathbb{R}$

Toute suite de Cauchy réelle converge; on dit que $\mathbb{R}$ est **complet**.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Grace à la Proposition 1.3, elle est bornée et grace aux Théorème 1.2 elle possède une sous-suite qui converge. Soit ϕ une extraction, c'est à dire la fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui identifie la sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

Alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |x_{\phi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1, \forall p \geq 0, |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$, vu que $\phi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ car ϕ est strictement croissante,

$$|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{\phi(n)}| + |x_{\phi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et donc (x_n) converge. □

REMARQUE 1.1 : La complétude est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ qui sera utilisée dans les chapitres suivants. Le corps des complexes $\mathbb{C}$ est aussi un espace complet. En revanche, il existe plein d'espaces qui n'ont pas cette propriété. Par exemple, le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Autrement dit, il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes. Ainsi, n'importe quelle suite de rationnels qui converge vers un irrationnel est de Cauchy (parce qu'elle admet une limite finie dans $\mathbb{R}$) mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car la limite ne lui appartient pas.

2 SÉRIES NUMÉRIQUES

Pré-requis : Tout le chapitre du cours d'Analyse 1 sur les suites. Développement limités et équivalents simples des fonctions usuelles et de leur combinaisons.



Objectifs :

- Maîtriser la terminologie des séries (convergence, divergence,...)
- Connaître les critères de convergence
- Identifier les séries classiques (géométrique, harmonique, de Riemann,...)

Motivation

Le but des séries est de donner un sens mathématique aux sommes contenant une infinité de termes. Dans certains cas, la réponse est évidente, par exemple $1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$. À l'inverse, il y a des cas où une somme infinie peut donner un nombre fini. Par exemple, on va montrer l'identité suivante sur la série géométrique :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 2$$

Dans d'autres cas, la réponse n'est pas claire. Quel sens donner à $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$? Est-ce que la somme suivante est finie : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$?

Dans ce chapitre, on étudie les *séries numériques*, c'est à dire que les termes de la série sont des nombres (réels ou complexes), qui repose sur la théorie des suites numériques. Dans les chapitres suivants, on généralisera ces notions aux séries de fonctions, et on étudiera le cas des séries entières.

2.1. Terminologie, convergence, divergence

Dans tout ce chapitre on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 2.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ou complexes. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est appelée **série de terme général** u_n et u_n est appelée le **terme général** de la série. On dit que la série converge (ou est convergente, abrégé CV) si la suite S_n admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque $\ell \rightarrow \infty$. Sinon on dit que la série diverge (ou est divergente, abrégé DV). La suite (S_n) s'appelle aussi la **suite des sommes partielles**.



On note $\sum u_n$ pour abréger « la série de terme général u_n ». Si la série converge, on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

la limite de la suite S_n .



On distinguera bien la série $\sum u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de la limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in \mathbb{K}$. La première existe toujours alors que l'on ne peut écrire la deuxième seulement si la série converge.

REMARQUE 2.1 : Si le terme général est indexé par $n \geq n_0$ on adapte les notations : $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ et la limite, si elle existe, devient $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

PROPOSITION 2.1: SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

Soit $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$, de terme général $u_n = q^n$ (suite géométrique de raison q), est appelée **série géométrique**. Elle est convergente si et seulement si $|q| < 1$, auquel cas on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Si $q = 1$ on a $S_n = 1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1$ et la série diverge. Supposons $|q| < 1$ On a $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ et donc

$$qS_n = q(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

La différence des deux nous donne $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$, donc pour $q \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Puisque $|q| < 1$ on a $q^{n+1} \rightarrow 0$ car $|q^{n+1}| = |q|^{n+1}$. Donc $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Supposons maintenant $|q| \geq 1$ et supposons par l'absurde que la série est convergente. On a donc $S_n \rightarrow \ell$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De même, $S_{n+1} \rightarrow \ell$, donc $S_{n+1} - S_n \rightarrow 0$. Or $S_{n+1} - S_n = q^{n+1}$ avec $|q| \geq 1$, donc q^{n+1} ne tend pas vers 0 et l'on a une contradiction. $\square$

EXEMPLE 2.1 : Avec $q = \frac{1}{2}$ on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

PROPOSITION 2.2

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Démonstration. On reprend la preuve de la proposition précédente. On considère $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Si la série converge, alors $S_n \rightarrow \ell$, $S_{n-1} \rightarrow \ell$ et donc $S_n - S_{n-1} = u_n \rightarrow \ell - \ell = 0$. $\square$

COROLLAIRE 2.1

Par contraposée, si u_n ne tend pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ est divergente. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.

EXEMPLE 2.2 : Avec $u_n = (-1)^n$ on a $S_n = 0$ si n est impair et $S_n = 1$ si n est pair. La suite S_n n'admet donc pas de limite. Plus simplement, on a $|u_n| = 1$ donc $u_n \not\rightarrow 0$ et la série est grossièrement divergente.



La réciproque est **fausse**.

EXEMPLE 2.3 : On a $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ mais $\sum u_n$ diverge. En effet, si on récrit $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + \dots + (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n) \rightarrow +\infty.$$

PROPOSITION 2.3: SOMME TÉLESCOPIQUE

Si $u_n = v_{n+1} - v_n$ alors $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée **somme télescopique** et l'on a $S_n = v_{n+1} - v_0$.

Démonstration. Laissée au lecteur. $\square$

PROPOSITION 2.4

Soit (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n = v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (i.e. l'une converge si et seulement si l'autre converge).

Démonstration. On pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $S'_n = v_0 + \dots + v_n$. Pour $n \leq n_0$ on a

$$S_n - S'_n = u_0 - v_0 + u_1 - v_1 + \dots + u_{n_0} - v_{n_0}.$$

Donc $S_n - S'_n$ est constante à partir d'un certain rang. Donc (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge. $\square$

PROPOSITION 2.5: LINÉARITÉ DES SÉRIES

Soit (a_n) et $(b_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors :

1. $\sum 0$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$,
2. Si $\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ converge alors $\sum (a_n + b_n)$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

3. Si $\sum a_n$ converge et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\sum (\lambda a_n)$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration. Posons

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k).$$

On a $C_n = A_n + \lambda B_n$, donc si A_n et B_n ont des limites alors C_n a aussi une limite et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} B_n.$$

□

REMARQUE 2.2 : Cette proposition nous dit que l'ensemble $\mathcal{S} = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u_n) &\longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.2

Si $\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ diverge alors $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

Démonstration. Supposons que $\sum (a_n + b_n)$ converge. Alors, d'après la proposition précédente, $\sum ((a_n + b_n) - a_n) = \sum b_n$ converge. Contradiction. □



Si $\sum a_n$ diverge et $\sum b_n$ diverge, **on ne peut rien dire** sur la nature de $\sum (a_n + b_n)$.

EXEMPLE 2.4 : $a_n = 1$ et $b_n = -1$. $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent grossièrement, mais leur somme converge.

PROPOSITION 2.6

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle **reste de la série** la suite définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k,$$

et l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Démonstration. La série est convergente, on note $\ell = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa limite. On a $R_n = \ell - S_n$ et $S_n \rightarrow \ell$, donc $R_n \rightarrow 0$. $\square$

PROPOSITION 2.7: SÉRIES COMPLEXES

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent. Dans ce cas on a

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n), \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On rappelle que pour une suite à valeurs complexe $S_n \rightarrow S$ est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S| = 0.$$

On pose $S_n = x_n + iy_n$ et $S = x + iy$ avec $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{cases}$$

On conclut en remarquant que

$$x_n = \operatorname{Re}(S_n) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(u_k), \quad y_n = \operatorname{Im}(S_n) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(u_k).$$

D'autre part on a $x = \operatorname{Re}(S)$ et $y = \operatorname{Im}(S)$ avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. $\square$

PROPOSITION 2.8: CRITÈRE DE CAUCHY POUR LES SÉRIES

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \geq 0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. On rappelle qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On revient ensuite à la définition d'une suite de Cauchy pour $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq N, \quad |S_n - S_m| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $n \geq N$ et $m \geq 0$. En particulier $n + m \geq N$ donc $|S_{n+m} - S_n| \leq \varepsilon$. Or

$$S_{n+m} - S_n = \sum_{k=0}^{n+m} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k.$$

□

PROPOSITION 2.9

La **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Démonstration. Pour $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$ on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc cette série ne satisfait pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

□

2.2. Convergence absolue et séries à termes positifs**DÉFINITION 2.2: CONVERGENCE ABSOLUE**

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

PROPOSITION 2.10

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est aussi convergente et l'on a

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Si $\sum |u_n|$ converge, alors on a le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \geq 0, \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k| \leq \varepsilon.$$

De plus, on a l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k|$$

Donc par encadrement

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \geq 0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Donc $\sum u_k$ satisfait le critère de Cauchy, donc elle est convergente. De plus on a, pour tout n ,

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

Donc puisque les deux limites existent on peut prendre la limite de cette inégalité et en déduire le résultat.

□

REMARQUE 2.3 : La convergence absolue est un critère simple qui permet de ramener la question de la convergence à une série à termes positifs.



La réciproque est fautive. Il existe des séries dites semi-convergente qui sont convergentes sans être absolument convergentes. Voir l'Exemple 2.7 plus loin.

DÉFINITION 2.3: SÉRIE À TERMES POSITIFS

On dit qu'une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout n .

REMARQUE 2.4 : 1. Si $u_n \leq 0$ pour tout n , on peut prendre $v_n = -u_n \geq 0$. Ainsi l'important est surtout que le terme général soit de signe constant.

2. Si $u_n \geq 0$ à partir de $n \geq n_0$, alors d'après la Proposition 2.4 les critères ci-dessous s'appliquent aussi.



Les critères de convergence qui suivent ne sont valables que pour les séries à termes positifs. On se gardera bien de les appliquer aux autres séries plus générales.

PROPOSITION 2.11

Soit $(u_n)_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout n et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Alors

1. $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_n$ est majorée.
2. $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Démonstration. On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0,$$

donc la suite $(S_n)_n$ est croissante. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. $\square$

REMARQUE 2.5 : Dans le cas où la suite S_n diverge, on pourra noter $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$, mais on retiendra que cette notation n'est valable que pour les séries à termes positifs. En général, une série peut être divergente sans avoir de limite.

PROPOSITION 2.12: COMPARAISON

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors, si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.
Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Si $\sum v_n$ converge alors la suite $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$ est majorée, d'après la proposition précédente. De plus, pour tout n

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k = S'_n$$

Donc S_n est majorée, donc $\sum u_n$ converge. $\square$

EXEMPLE 2.5 : Étudions la série

$$\sum u_n, \quad u_n = \frac{1}{2^n(2 + \cos(n))}.$$

Pour tout n on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3$. En particulier $u_n \geq 0$. De plus on a

$$u_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, c'est la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, qui est une série à termes positifs. Donc, par comparaison $\sum u_n$ converge.

PROPOSITION 2.13: ÉQUIVALENCE

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites tel que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout n . Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergente ou divergente).

Démonstration. Puisque $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, il existe $(\omega_n)_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = v_n(1 + \omega_n)$$

La suite $1 + \omega_n$ converge ; donc en particulier elle est bornée. Donc il existe $C > 0$ tel que $0 \leq u_n \leq C v_n$. Par comparaison, si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. De même on a $v_n \sim u_n$, donc il existe $C' > 0$ tel que $0 \leq v_n \leq C' u_n$. Par comparaison, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge. $\square$

REMARQUE 2.6 : Les critères ci-dessus permettent de déduire la convergence d'une série en utilisant une série plus simple, mais il ne nous disent rien sur la valeur limite de la série lorsqu'elle est convergente.

EXEMPLE 2.6 : Considérons les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a $u_n \geq 0, v_n \geq 0$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. En récrivant

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

la première série se calcul par somme télescopique :

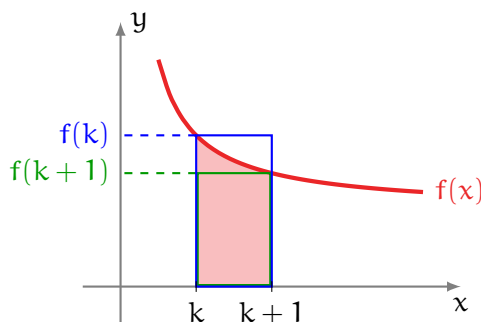
$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Donc $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} = 1$. On en déduit que $\sum v_n$ est convergente, par contre on ne sait rien sur la valeur de la somme infinie.

LEMME 2.1: COMPARAISON SOMME-INTÉGRALE

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et décroissante. Alors, pour tout $n, m \geq 0$

$$\int_n^{n+m+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{n+m} f(k) \leq \int_{n-1}^{n+m} f(t) dt$$



Démonstration. Soit $k \geq 0$ et $t \in [k, k+1]$. f est décroissante donc $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant entre k et $k+1$ on en déduit

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

Si on somme l'inégalité de gauche de $k = n-1$ à $n+m-1$ on obtient, avec la relation de Chasles, puis en changeant d'indice dans la somme :

$$\sum_{k=n-1}^{n+m-1} f(k+1) \leq \int_{n-1}^{n+m} f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{n+m} f(k) \leq \int_{n-1}^{n+m} f(t) dt.$$

De même, en sommant l'inégalité de droite de $k = n$ à $n+m$ on obtient

$$\int_n^{n+m+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{n+m} f(k).$$

□

PROPOSITION 2.14: SÉRIES DE RIEMANN

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Pour $\alpha = 1$ on retrouve la série harmonique, qui est divergente d'après la Proposition 2.9.

Soit $\alpha \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n} \in [0, 1]$, donc

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Donc, par comparaison, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Soit $\alpha > 1$, on applique le lemme précédent à la fonction $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ décroissante. Avec $n = 2$ et $N = m + 2$ on a donc

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Donc, après intégration

$$\frac{(N+1)^{-\alpha+1} - 2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{N^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}.$$

Puisque $\alpha > 1$ alors $\frac{N^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ est bornée lorsque $N \rightarrow \infty$. Donc $S_N = \sum_{k=2}^N \frac{1}{n^\alpha}$ est bornée pour tout N . C'est une série à termes positifs donc elle converge.

Remarque : Si $\alpha < 1$ alors $\frac{(N+1)^{-\alpha+1}-2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \rightarrow \infty$ et on retrouve que $S_N \rightarrow \infty$. $\square$

PROPOSITION 2.15: SÉRIES DE BERTRAND

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ est appelée série de Bertrand. Si $\alpha > 1$ elle converge et si $\alpha < 1$ elle diverge. Pour $\alpha = 1$, la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

Démonstration. En exercice. $\square$

2.3. Critères de convergence

PROPOSITION 2.16: RÈGLE DES RACINES DE CAUCHY

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$ existe. Alors

1. Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Supposons $\ell < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < \ell + \varepsilon < 1$. Puisque $|u_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| |u_n|^{\frac{1}{n}} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leq \ell + \varepsilon$, donc $|u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^n$. Or $\sum (\ell + \varepsilon)^n$ est une série géométrique convergente car $0 < \ell + \varepsilon < 1$. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

Supposons maintenant $\ell > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Comme dans le cas précédent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left| |u_n|^{\frac{1}{n}} - \ell \right| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. En particulier on a $|u_n|^{\frac{1}{n}} \geq \ell - \varepsilon$, donc $|u_n| \geq (\ell - \varepsilon)^n$ avec $\ell - \varepsilon > 1$. Donc $|u_n| \rightarrow +\infty$, donc la suite ne tend pas vers 0. Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. $\square$

PROPOSITION 2.17: RÈGLE DU QUOTIENT DE D'ALEMBERT

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell$$

existe. Alors

1. Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Supposons $\ell < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < \ell + \varepsilon < 1$. Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_{n+1}| \leq (\ell + \varepsilon)|u_n|$$

Par récurrence sur n , on en déduit $|u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N}|u_N|$ pour $n \geq N$. Or $\sum (\ell + \varepsilon)^{n-N}$ est une série géométrique convergente car $0 < \ell + \varepsilon < 1$. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

Supposons maintenant $\ell > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1}| \geq (\ell - \varepsilon)|u_n|$ pour $n \geq N$. On en déduit $|u_n| \geq (\ell - \varepsilon)^{n-N}|u_N|$ pour $n \geq N$, avec $\ell - \varepsilon > 1$. Donc $|u_n| \rightarrow +\infty$, donc la suite ne tend pas vers 0. Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. $\square$

REMARQUE 2.7 : $\odot$ Pour les deux critères ci-dessus, dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut pas conclure : tous les cas sont possibles. Par exemple, pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a

$$|u_n|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) \rightarrow 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1,$$

alors que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. D'autre part, avec $u_n = \frac{1}{n^2}$ on a

$$|u_n|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-2\frac{\ln(n)}{n}\right) \rightarrow 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1$$

alors que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

- $\odot$ Ces deux critères de convergence sont aussi très utiles pour étudier les séries à termes positifs. Dans ce cas, on peut enlever les $|\cdot|$ dans le calcul de ℓ .

PROPOSITION 2.18: CRITÈRE EN n^α

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n à valeurs réelles.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_*$, alors $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow \pm\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Dans les deux cas, la suite est de signe constant à partir d'un certain rang. Quitte à considérer $-u_n$, on peut supposer $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. On peut donc se ramener aux critères de comparaisons pour les séries positives et utiliser les séries de Riemann. 1. On a $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum u_n$ converge. 2. On a $\frac{1}{n^\alpha} = o_{+\infty}(u_n)$ donc il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \leq C u_n$ pour $n \geq N$. Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc par comparaison $\sum u_n$ diverge. $\square$



Le critère précédent n'est qu'une combinaison de critères de comparaisons généraux établis plus haut. Dans la pratique, le critère en n^α n'est donc pas indispensable.

DÉFINITION 2.4: SÉRIE ALTERNÉE

Une série de la forme $\sum (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$ pour tout n est appelée **série alternée**.

PROPOSITION 2.19: CRITÈRE DE LEIBNIZ

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante et positive telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$. Alors la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Cette proposition est une conséquence d'un résultat plus général, voir Théorème 2.1 ci-dessous.

EXEMPLE 2.7 : La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge car $v_n = \frac{1}{n}$ satisfait les critères ci-dessus. En revanche, cette série n'est pas absolument convergente car la série harmonique diverge. C'est un exemple typique de série **semi-convergente**.

THÉORÈME 2.1: SOMMATION D'ABEL

Soit $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que

1. (a_n) est décroissante, positive et telle que $a_n \rightarrow 0$
2. Les sommes partielles de (b_n) sont bornées :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq M$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. On effectue un changement dans la sommation en posant $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Par hypothèse $|B_n| \leq M$. De plus, $b_0 = B_0$ et pour $n \geq 1$ on a $b_n = B_n - B_{n-1}$. On écrit donc la somme partielle

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\ &= a_0 B_0 + a_1 (B_1 - B_0) + \dots + a_{n-1} (B_{n-1} - B_{n-2}) + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0 (a_0 - a_1) + B_1 (a_1 - a_2) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_n a_n. \end{aligned}$$

D'une part, (B_n) est bornée et $a_n \rightarrow 0$ donc $B_n a_n \rightarrow 0$. D'autre part, $|B_k (a_k - a_{k+1})| \leq M (a_k - a_{k+1})$ car B_n est bornée par M et (a_n) est décroissante. Donc, par somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |B_k (a_k - a_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = M (a_0 - a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M a_0.$$

Donc, par comparaison, $\sum B_k (a_k - a_{k+1})$ est absolument convergente. Donc (S_n) converge, donc $\sum a_n b_n$ converge. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.19. On pose $a_n = v_n$ qui est décroissante, positive et telle que $a_n \rightarrow 0$, et $b_n = (-1)^n$. De plus on a $\sum_{k=0}^n b_k = 1$ si n est pair et 0 sinon, donc $\sum_{k=0}^n b_k$ est bornée. Le théorème de sommation d'Abel s'applique, donc $\sum (-1)^n v_n$ converge. $\square$

EXEMPLE 2.8 : On considère la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$. Si $e^{i\theta} = 1$ on retrouve la série harmonique, qui diverge. Si $e^{i\theta} \neq 1$ on pose $a_n = \frac{1}{n}$ qui est positive, décroissante avec $a_n \rightarrow 0$, et $b_n = e^{in\theta}$. On a, par série géométrique,

$$\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{1 + |e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|},$$

donc $\sum_{k=0}^n b_k$ est bornée. Donc le théorème de sommation d'Abel s'applique et $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge si $e^{i\theta} \neq 1$. C'est un autre exemple de série semi-convergente.

Remarque : si $e^{i\theta} = -1$ on retrouve la série harmonique alternée.

PROPOSITION 2.20

Soit $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est :

1. absolument convergente pour $\alpha > 1$
2. semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, et divergente si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.
3. grossièrement divergente pour $\alpha \leq 0$.

Démonstration. Laissée au lecteur. □

2.4. Compléments

On cherche à définir le produit de deux séries et étudier sa convergence. Commençons par des sommes finies, et réarrangeons les termes en fonction de la somme des indices. Pour deux termes on a :

$$(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = \underbrace{a_0b_0}_{\text{somme 0}} + \underbrace{a_0b_1 + a_1b_0}_{\text{somme 1}} + \underbrace{a_1b_1}_{\text{somme 2}},$$

où la somme des indices vaut respectivement 0, 1 et 2. Pour trois termes on a

$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = \underbrace{a_0b_0}_{\text{somme 0}} + \underbrace{a_0b_1 + a_1b_0}_{\text{somme 1}} + \underbrace{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0}_{\text{somme 2}} + \underbrace{a_1b_2 + a_2b_1}_{\text{somme 3}} + \underbrace{a_2b_2}_{\text{somme 4}},$$

où la somme des indices vaut respectivement 0, 1, 2, 3 et 4. Pour n termes, on a donc

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

DÉFINITION 2.5: PRODUIT DE CAUCHY

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. On appelle série produit ou **produit de Cauchy** la série $\sum c_n$ avec

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}.$$

THÉORÈME 2.2

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Démonstration. Admise. □

EXEMPLE 2.9 : Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente, et $\sum b_n$ avec $b_n = \frac{1}{2^n}$, qui converge absolument. Le produit de Cauchy est la série de terme général

$$c_n = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{2^{n-i}}$$

La série $\sum c_n$ est absolument convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

DÉFINITION 2.6: SÉRIE COMMUTATIVEMENT CONVERGENTE

On dit que la série $\sum u_n$ est commutativement convergente si pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge.

THÉORÈME 2.3

La série $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente. Dans ce cas, pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$$

Démonstration. Admise. □

COROLLAIRE 2.3

Si $\sum u_n$ est seulement semi-convergente avec $u_n \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell.$$

REMARQUE 2.8 : Lorsque la série n'est pas absolument convergente, des phénomènes étranges apparaissent. Par exemple, la série harmonique alternée converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Notons S sa somme (en fait $S = \ln 2$). Regroupons les termes par paquets de 3. En simplifiant, on trouve la moitié de la somme !

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

3 INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Pré-requis : Tout le chapitre du cours d'Analyse 2 sur l'intégrale de Riemann. Développement limités et équivalents simples des fonctions usuelles et de leur combinaisons.



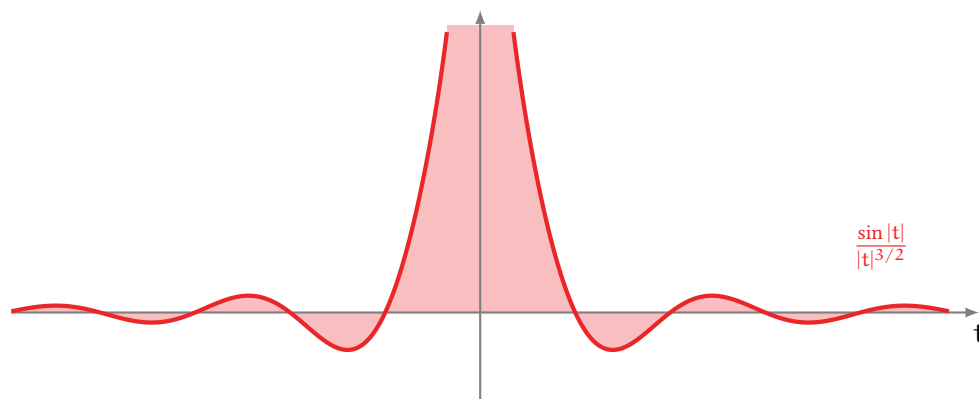
Objectifs :

- Définition de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$ et $]a, b]$, et intégrale doublement généralisée.
- Nature des intégrales généralisées classiques : $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en 0 et $+\infty$.
- Convergence absolue et critères de convergence pour les fonctions positives.

Motivation

L'intégrale de Riemann vue en première année est définie sur un **intervalle fermé et borné**. De plus, on rappelle qu'une fonction Riemann intégrable est nécessairement bornée. Il existe pourtant de nombreux cas où l'on peut étendre la notion d'intégrale, avec de nombreuses applications en probabilités, en physique,... Le but de ce chapitre est donc de définir ces **intégrales généralisées** et d'étudier leur propriétés.

Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin |t|}{|t|^{3/2}}$. Peut-on donner un sens à l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$?



- On commence d'abord par identifier les **points incertains** : $+\infty$, soit $-\infty$ d'une part (intervalle non borné), et $t = 0$ d'autre part (fonction non bornée). En dehors de ces points, la fonction f est continue donc Riemann intégrable.
- On découpe ensuite chaque intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'un **seul point incertain**, placé à l'une des deux bornes. Ici, il faut découper les deux intervalles de définition $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en 4 sous-intervalles : 2 pour isoler $-\infty$ et $+\infty$, et 2 autres pour le point incertain 0.
- On écrit ensuite pour cet exemple ($t = 1$ et -1 sont arbitraires) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt ,$$

et on étudie ensuite chaque terme séparément.

Par ce découpage, et par changement de variable $t \mapsto -t$, on se ramène donc à des intégrales de deux types :

1. Intégrale sur $[a, +\infty[$.
2. Intégrale sur $]a, b]$, avec la fonction non bornée en a .

On peut ensuite combiner 1 et 2 pour étudier n'importe quel cas plus général. Pour simplifier, on se restreindra au cas des fonction continues, mais une théorie analogue existe pour les fonctions localement intégrables.

L'étude des intégrales généralisées est proche des séries numériques : on retrouve par exemple les notions de convergence absolue et des résultats de comparaisons pour les fonctions positives. Mais le calcul intégral a aussi ses spécificités. Ainsi, il permet dans certains cas de ramener une question de convergence à un calcul de primitives.

3.1. Intervalle non borné

On commence par les intégrales de la forme $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, où $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est **continue sur l'intervalle** $[a, +\infty[$.

DÉFINITION 3.1

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **converge** si la limite lorsque $X \rightarrow +\infty$ de l'expression $\int_a^X f(x) dx$ existe et est un nombre réel. Dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx.$$

Lorsque l'expression $\int_a^X f(x) dx$ n'a pas de limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **diverge**.



On parle dans ce cas d'**intégrale généralisée** ou d'**intégrale impropre** (convergente ou divergente).

REMARQUE 3.1 : Lorsque l'intégrale est divergente, elle peut tendre vers $\pm\infty$ mais aussi ne pas avoir de limite.

Dans certains cas, on peut utiliser une primitive pour étudier la convergence de l'intégrale impropre. Un exemple **fondamental** est traité dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Pour tout $X > 1$, on a

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^X = \frac{X^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Cette dernière expression n'a une limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$ que si $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_1^X \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_1^X = \log(X),$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $X \rightarrow +\infty$. □

REMARQUE 3.2 : Pour $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $] -\infty, b]$, on définit de même l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(x) dx$: celle-ci converge si la limite lorsque $X \rightarrow -\infty$ de l'expression $\int_X^b f(x) dx$ existe et est un nombre réel, et diverge sinon.

Dans la suite de la Section 1, on donne les énoncés pour des intégrales généralisées de la forme $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Tous les énoncés restent valables bien entendu pour des intégrales généralisées de la forme $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, mutatis mutandis.

PROPOSITION 3.2: LINÉARITÉ

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx$ converge et vaut

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Démonstration. La preuve est un simple passage à la limite, partant de

$$\int_a^X (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^X f(x) dx + \mu \int_a^X g(x) dx.$$

□

PROPOSITION 3.3: POSITIVITÉ

Soit $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ convergent. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

En particulier si $f \geq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq 0$.

Démonstration. Utiliser la positivité de l'intégrale de Riemann sur un segment et passer à la limite. □

Comme pour les séries, la question principale pour les intégrales généralisées est celle de la convergence : le calcul explicite de l'intégrale généralisée étant parfois (souvent!) impossible. La proposition suivante exprime le fait que la convergence d'une intégrale généralisée ne dépend que du comportement à l'infini de la fonction.

PROPOSITION 3.4

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $b \geq a$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ converge. Dans ce cas,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \quad (3.1)$$

Démonstration. Pour tout $X > b$, on a l'égalité suivante, qui n'est autre que la relation de Chasles :

$$\int_a^X f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^X f(x) dx. \quad (3.2)$$

Par conséquent, les expressions $\int_a^X f(x) dx$ et $\int_b^X f(x) dx$, qui ne diffèrent que de la constante $\int_a^b f(x) dx$, ont même comportement (convergence ou divergence) lorsque $X \rightarrow +\infty$. En passant à la limite dans (3.2), on trouve l'égalité (3.1). $\square$

PROPOSITION 3.5: RESTE D'UNE INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE CONVERGENTE

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge. Alors, **reste de l'intégrale généralisée** :

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

existe et satisfait $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$.

DÉFINITION 3.2

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge.

THÉORÈME 3.1

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée est absolument convergente, alors l'intégrale généralisée est convergente.

Démonstration. Rappelons que pour montrer que la limite de $\int_a^X f(x) dx$ lorsque $X \rightarrow +\infty$ existe, il suffit de montrer que, quelle que soit la suite (X_n) tendant vers $+\infty$, la suite $(\int_a^{X_n} f(x) dx)$ possède une limite (réelle).

Fixons donc une suite (X_n) tendant vers $+\infty$ et montrons que la limite de $\int_a^{X_n} f(x) dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ existe.

Pour prouver cela, on remarque d'abord que, comme l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, la suite $z_n = \int_a^{X_n} |f(x)| dx$ converge, et donc est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, |z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon \quad (3.3)$$

avec

$$z_{n+p} - z_n = \int_a^{X_{n+p}} |f(x)| dx - \int_a^{X_n} |f(x)| dx = \int_{X_n}^{X_{n+p}} |f(x)| dx.$$

Montrons maintenant que la suite de terme général $s_n = \int_a^{X_n} f(x) dx$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et n_0 défini par (3.3). Alors, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$, on a

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \int_{X_n}^{X_{n+p}} f(x) dx \right| \leq \int_{X_n}^{X_{n+p}} |f(x)| dx = |z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon$$

grâce à l'inégalité triangulaire et (3.3). Donc (s_n) est de Cauchy, ce qui prouve que la suite $(\int_a^{X_n} f(x) dx)$ a une limite finie. $\square$



Contrairement au cas des suites, il n'est pas nécessaire que la fonction f tende vers 0 en $+\infty$ pour que l'intégrale converge.

Fonction positives. Le théorème de convergence absolue permet de réduire l'étude de convergence aux fonctions positives. La remarque suivante est l'équivalent pour les intégrales généralisées de la Proposition 2.11 pour les séries.

PROPOSITION 3.6

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive**. Alors la fonction $X \mapsto F(X) = \int_a^X f(x) dx$ est croissante sur $[a, +\infty[$. Donc

- ⊙ Si F est majorée, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- ⊙ Si F n'est pas majorée, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge (vers $+\infty$).

Démonstration. Puisque f est continue sur $[a, +\infty[$ alors F est dérivable et l'on a $F'(X) = f(X) \geq 0$. Donc F est croissante. De plus F est continue. Donc soit F est majorée et dans ce cas $F(X)$ converge lorsque $X \rightarrow \infty$, soit F est non majorée et $F(X) \rightarrow +\infty$ lorsque $X \rightarrow \infty$. $\square$

PROPOSITION 3.7: CRITÈRE DE COMPARAISON

Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et **positives** sur $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que

$$\forall x \geq b, \quad f(x) \leq g(x).$$

Alors

- ⊙ si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge aussi,
- ⊙ si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge aussi.

Démonstration. On considère, pour $X > a$, les fonctions

$$F(X) = \int_a^X f(x) dx, \quad G(X) = \int_a^X g(x) dx.$$

Ces fonctions sont croissantes car f et g sont positives. De plus, par positivité de l'intégrale on a

$$\forall X > a, \quad F(X) \leq G(X)$$

Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, alors G est bornée. Donc F est bornée, donc $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge d'après la Proposition 3.6. Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, alors F est non majorée. Donc G est non majorée et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge d'après la Proposition 3.6. $\square$

PROPOSITION 3.8: CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE

Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et **positives** sur $[a, +\infty[$. On suppose que les fonctions f et g sont équivalentes en $+\infty$. Alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge.

Démonstration. Si $f \sim g$ en $+\infty$ alors $f(x) = (1 + \omega_g(x))g(x)$ avec $\omega_g(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. En particulier $1 + \omega_g$ est bornée pour x suffisamment grand : $\forall x > A, |(1 + \omega_g)(x)| \leq M$. Donc pour $x > A$ on a $|f(x)| \leq M|g(x)|$. Ainsi, puisque f et g sont positives, d'après la Proposition 3.7, si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Réciproquement, on a de même $g \sim f$, donc il existe $A' > 0$ et $M' > 0$ tels que pour $x > A$ on a $|g(x)| \leq M'|f(x)|$, donc si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge. $\square$

EXEMPLE 3.1 : Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$$

On écrit d'abord $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-t/2} e^{-t/2}$, et on sait par croissance comparée que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha e^{-t/2} = 0$. En particulier, il existe $A > 0$ tel que : $\forall t > A, t^\alpha e^{-t/2} \leq 1$. On en déduit

$$\forall t > A \quad t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge. En effet :

$$\int_1^x e^{-t/2} dt = \left[-2e^{-t/2} \right]_1^x = 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} = 2e^{-1/2}.$$

On peut donc appliquer la Proposition 3.7. Puisque $t \mapsto e^{-t/2}$ et $t \mapsto t^\alpha e^{-t}$ sont continues et **positives**, et que $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge aussi.

EXEMPLE 3.2 : L'intégrale suivante est convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt.$$

En effet

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t},$$

et nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge, alors notre intégrale converge car les deux fonction considérées sont continues et positives.

Fonctions oscillantes. Comme pour les séries numériques, la situation est plus compliquée en l'absence de convergence absolue.

DÉFINITION 3.3

Une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est dite **semi-convergente** si elle est convergente sans être absolument convergente.

Les critères de comparaison et équivalence ne sont pas utilisables pour les fonction oscillantes, en revanche on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.9: SOMMATION D'ABEL

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ soit bornée sur $[a, +\infty[$. Alors l'intégrale suivante converge :

$$\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt.$$

Démonstration. Par hypothèse, G est bornée, donc il existe M tel que, pour tout x , $|G(x)| \leq M$. Effectuons maintenant une intégration par parties :

$$\int_a^x f(t) g(t) dt = \left[f(t) G(t) \right]_a^x - \int_a^x f'(t) G(t) dt .$$

Comme G est bornée et f tend vers 0, le terme entre crochets converge. Montrons maintenant que le second terme converge aussi, en vérifiant que cette intégrale est absolument convergente. On a :

$$|f'(t) G(t)| = |f'(t)| |G(t)| \leq (-f'(t)) M ,$$

car f est décroissante (donc $f'(t) \leq 0$) et $|G|$ est bornée par M . Par la Proposition 3.7 de comparaison, il suffit donc de montrer que $\int_a^{+\infty} -f'(t) dt$ est convergente. Or :

$$\int_a^x -f'(t) dt = f(a) - f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a) - f(x)) = f(a) .$$

□

REMARQUE 3.3 : Ce résultat est à comparer avec le Théorème 2.1 de sommation d'Abel pour les séries. En pratique, il s'agit d'une simple intégration par partie, donc il n'est pas indispensable de retenir son énoncé.

EXEMPLE 3.3 : Avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin(t)$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

converge en appliquant le théorème précédent. Mais on peut aussi retrouver le résultat directement en intégrant par parties.

3.2. Intervalle borné semi-ouvert

On s'intéresse ici à l'intégrale de la forme $\int_a^b f(x) dx$, où $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $]a, b]$, mais pas nécessairement sur l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale n'est donc plus définie au sens classique.

DÉFINITION 3.4

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge si la limite lorsque $X \rightarrow a^+$ de $\int_X^b f(x) dx$ existe et est un nombre réel. On note alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{X \rightarrow a^+} \int_X^b f(x) dx$$

REMARQUE 3.4 : Si f est continue sur tout le segment $[a, b]$, alors elle est Riemann intégrable et $X \mapsto \int_X^b f(x) dx$ est continue. A la limite, on retrouve donc

$$\lim_{X \rightarrow a^+} \int_X^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx ,$$

de sorte que l'intégrale de Riemann et l'intégrale généralisée coïncident bien dans ce cas.

Comme dans le cas d'un intervalle non borné, on peut utiliser les primitives pour étudier la convergence. Un exemple fondamental est donné dans l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.10

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Pour tout $X > 0$, on a

$$\int_X^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_X^1 = \frac{1 - X^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Cette dernière expression n'a une limite finie, lorsque $X \rightarrow 0$, que si $\alpha < 1$. Dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_X^1 \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_X^1 = -\log(X),$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $X \rightarrow 0$. □

REMARQUE 3.5 : Pour $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit de même l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ comme la limite lorsque $X \rightarrow b^-$ de $\int_a^X f(x) dx$, lorsqu'elle existe. On pourra adapter les énoncés qui suivent au cas d'une intégrale généralisée "à droite".

Les intégrales généralisées sur un intervalles borné vérifient les mêmes propriétés que dans le cas d'un intervalle non borné. Les preuves sont analogues, en remplaçant les limites en $+\infty$ par des limites en a^+ .

PROPOSITION 3.11

Soit $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et tel que les intégrales généralisées $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ convergent.

- ⊙ Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx$ converge et vaut

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

- ⊙ Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

PROPOSITION 3.12

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $c \in]a, b]$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^c f(x) dx$ converge. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

DÉFINITION 3.5

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)| dx$ converge. On dit qu'elle est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

THÉORÈME 3.2

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée est absolument convergente, alors elle est convergente.

Fonctions positives. Les critères sont très proches de ceux déjà rencontrés.

PROPOSITION 3.13: COMPARAISON

Soient $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et **positives** sur $]a, b]$. On suppose que

$$\forall x \in]a, b], \quad f(x) \leq g(x).$$

Alors

- ⊙ si l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge aussi,
- ⊙ si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ diverge aussi.

PROPOSITION 3.14: ÉQUIVALENCE

Soient $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et **positives** sur $]a, b]$. On suppose que les fonctions f et g sont équivalentes en a^+ . Alors $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x) dx$ converge.

EXEMPLE 3.4 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}} dt.$$

En effet on a :

$$\frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}} = ((-\ln t)^\alpha t^{1/4}) t^{-3/4}.$$

On sait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln t)^\alpha t^{1/4} = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, par croissance comparée.

En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall t \in]0, \varepsilon], (-\ln t)^\alpha t^{1/4} \leq 1$. On en déduit

$$\forall t \in]0, \varepsilon] \quad \frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}} \leq t^{-3/4}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 t^{-3/4} dt$ converge d'après la Proposition 3.10. On conclut en utilisant le critère de comparaison, car les fonctions considérées sont **positives**.

Fonctions oscillantes. On pourrait énoncer un résultat analogue à la Proposition 3.9, mais cela n'est pas vraiment utile. D'une part les fonctions auxquelles il s'appliquerait se rencontrent rarement, et d'autre part, il est en général facile de se ramener à un problème sur $[c, +\infty[$, par le changement de variable $t \mapsto u = \frac{1}{t-a}$.

EXEMPLE 3.5 : L'intégrale suivante

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{t}}{t} dt$$

n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente. Pour le voir, effectuons le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{u}$:

$$\int_x^1 \frac{\sin \frac{1}{t}}{t} dt = \int_{1/x}^1 u \sin u \frac{-1}{u^2} du = \int_1^{1/x} \frac{\sin u}{u} du.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$ alors $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Or, nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ est convergente, sans être absolument convergente.

3.3. Intégrale doublement généralisée

On appelle intégrale doublement généralisée une intégrale de la forme $\int_a^b f(x) dx$, où f est continue sur $]a, b[$, avec $a = -\infty$ ou f non continue en a , et $b = +\infty$ ou f non continue en b .

Par exemple, $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est une intégrale doublement généralisée.

L'analyse de ces intégrales se ramène à l'analyse de deux intégrales généralisées.

DÉFINITION 3.6

Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(x) dx$ et $\int_c^b f(x) dx$ convergent. Dans ce cas, elles convergent en fait quel que soit le choix de c dans $]a, b[$.

Par définition, le réel $\int_a^b f(x) dx$ est alors donné par

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

le résultat ne dépendant pas du choix de c .

Si l'une des intégrales $\int_a^c f(x) dx$ ou $\int_c^b f(x) dx$ diverge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

EXEMPLE 3.6 : Par exemple, pour analyser l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il faut étudier les intégrales $\int_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pour un réel $c \in]-1, 1[$ que l'on peut choisir (ici $c = 0$ convient). On note que les intégrales $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ convergent toutes les deux, et on peut donc dire que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.

EXEMPLE 3.7 : Voici un autre exemple : pour étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, on "doit" étudier la convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. La première est convergente, mais pas la seconde. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge donc.



La convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ n'est pas équivalente au fait que $\int_{-X}^X f(x) dx$ ait une limite lorsque $X \rightarrow +\infty$. Par exemple $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ est clairement divergente selon la définition ci-dessus, alors que pour tout X réel, $\int_{-X}^X x dx = 0$, donc la limite de $\int_{-X}^X x dx$ est trivialement définie lorsque $X \rightarrow +\infty$!

4 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Pré-requis L1 : Limite de suites et de fonctions, Continuité, Dérivabilité des fonctions (Cours d'Analyse 1 et 2)



Objectifs :

- Vocabulaire des suites et séries de fonctions
- Convergence simple, uniforme et normale
- Quatre propriétés de la convergence uniforme (pour les suites et pour les séries)

Motivation

Dans ce chapitre, on reprend les notions de suite et de série, mais les nombres $u_n \in \mathbb{R}$ deviennent des fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On mélange ainsi un indice $n \in \mathbb{N}$ et la variable $x \in I$, avec plusieurs limites possibles. Remarquons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \quad \neq \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

Se pose alors le problème de définir la convergence d'une suite de fonctions. On verra qu'il existe en fait plusieurs notions possibles, avec des propriétés distinctes.

Les applications sont multiples : les suites de fonctions permettent d'approcher certaines fonctions par des fonctions plus « simples », comme par exemple le théorème d'approximation de Weierstrass. Les séries de fonctions permettent de définir de nouvelles fonctions, telle la célèbre fonction ζ de Riemann, mais aussi de donner un sens et calculer des expressions comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

Enfin, ce chapitre est le point de départ pour étudier certaines familles de séries de fonctions fondamentales, notamment les séries entières et les séries trigonométriques. Objets d'étude en soi, ces séries sont aussi très utiles dans la résolution de certaines équation différentielles.

4.1. Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

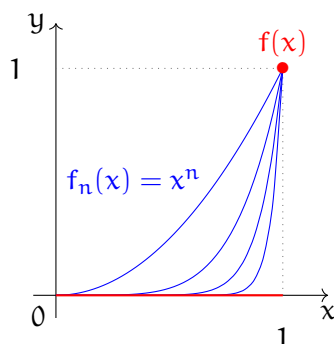
Dans toute la suite, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 4.1

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonction (f_n) **converge simplement** vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))$ converge vers le réel $f(x)$. Autrement dit,

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

REMARQUE 4.1 : Ici on fixe d'abord $x \in I$ puis on étudie $u_n = f_n(x)$ comme une suite numérique. A priori, le $n_0 \in \mathbb{N}$ dépend de x . On parle aussi parfois de **convergence ponctuelle**. Cette notion de convergence est la plus naturelle à définir mais elle n'a pas de bonnes propriétés. En particulier, elle ne préserve pas la continuité à la limite.



EXEMPLE 4.1 : La suite de fonction (f_n) définie par

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = x^n \end{cases},$$

converge simplement vers $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Toutes les fonctions f_n sont continues mais la limite f ne l'est pas.

DÉFINITION 4.2

On dit qu'une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ **converge uniformément** vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

REMARQUE 4.2 : Fixons ε . Pour la convergence simple, l'indice n_0 dépend de x , tandis que dans la convergence uniforme, n_0 n'en dépend pas : on peut choisir un n_0 uniforme, qui convient pour tous les x).

PROPOSITION 4.1

Si (f_n) converge uniformément vers f , (f_n) converge simplement vers f .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in I$. (f_n) converge uniformément vers f , soit $n_0 \in \mathbb{N}$ provenant de la définition de la convergence uniforme. Pour $n \geq n_0$ on a en particulier $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, donc (f_n) converge simplement vers f . $\square$



La réciproque est fautive : il existe des suites de fonctions qui convergent simplement, mais pas uniformément.

EXEMPLE 4.2 : La suite de fonction (f_n) de l'Exemple 4.1 converge simplement vers f mais pas uniformément. En effet, en posant $\varepsilon = 1/2$ et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on considère $n \geq n_0$ et $x > \frac{1}{2^n}$. On a alors $|f_n(x) - f(x)| = x^n > \frac{1}{2}$. Intuitivement, lorsque x s'approche de 1, pour avoir $|f_n(x) - f(x)|$ arbitrairement petit il faut n arbitrairement grand.

Une autre façon de formuler la convergence uniforme est la suivante :

PROPOSITION 4.2

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0, \quad \|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Démonstration. Laissez au lecteur □

REMARQUE 4.3 : Avec cette reformulation, on oublie la variable x , et les fonctions sont considérées comme des points. La convergence uniforme concerne donc les fonctions alors que la convergence simple concerne seulement les valeurs de ces fonctions.

En pratique, est souvent délicat de calculer explicitement la quantité $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$. En revanche, on peut la **majorer** par une expression simple. Afin de prouver la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers une fonction f , il suffit alors de trouver une suite réelle (ε_n) , qui tend vers 0, et telle que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour tout $x \in I$ et pour tout n .

EXEMPLE 4.3 : La suite de fonctions $g_n : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1/2]$ on a

$$|g_n(x) - 0| = |x^n| \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0,$$

Donc $\|g_n - 0\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En revanche, si on reprend l'Exemple 4.1 on a $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc il n'y a pas convergence uniforme dans ce cas.

4.2. Propriétés de la convergence uniforme

La convergence uniforme possède quatre propriétés essentielles qui concernent : la continuité, l'échange de limites, le passage sous l'intégrale et la dérivation.

THÉORÈME 4.1: LIMITE UNIFORME DE FONCTIONS CONTINUES

Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Autrement dit, si (f_n) est une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sur I , alors f est également continue sur I .

Démonstration. Fixons $x \in I$ et montrons que f est continue en x . Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f , il existe $n_1 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\forall y \in I, |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De plus, la fonction f_{n_1} étant continue en x , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in I, y \in [x - \eta, x + \eta] \Rightarrow |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$, avec $y \in [x - \eta, x + \eta]$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_{n_1}(y)| + |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

ce qui montre f continue en x , et ce, pour tout $x \in I$. □

THÉORÈME 4.2: INTERVERSION DES LIMITES

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \text{Adh}(I)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$. Alors f admet une limite en a et l'on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$. Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Démonstration. Étape 1. Montrons que (ℓ_n) converge. Soit $\varepsilon > 0$. Par la convergence uniforme de (f_n) , soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_0$ et $x \in I$. Soit $n, m \geq n_0$ et $x \in I$. On a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite $x \rightarrow a$ on en déduit $|\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq n_0$. Donc la suite (ℓ_n) est de Cauchy, donc elle converge. On note ℓ sa limite.

Étape 2. Montrons que $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la convergence uniforme de (f_n) , soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq n_0$ et $x \in I$. De plus, soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_1$, $|\ell_n - \ell| \leq \varepsilon/3$. Enfin, soit $n \geq \max(n_0, n_1)$. Puisque $f_n(x) \rightarrow \ell_n$ lorsque $x \rightarrow a$, soit $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$ alors $|f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon/3$. Donc pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$ on a

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Donc $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow a$. □

REMARQUE 4.4 : Par contraposée des deux théorèmes précédents, on retrouve le fait que la suite (f_n) de l'Exemple 4.1 ne converge pas uniformément. En effet, sa limite f n'est pas continue alors que les f_n sont continues. D'autre part on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \quad \neq \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

COROLLAIRE 4.1

Soit (f_n) une suite de fonctions **continues** de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et (x_n) une suite de I qui converge vers $x \in I$. Alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Le résultat suivant permet de "passer à la limite sous le signe intégral".

THÉORÈME 4.3: CONVERGENCE UNIFORME ET INTÉGRATION

On suppose que la suite de fonctions **continues** (f_n) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction (continue) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$



Ici on a $I = [a, b]$ fermé borné. Le résultat est **faux** sans hypothèse supplémentaire pour les intégrales généralisées.

Démonstration. Commençons par noter que les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur le segment $[a, b]$, donc Riemann intégrables. De plus la convergence uniforme de la suite (f_n) et la continuité des fonctions f_n impliquent la continuité de f sur $[a, b]$. Donc f est également Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) tend uniformément vers f sur $[a, b]$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall x \in [a, b], \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a).$$

Il suit que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon,$$

ce qui est le résultat escompté. $\square$

Par contre on ne peut pas “passer à la limite sous la dérivée” : même si une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ tend uniformément vers une fonction, la fonction peut ne pas être dérivable.

EXEMPLE 4.4 : La suite de fonctions $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Chaque f_n est $\mathcal{C}^\infty$ mais f est $\mathcal{C}^0$ car non dérivable en 0.

Il existe cependant des critères suffisants pour que la fonction limite soit dérivable.

THÉORÈME 4.4: CONVERGENCE UNIFORME ET DÉRIVATION

On suppose que $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tel que :

1. il existe un point $a \in I$ tel que la suite réelle $(f_n(a))$ converge vers un réel b ,
2. la suite de dérivées (f'_n) converge uniformément vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sur I .

Alors (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie par

$$f(x) = b + \int_a^x g(s) ds \quad \forall x \in I. \quad (4.1)$$

Si de plus l'intervalle I est fermé borné, i.e. $I = [c, d]$, $c \leq a \leq d$, alors (f_n) tend uniformément vers f sur I .

REMARQUE 4.5 : En particulier, g est continue comme limite uniforme de fonctions continues, ce qui permet de définir l'intégrale dans (4.1). On déduit de (4.1) que f est dérivable et que $f' = g$ sur I .

Démonstration. Soit $x \in I$. Alors, par convergence uniforme de (f'_n) vers g sur I , la suite (f'_n) converge uniformément vers g sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$). En utilisant le théorème de passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = b + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(s) ds = b + \int_a^x g(s) ds = f(x).$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I .

On suppose maintenant que $I = [c, d]$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n(a))$ tend vers $b = f(a)$, il existe n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1, |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon/2.$$

Comme (f'_n) tend uniformément vers g , il existe un rang n_2 tel que

$$\forall x \in [c, d], \forall n \geq n_2, |f'_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon/(2(d-c)).$$

Posons alors $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. On a, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(a) - f(a) + \int_a^x (f'_n(s) - g(s)) ds| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \left| \int_a^x |f'_n(s) - g(s)| ds \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (d - c) \frac{\varepsilon}{2(d - c)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme de (f_n) vers f . $\square$

4.3. Applications : approximation de fonction

Approximation polynomiale

THÉORÈME 4.5: WEIERSTRASS

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Démonstration. La preuve de ce théorème dépasse légèrement le cadre de ce cours. Il existe deux méthodes :

- ⊙ Une preuve qui utilise la convolution et une approximation de l'unité ⁽¹⁾
- ⊙ Une preuve probabiliste qui utilise les polynômes de Bernstein ⁽²⁾

La seconde preuve a l'avantage d'être constructive. Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on peut montrer que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

définit une suite de fonction qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x)$ est un polynôme de degré au plus n . On peut ensuite utiliser cette formule pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ via le changement de variable $x = a + t(b - a)$ avec $t \in [0, 1]$. $\square$

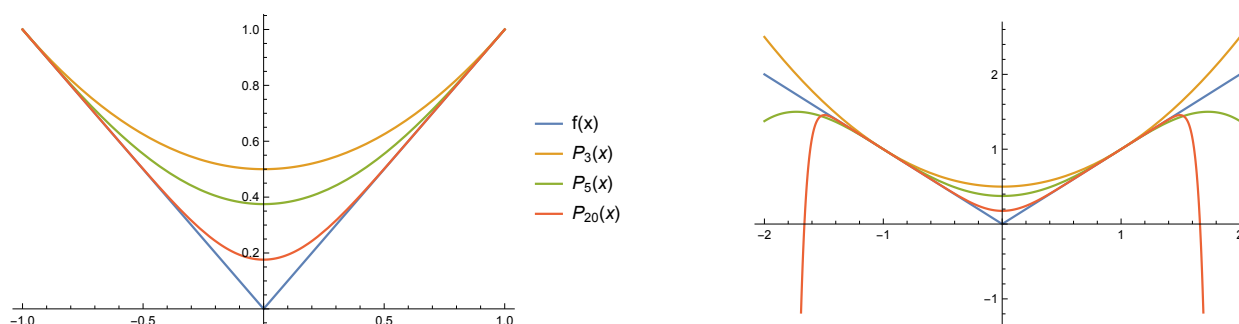


FIGURE 4.1 – Approximation de la fonction $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ par des polynômes de degrés respectifs 3, 5 et 20. Plus le degré augmente, plus le polynôme s'approche de la fonction : il y a convergence uniforme sur $[-1, 1]$. En revanche, l'approximation est très mauvaise en dehors de $[-1, 1]$.

REMARQUE 4.6 : Il s'agit d'un premier résultat d'approximation de ce cours. La convergence uniforme nous indique qu'on peut remplacer toute fonction f continue sur un segment par un polynôme P_n et que la différence $\|f - P_n\|_\infty$ est arbitrairement petite, pourvu que n soit suffisamment grand. Notons qu'un polynôme est l'une des fonction les plus simples à calculer, notamment par un ordinateur. En revanche, l'approximation n'est valable que pour un segment donné et est en général très mauvaise en dehors de ce segment, même si f et P_n y sont bien définis, voir Figure 4.1

(1). Voir par exemple : Gourdon - Analyse - Les maths en tête - Ellipses, 2008 - Problème 18 p.284

(2). Voir par exemple : Barbe, Ledoux - Probabilité (L3M1) - EDP Sciences, 2007 - p.59

Approximation affine par morceaux et réseaux de neurones. Il existe plusieurs méthodes pour approcher une fonction, qui convergent plus ou moins vite. On utilise ici une autre technique très générale d'approximation appelée interpolation. Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une subdivision $u_0, \dots, u_n$ de $[c, d]$ avec $u_0 = c$, $u_n = d$ et $u_i < u_{i+1}$, et on suppose connues les valeurs de la fonction en ces points. On note $v_i = f(u_i)$. On cherche une fonction f_n telle que $f_n(u_i) = v_i$ pour tout i . L'interpolation la plus simple consiste à prendre f_n affine par morceaux. Pour construire f_n , nous allons faire un petit détour par les réseaux de neurones artificiels.⁽³⁾ Notons que ceux-ci ne sont pas du tout nécessaires ici, mais cet exemple simple est un bon prétexte pour se familiariser avec la terminologie et faire le lien avec la convergence uniforme.

Un neurone artificiel associe une sortie $y \in \mathbb{R}$ à une liste d'entrée $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Il est caractérisé par une liste de poids $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, un biais b et une fonction d'activation $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le neurone effectue l'opération suivante :

$$y = \sigma \left(b + \sum_{i=1}^n w_i x_i \right).$$

La fonction d'activation σ est typiquement nulle jusqu'à un certain seuil x_0 , en dessous duquel le neurone ne s'active pas. Par exemple $\sigma(x) = \max(0, x)$ (auss appelé fonction ReLU), mais il en existe d'autres (sigmoïde, tanh, ...). Le biais b permet de décaler ce seuil. On peut aussi envoyer le seuil en $-\infty$ en prenant par exemple $\sigma(x) = x$, dans ce cas le neurone est toujours actif.

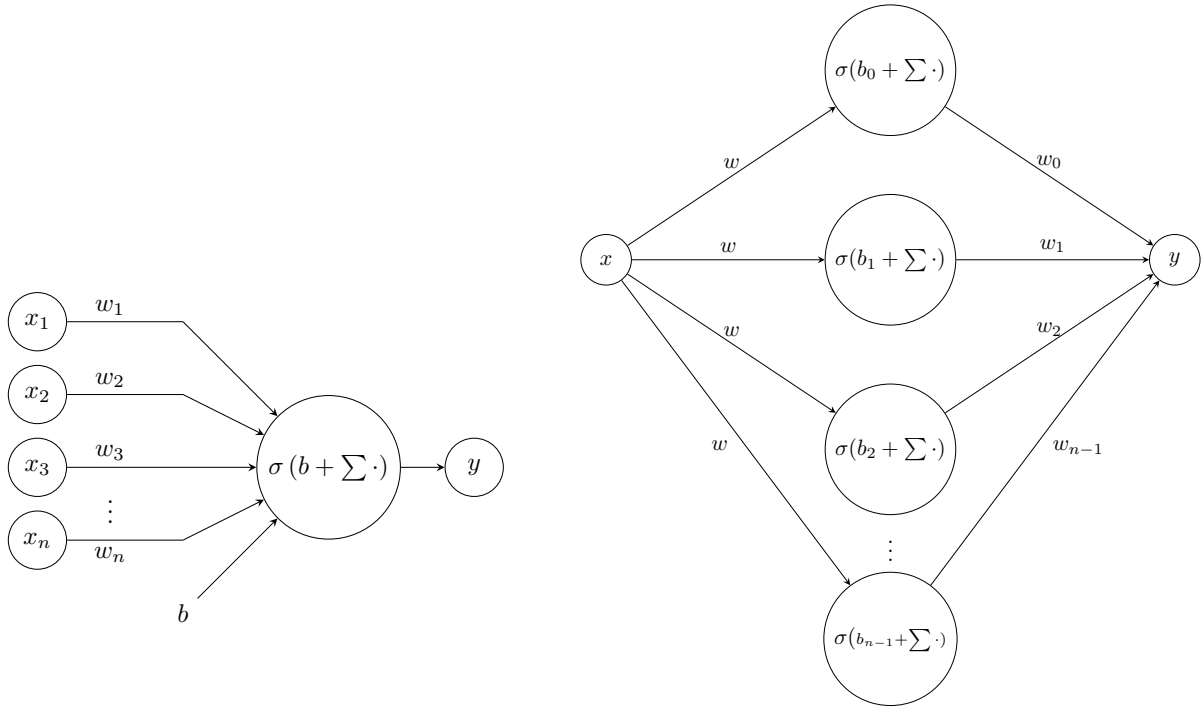


FIGURE 4.2 – Un neurone artificiel à gauche, et un réseau de neurones pour approximer la fonction f à droite.

On assemble ensuite tous ces neurones sur un réseau. Pour approximer notre fonction f , on considère le réseau de neurones qui contient :

- une entrée x
- une couche intermédiaire de n neurones. Chaque neurone $i \in \{0, \dots, n-1\}$ est associé à l'entrée x avec le même poids $w = 1$, un biais $b_i = -u_i$ et la même fonction d'activation ReLU donnée par $\sigma(x) = \max(0, x)$

(3). L'exemple qui suit est inspiré du Chapitre 5 de Liquet, B., Moka, S., and Nazareth, Y. (2024). The mathematical engineering of deep learning.

- ⊙ une sortie y , reliée aux neurones de la couche précédente par des poids $w_i = s_i - s_{i-1}$ avec

$$s_{-1} = 0, \quad s_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad (i \geq 0),$$

un biais $b = v_0$ et la fonction d'activation identité, $\sigma_0(x) = x$

Le réseau est représenté sur la Figure 4.2 (droite). En composant tous les neurones, on peut exprimer la sortie y en fonction de x , qu'on note $f_n(x)$. On a

$$y := f_n(x) = v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (s_i - s_{i-1}) \sigma(x - u_i).$$

REMARQUE 4.7 : Dans l'expression précédente, on remarque que si $x \in [u_i, u_{i+1}[$, les $i + 1$ premiers neurones de la couche intermédiaire sont actifs alors que les suivants sont éteints. Par ailleurs, avec $v_0 = f(c)$ et un changement d'indice dans la somme, on peut réécrire l'expression de f_n ainsi

$$f_n(x) = f(c) + \sum_{i=0}^{n-2} s_i (\sigma(x - u_i) - \sigma(x - u_{i+1})) + s_{n-1} \sigma(x - u_{n-1}).$$

L'expression $s_i (\sigma(x - u_i) - \sigma(x - u_{i+1}))$ vaut 0 si $x < u_i$, est une droite de pente s_i pour $u_i \leq x \leq u_{i+1}$ et vaut $v_{i+1} - v_i$ si $x > u_{i+1}$. En sommant toutes ces contributions, et en ajoutant $f(c)$, on construit ainsi une fonction affine par morceaux qui passe par tous les points (u_i, v_i) .

PROPOSITION 4.3

Si f est continue et si le pas de la subdivision $(u_0, \dots, u_n)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ alors $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[c, d]$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur $[c, d]$ donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [c, d]$, $|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour simplifier, on suppose que la subdivision de $[c, d]$ est régulière : $x_i = c + \frac{d-c}{n}i$ pour $i = 0, \dots, n$, de sorte que $u_{i+1} - u_i = \frac{d-c}{n}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{d-c}{n_0} \leq \eta$. Soit $x \in [c, d]$ et $n \geq n_0$. Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x \in [u_i, u_{i+1}[$. On a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(u_i)| + |f(u_i) - f_n(u_i)| + |f_n(u_i) - f_n(x)|.$$

D'après l'uniforme continuité de f et puisque $|x - u_i| \leq |u_{i+1} - u_i| < \eta$ on a $|f(x) - f(u_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite, par construction, les fonctions f_n et f coïncident au point u_i , donc $|f(u_i) - f_n(u_i)| = 0$. Enfin, pour le dernier terme on a

$$|f_n(u_i) - f_n(x)| = |s_i| |u_i - x| \leq |s_i| |u_i - u_{i+1}| = |v_{i+1} - v_i| = |f(u_{i+1}) - f(u_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in [c, d]$. Le cas $x = d$ est vrai aussi car $f(d) = f_n(d)$ par construction. On a donc montré

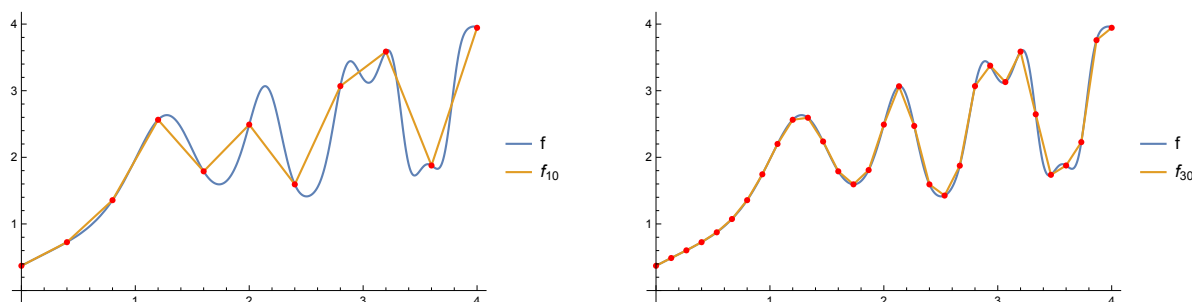
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in [c, d], \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui est la définition de la convergence uniforme sur $[c, d]$. □

EXEMPLE 4.5 : Considérons la fonction

$$f(x) = \cos \left(2 \cos(x^2) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \right) + \frac{x}{2} + 1.$$

sur $[0, 4]$. On peut vérifier que l'approximation de Weierstrass précédente est assez mauvaise, même pour $n = 50$. Dans le cas de l'approximation affine par morceaux, on obtient les courbes suivantes de f et f_n pour $n = 10, 30$.

FIGURE 4.3 – La fonction f et son approximation f_n pour $n = 10$ à gauche et $n = 30$ à droite.

- REMARQUE 4.8 :** ☉ Un résultat plus général, appelé **théorème d'approximation universelle** nous dit que toute fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}^q$ avec $K \subset \mathbb{R}^p$ compact et $p, q \in \mathbb{N}$ peut-être approchée, au sens de la convergence uniforme, par un réseau de neurones qui généralise celui de la Figure 4.2. Comme pour le théorème de Weierstrass, il est essentiel que K soit compact (généralisation du segment $[c, d]$). En dehors de celui-ci, l'approximation est très mauvaise.
- ☉ Ici, il n'y a pas d'apprentissage statistique (machine learning). Le réseau de neurones est déjà parfaitement ajusté pour approcher au mieux la fonction f . Cependant, on pourrait imaginer le même réseau mais avec des poids et biais choisis initialement au hasard, avec un algorithme de rétro-propagation pour entraîner le réseau et ajuster les poids et biais afin de minimiser l'écart entre f_n et f pour un n donné. Cette approche dépasse largement le cadre de ce cours d'analyse.

4.4. Séries de fonctions

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Comme pour les séries numériques, on définit la suite des sommes partielles (S_n) où $S_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in I.$$

DÉFINITION 4.3

On dit que la série de terme général f_n converge simplement (respectivement uniformément) lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement (resp. uniformément). La limite est notée $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Introduisons à présent le principal critère de convergence pour une série de fonctions de terme général f_n . Ce critère repose sur la définition suivante.

DÉFINITION 4.4

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$. On dit la série de terme général (f_n) **converge normalement** lorsque la série numérique de terme général $\|f_n\|_{\infty}$ converge.

L'intérêt de la notion vient du résultat suivant.

THÉORÈME 4.6

Une série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.

REMARQUE 4.9 : En pratique, il n'est pas toujours aisé de calculer exactement $\|f_n\|_\infty$. Par contre il n'est souvent pas trop difficile d'en trouver un majorant $a_n : \|f_n\|_\infty \leq a_n$. Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge également, et donc la série général (f_n) est normalement convergente.

EXEMPLE 4.6 : On considère les fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet

$$\zeta : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \end{cases}, \quad \eta : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}.$$

Pour $x > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge simplement comme série de Riemann et pour $x > 0$ la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge simplement par le critère des séries alternées. Les fonction ζ et η sont donc bien définies. De plus, soit $\alpha > 1$. En posant $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $I =]\alpha, +\infty[$ on a

$$\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc les séries $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent normalement sur I , donc uniformément.

REMARQUE 4.10 : Attention, la réciproque de ce théorème est fautive en général : on peut trouver des séries uniformément convergentes qui ne sont pas normalement convergentes. Par exemple, soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } x \in [n, n+1[, \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, n] \cup [n+1, +\infty[. \end{cases}$$

On pourra montrer en exercice que la série de terme général f_n converge uniformément, mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. Un défi : améliorer cet exemple pour que les fonctions f_n soient continues. L'améliorer encore pour que l'intervalle de définition soit borné.

Démonstration du théorème. Fixons d'abord $x \in I$ et montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est convergente. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est absolument convergente, ce qui est bien le cas puisque

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

et que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge (critère de comparaison pour les séries positives).

On peut donc poser $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Montrons maintenant que la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S . Rappelons que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in I.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ est convergente, la suite de ses sommes partielles $(A_n = \sum_{k=0}^n \|f_k\|_\infty)$ possède une limite, et donc est une suite de Cauchy : il existe n_0 tel que, pour tout $p \geq 0$,

$$|A_{n+p} - A_n| \leq \varepsilon.$$

Or pour tout $p \geq 1$

$$|A_{n+p} - A_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_{\infty}.$$

On a donc, pour tout $x \in I$, $n \geq n_0$ et $p \geq 1$,

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, $S_{n+p}(x) \rightarrow S(x)$. On passe à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente pour chaque x fixé dans I et chaque $n \geq n_0$. On obtient donc : $\forall n \geq n_0, \forall x \in I$,

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que la convergence de (S_n) vers S est uniforme. $\square$

Les séries normalement convergentes étant uniformément convergentes, une application directe des propriétés connues pour cette convergence donne :

PROPOSITION 4.4

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

1. Si la série de terme général f_n converge normalement,

(a) alors la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est continue.

(b) alors pour tout $a \in \text{Adh}(I)$ on a $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_k(x)$

(c) alors pour tout intervalle fermé borné $[a, b]$ contenu dans I on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) (x) dx,$$

2. On suppose maintenant que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, qu'il existe $a \in I$ tel que la série numérique de terme général $f_n(a)$ converge, tandis que la série de terme général f'_n converge normalement. Alors la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k.$$

Démonstration. La convergence normale implique la convergence uniforme. On peut donc ensuite appliquer les propriétés de la convergence uniforme aux sommes partielles S_n , qui sont des suites, et ainsi utiliser les résultats de la section précédente. On utilisera la linéarité de l'intégrale et de la dérivée pour des sommes (finies) avant de passer à la limite. La preuve explicite est laissée au lecteur. $\square$

En pratique, cette proposition permet de justifier l'existence de certaines quantités mélangeant sommes, limites et intégrales, et parfois même de les calculer.

EXEMPLE 4.7 : Soit $x \geq 0$, démontrons l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x$$

Remarquons d'abord que $e^{-t} \leq 1$ pour $t \in [0, x]$ donc $0 \leq \int_0^x t^n e^{-t} dt \leq x^{n+1}/(n+1)$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $x^{n+1}/(n+1)!$ converge, donc la série ci-dessus est convergente et la série de fonction correspondante converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Considérons, pour $x \geq 0$, la suite de fonction (f_n) de $[0, x]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = t^n e^{-t}/n!$. On a $\|f_n\|_\infty \leq x^n/n!$ et $\sum x^n/n!$ converge donc la série de terme général f_n converge normalement. On applique donc la proposition précédente pour permuter somme infinie et intégrale sur le segment $[0, x]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt.$$

De plus on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^{-t} e^t = 1.$$

Donc

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt = \int_0^x dx = x,$$

comme demandé.

5 SÉRIES ENTIÈRES

Pré-requis L1 : Limite de suites et de fonctions (Cours d'Analyse 1)



Objectifs :

- Définition et propriétés des séries entières
- Rayon de convergence, lemme d'Abel
- Fonctions développables en séries entières, lien avec les formules de Taylor

Après avoir vu les séries de fonctions dans un cadre général au chapitre précédent, on s'intéresse ici aux séries entières, dont le terme général est de la forme

$$f_n(x) = a_n x^n.$$

Ces séries sont une généralisation naturelle des polynômes, et elles en héritent d'une sorte de rigidité. En particulier, elles ont de bonnes propriétés de convergence si bien qu'on peut les manipuler presque comme des polynômes. La question principale pour une série entière est donc d'abord de trouver l'ensemble des x pour lesquels la série converge.

Le terme série « entière » provient originellement de l'analyse complexe et signifie : « définie dans tout le plan complexe », mais la théorie moderne étudie aussi les séries définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Dans le cadre de ce cours introductif, on se restreindra à la variable réelle $x \in \mathbb{R}$. De façon surprenante, les séries entières jouent un rôle essentiel dans pratiquement tous les champs des mathématiques : analyse complexe, équations différentielles, probabilités, combinatoire, algèbre, etc.

Enfin, grâce aux formules de Taylor, on peut montrer que de nombreuses fonctions usuelles suffisamment régulières peuvent s'écrire, au moins localement, sous la forme d'une série entière, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Les séries entières formalisent ainsi la notion de développement limité d'ordre infini et renforcent ainsi les outils d'approximation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par un polynôme.

5.1. Rayon de convergence

DÉFINITION 5.1

Une **série entière** est une série de fonctions dont le terme général f_n est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$ où (a_n) est une suite réelle donnée. On parle alors de la série entière $\sum a_n x^n$.

REMARQUE 5.1 : On peut aussi considérer des séries entières dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n (x - c)^n$ où c est un réel fixé. Ce recentrage en $x = c$ ne pose pas de problème et tous les énoncés peuvent être adaptés.

Un des enjeux concernant ces séries est le domaine où elles convergent. On remarque que convergence a toujours lieu en $x = 0$ (en particulier, l'ensemble $\mathcal{C}$ ci-dessous est non vide).

DÉFINITION 5.2: RAYON DE CONVERGENCE

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On considère

$$\mathcal{C} = \left\{ r \geq 0 \mid \sum a_n r^n \text{ converge} \right\}.$$

Le **rayon de convergence** de la série entière est défini par $R = \sup \mathcal{C} \in [0, +\infty]$.

REMARQUE 5.2 : Les séries entières prennent vraiment tout leur sens lorsqu'on considère la version complexe : $x \in \mathbb{R}$ devient $z \in \mathbb{C}$ et (a_n) devient une suite complexe. Le rayon r correspond alors à un cercle dans le plan complexe : $|z| < r$. Dans le cadre de ce cours introductif, on se restreindra au cas réel.

EXEMPLE 5.1 ($R = 0$) : Considérons la série $\sum n! x^n$. Pour tout $r > 0$, $n! r^n \rightarrow +\infty$; si $r > 1$, c'est le produit de deux facteurs tendant chacun vers l'infini, et, si $0 < r < 1$, c'est encore vrai (exercice). Donc, pour tout $r > 0$, $\sum n! r^n$ diverge. Donc $\mathcal{C} = \{0\}$, donc $R = 0$.

EXEMPLE 5.2 ($R = 1$, $R \in \mathbb{R}^*$) : Considérons la série $\sum x^n$. Ses sommes partielles valent

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

donc converge si et seulement si $|x| < 1$. Donc $\mathcal{C} = [0, 1[$, donc $R = 1$.

Par simple homothétie dans la variable x , on obtient une série entière $\sum (x/\rho)^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ quelconque.

EXEMPLE 5.3 ($R = +\infty$) : Considérons enfin la série $\sum x^n/n!$. Pour tout $r \geq 0$, la série $\sum r^n/n!$ converge (exercice), donc $\mathcal{C} = [0, +\infty[$, donc $R = +\infty$. On reconnaît ici la fonction exponentielle.

La caractérisation suivante de R qui est très utile pour le calculer (on pourra le vérifier avec les exemples ci-dessus).

LEMME 5.1: LEMME D'ABEL

Notons $\mathcal{C}' = \left\{ r \geq 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \right\}$ et $R' = \sup \mathcal{C}'$. Alors $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ et

$$R = R'$$

Démonstration. Si $r \in \mathcal{C}$, alors $\sum a_n r^n$ converge, donc $a_n r^n \rightarrow 0$. En particulier $(a_n r^n)$ est bornée, donc $r \in \mathcal{C}'$. En passant au sup on en déduit $R \leq R'$.

Montrons maintenant que $R' \leq R$. Pour tout $r < R'$, si l'on note $r' = \frac{r+R'}{2} < R'$, on a

$$|a_n r^n| = |a_n r'^n| \left| \frac{r}{r'} \right|^n;$$

dans le membre de droite, le premier facteur est borné, tandis que le second est le terme général d'une série (géométrique de raison < 1) convergente, donc $r \in \mathcal{C}$. Donc $R' \leq R$, et finalement $R = R'$. $\square$

LEMME 5.2

1. Si $|x| < R$, $\sum a_n x^n$ converge absolument.
2. Si $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ diverge.

Démonstration. 1. Le raisonnement est le même que précédemment : si l'on pose $r = \frac{|x|+R}{2} \in]|x|, R[$, alors $(a_n r^n)$ est bornée et l'on en déduit que

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left| \frac{x}{r} \right|^n,$$

de sorte que $\sum |a_n x^n|$ converge.

2. Montrons la contraposée de la seconde affirmation. Si $\sum a_n x^n$ converge, $(a_n x^n)$ tend vers 0, donc $(a_n x^n)$ est bornée, donc $|x| \leq R$. □

REMARQUE 5.3 : Si $|x| = R$, le comportement de la série numérique $\sum a_n x^n$ dépend des a_n et de x . Tous les cas sont possibles :

- ⊙ La série $\sum x^n$, de rayon de convergence $R = 1$, diverge en $x = \pm 1$.
- ⊙ La série $\sum x^n/n$, aussi de rayon $R = 1$, diverge en $x = 1$ mais converge pour $x = -1$ (la version complexe converge en tout $|z| = 1$ si $z \neq 1$).
- ⊙ La série $\sum x^n/n^2$, toujours de rayon $R = 1$, converge pour $x = \pm 1$.

PROPOSITION 5.1: RAYON DE CONVERGENCE PAR CAUCHY OU D'ALEMBERT

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et R son rayon de convergence. On suppose que l'une des deux propriétés ci-dessous est vérifiée :

1. Soit $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell$

2. Soit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \ell$

avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Alors

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell}, & \text{si } \ell \in]0, +\infty[\\ +\infty, & \text{si } \ell = 0; \\ 0, & \text{si } \ell = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$. Dans le cas 1 on a

$$\sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |x| \rightarrow \ell |x|,$$

D'après le critère de Cauchy (Proposition 2.16), la série $\sum a_n x^n$ converge si $\ell |x| < 1$ et diverge si $\ell |x| > 1$. Donc si $\ell = 0$ la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $R = +\infty$, si $\ell = +\infty$ la série ne converge pour aucun $x > 0$, donc $R = 0$, et si $\ell \in]0, +\infty[$ la série converge pour $|x| < 1/\ell$ et diverge pour $|x| > 1/\ell$. Donc $R = 1/\ell$.

Dans le cas 2 on a le même résultat en appliquant le critère de D'Alembert (Proposition 2.17) en remarquant que

$$\frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| \rightarrow \ell |x|.$$

□

REMARQUE 5.4 : L'application directe du lemme d'Abel permet souvent de conclure plus rapidement qu'avec le critère ci-dessus.

PROPOSITION 5.2: CRITÈRE DE COMPARAISON

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . On suppose qu'il existe deux constantes M et n_0 telles que, pour tout $n \geq n_0$ $|a_n| \leq M|b_n|$. Alors

$$R_a \geq R_b$$

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que $n_0 = 0$. Soit $r \leq R_b$, donc $\sum |b_n| r^n$ converge. Par comparaison, la série $\sum (|a_n|/M) r^n$ converge aussi. Donc la série $\sum |a_n| r^n$ converge. Donc $r \leq R_a$. On obtient le résultat en passant au sup à gauche. $\square$



On fera bien attention au sens de l'inégalité ci-dessus.

COROLLAIRE 5.1

Si les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, alors $R_a = R_b$.

5.2. Opérations sur les séries entières

Comme pour les développements limités, il existe plusieurs opérations fondamentales sur les séries entières : somme, produit, inverse, composition, dérivation, intégration, bijection réciproque, etc. Nous nous limiterons ici à quelques unes.

THÉORÈME 5.1: SOMME DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES

On suppose que $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b . Alors la série entière $\sum c_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout x tel que $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

De plus si $R_a \neq R_b$ alors $R_c = \min\{R_a, R_b\}$.

Démonstration. Pour tout r tel que $|r| < \min\{R_a, R_b\}$, les deux séries $\sum a_n r^n$ et $\sum b_n r^n$ sont absolument convergentes, donc $\sum (a_n + b_n) r^n$ l'est aussi. On déduit que $r < R_c$. Donc $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Si maintenant on suppose de plus les rayons sont différents, par exemple $R_a < R_b$. Par l'absurde, supposons $R_c > R_a$, alors il existe r tel que $R_a < |r| < \min\{R_b, R_c\}$. Alors $\sum c_n r^n$ et $\sum b_n r^n$ sont absolument convergentes. Donc $\sum (c_n - b_n) r^n = \sum a_n r^n$ converge pour $r > R_a$, ce qui est absurde. Donc $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

REMARQUE 5.5 : Dans le cas où $R_a = R_b$, il existe des suites (a_n) et (b_n) telles que $R_c > R_a = R_b$. Par exemple $\sum x^n$ et $\sum -x^n$ ont un rayon de convergence égal ($R_a = R_b = 1$) mais le rayon de convergence de la somme est infini ($R_c = +\infty$) car c'est la série nulle.

THÉORÈME 5.2: PRODUIT DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES

On suppose que $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b . Alors la série entière $\sum c_n x^n$, avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0,$$

a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout x tel que $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

Démonstration. Admise. On retrouve le produit de Cauchy de (a_n) et (b_n) de la Définition 2.5. $\square$

THÉORÈME 5.3: DÉRIVATION ET PRIMITIVE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Soit la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R . On suppose $R > 0$ et on considère la fonction limite

$$S : \begin{cases}]-R, R[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases}.$$

Alors :

1. La série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-r, r]$ pour tout $0 < r < R$. De plus, S est continue sur $] -R, R[$.
2. S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$, et sa dérivée est donnée par la série entière :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in] -R, R[.$$

Le rayon de convergence de S' est R .

3. Toute primitive F de S est donnée par la série entière

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in] -R, R[.$$

Le rayon de convergence de F est R .

Démonstration. 1. Fixons $r \in]0, R[$. Alors

$$\sup_{x \in [-r, r]} |a_n x^n| = |a_n| r^n.$$

La série $\sum |a_n| r^n$ converge, donc la série de fonctions $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-r, r]$. La convergence est donc uniforme sur cet intervalle. Les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement vers $S(x)$ sur cet intervalle, donc S est continue sur $[-r, r]$ pour tout $r \in]0, R[$. Cela implique la continuité de S sur $] -R, R[$: soit en effet x tel que $|x| < R$, il existe alors $r \in]|x|, R[$ et donc d'après ce qui précède S est continue sur $[-r, r]$, donc en x .

2. On considère la série entière des dérivées :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n,$$

de rayon de convergence R' . Montrons d'abord que $R = R'$.

($R \leq R'$) Soit $r \in]0, R[$ et $r_1 \in]r, R[$. Alors

$$|a_{n+1}|(n+1)r^n = |a_{n+1}|r_1^{n+1} \frac{(n+1)r^n}{r_1^{n+1}} \leq M|a_{n+1}|r_1^{n+1}$$

où l'on a défini

$$M = \sup_n \left\{ \frac{(n+1)r^n}{r_1^{n+1}} \right\} < \infty$$

car la suite correspondante est bornée puisqu'elle tend vers 0. De plus on a $r_1 < R$ donc $\sum M|a_{n+1}|r_1^{n+1}$ converge. Par comparaison, $\sum |a_{n+1}|(n+1)r^n$ converge. Ce résultat est vrai pour tout $r < R$, donc $R' \geq R$.

($R \geq R'$) Réciproquement, si $r > R$, alors par le lemme d'Abel la suite $(a_n r^n)$ ne tend pas vers zéro, sinon elle serait bornée et on aurait la convergence que $\sum a_n \tilde{r}^n$ pour tout $R < |\tilde{r}| < r$ ce qui est absurde. Donc la suite $(a_{n+1} r^n)$ ne tend pas vers zéro non plus. A fortiori, la suite $((n+1)a_{n+1} r^n)$ ne tend pas vers zéro et la série $\sum (n+1)a_{n+1} r^n$ diverge. Donc $R' \leq R$.

On déduit de ce qui précède que la série $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-r, r]$ vers g pour tout $r < R$. De plus, la série $\sum a_n x^n$ converge simplement vers S sur $] -R, R[$ et $x \rightarrow a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$. On applique donc la Proposition 4.4 sur la dérivation des séries pour en déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $S' = g$.

3. Le résultat pour la primitive est analogue. C'est une application directe du théorème d'intégration des séries uniformément convergentes. La preuve est laissée au lecteur. □

COROLLAIRE 5.2

La fonction limite S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \quad \forall p \geq 0,$$

et son rayon de convergence est égal à R . De plus, pour tout $p \geq 0$ on a $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$.

Démonstration. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. La dernière équation s'obtient en prenant simplement $x = 0$ dans l'expression de $S^{(p)}(x)$. □

EXEMPLE 5.4 (Application à la résolution d'une équation différentielle) : On considère le problème de Cauchy suivant, c'est à dire la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} (1-x^2)y'(x) = xy(x) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

d'inconnue une fonction $y(x)$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Cherchons la fonction y sous la forme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $y(x) = \sum a_n x^n$.

D'après la condition initiale $y(0) = a_0 = 0$. Par ailleurs, en faisant $x = 0$ dans l'équation différentielle, on voit que $y'(0) = a_1 = 1$. Maintenant, injectons l'expression de y dans l'équation différentielle (en utilisant que, d'après ce qu'on a vu, y est dérivable au voisinage de 0 et $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$) :

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)y'(x) - xy(x) - 1 = (1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 1 \\ &= (a_1 - 1) + 2a_2x + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}) x^n. \end{aligned}$$

Pour que l'équation soit satisfaite, il suffit que le coefficient de x^n soit nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est en fait une condition nécessaire, voir la Proposition 5.3). On voit qu'alors la suite (a_n) est définie par récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Par récurrence, on voit que, pour tout n , $a_{2n} = 0$, et

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \frac{2}{3} a_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!},$$

de sorte que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Comme $a_{2n+3}/a_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+3} \rightarrow 1$, le rayon de convergence de la série trouvée vaut $R = 1$, et l'on a donc bien déterminé une solution du problème de Cauchy. La théorie des équations différentielles ordinaires montre en fait que la solution est unique, et, en la calculant par une autre méthode, on voit que

$$y(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

définie sur $] -1, 1[$.

5.3. Développement d'une fonction en série entière

Dans les sections précédentes, on a étudié les fonctions définies comme une limite de série entière. Réciproquement, on peut se demander si une fonction donnée peut s'écrire ou non sous la forme d'une série entière.

DÉFINITION 5.3: FONCTION DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE

Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **développable en série entière** au voisinage de 0 (ou **analytique** en 0) s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ ayant un rayon de convergence $R > 0$ et telle que $f(x) = \sum_n a_n x^n$ sur $] -R, R[\cap I$.

REMARQUE 5.6 : Le rôle de 0 est ici aussi complètement arbitraire : on peut tout aussi bien considérer une fonction développable en série entière au voisinage de $x_0 \in I$, de sorte que $f(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[\cap I$. On adaptera aisément les propriétés qui suivent au cas $x_0 \neq 0$.

PROPOSITION 5.3: UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT

Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et la suite (a_n) est donnée par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \geq 0.$$

En particulier, le développement en série entière de f est unique.

Démonstration. C'est la conséquence du Corollaire 5.2. □



La réciproque de la première assertion est fautive : une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $] -R, R[$ n'est pas toujours développable en série entière.

EXEMPLE 5.5 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . Donc d'après la Proposition 5.3, si f est développable en série entière alors $a_n = 0$ pour tout n . Donc $f(x) = 0$ pour $x \in] -R, R[$. Or $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Donc f n'est pas développable en série entière autour de 0.

REMARQUE 5.7 : En pratique, pour montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc d'estimer le reste R_n dans la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

On peut par exemple utiliser la formule de Taylor avec reste intégral $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

ou bien la formule de Taylor-Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!} x^{n+1}$ avec $c_{n,x} \in [0, x]$. Lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

pour tout $x \in] -R, R[$ alors f est développable en série entière sur l'intervalle $] -R, R[$.

PROPOSITION 5.4

Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[\subset I$ et s'il existe une constante M telle que :

$$\forall x \in] -R, R[, \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $x \in] -R, R[$ la suite $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \leq M \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

En calculant l'intégrale, on obtient :

$$|R_n(x)| \leq M \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

□

Les formules suivantes sont à connaître, **en précisant toujours le rayon de convergence**.

PROPOSITION 5.5: DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

es fonctions suivantes sont développables en série entière. Leur développement et rayon de convergence est donné ci dessous.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad \forall x \in]-1, 1[\quad (R = 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall x \in]-1, 1[\quad (R = 1)$$

Démonstration. Montrons par exemple la formule pour l'exponentielle : la formule de Taylor-Lagrange donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \frac{e^{c_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{pour un certain } c_{n,x} \in [0, x].$$

Or

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

En posant $u_n = |x|^n/(n)!$ on a $u_{n+1}/u_n = |x|/(n+1) \rightarrow 0$. Donc à partir d'un certain rang n_0 on a $u_{n+1} \leq \alpha u_n$ avec $\alpha < 1$. Donc $u_n \leq \alpha^{n-n_0} u_{n_0}$. Donc $u_n \rightarrow 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien $R_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. □

REMARQUE 5.8 : Comme les développements limités, le développement en série entière est une **propriété locale** au voisinage d'un point (ici $x_0 = 0$). Par exemple, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $I =]-1; +\infty[$, mais son développement en série entière au voisinage de 0 n'est valable que pour $x \in]-1, 1[$. Dans le cas particulier où $R = +\infty$, la fonction et son développement coïncident globalement sur la totalité de l'ensemble de définition, (par exemple pour $x \mapsto e^x$).

5.4. Comportement sur le cercle de convergence

Dans cette section, on répond partiellement à la question de ce qui se passe en $|x| = R$. On considère la somme $f(x) = \sum a_n x^n$ d'une série entière de rayon de convergence R avec $0 < R < +\infty$. On rappelle que f est définie et continue sur $] -R, R[$, mais on ne sait rien en $x = \pm R$. Pour simplifier, on se concentre sur l'étude en $x = R$. On peut étudier, d'une part,

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x)$$

et d'autre part la convergence de la série en $x = R$

$$\sum a_n R^n.$$

A priori, f n'est pas continue en $x = R$, donc il s'agit de deux quantités différentes. On peut ainsi se demander dans quel cas elles sont égales. Le théorème principal est celui d'Abel (le deuxième Théorème d'Abel).

THÉORÈME 5.4: THÉORÈME DE LA LIMITE RADIALE D'ABEL

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$. Si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. Ainsi, f admet un prolongement par continuité en $x = R$, et

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

On commence par donner une preuve facile dans le cas où les coefficients a_n sont tous positifs. Dans ce cas, en posant $g_n(x) := a_n x^n$, on a sur $[-R, R]$ que $\|g_n\|_{\infty} = f_n(R) = a_n R^n$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \text{converge.}$$

La série $\sum g_n$ est normalement convergente **sur tout** $[-R, R]$ donc il existe une fonction $\tilde{f}$, continue sur $[0, R]$ telle que $\tilde{f}(x) = \sum_n a_n x^n$. Par unicité de la limite pour $x \in [0, R)$, on en déduit que $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f sur $[0, R]$.

Démonstration. On pose $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$. Le but est de montrer que la suite (f_N) converge uniformément vers f sur $[0, R]$. Cela montrera que f est continue au point $x = R$. On introduit le reste de la suite

$$S_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k R^k, \quad \text{de sorte que} \quad a_n R^n = S_n - S_{n+1}.$$

Cette manipulation qui consiste à exprimer les termes d'une suite comme la différence de deux restes de série s'appelle la *transformation d'Abel*. Soit $0 \leq x \leq R$. On a

$$(f - f_N)(x) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=N}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=N}^{\infty} (S_n - S_{n+1}) \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=N}^{\infty} S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n - \sum_{n=N}^{\infty} S_{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

En changeant d'indices dans la première somme, on obtient

$$(f - f_N)(x) = S_N \left(\frac{x}{R}\right)^N + \sum_{n=N}^{\infty} S_{n+1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^n \right).$$

La suite à gauche converge simplement vers 0 si $x < R$. On veut montrer que la convergence est en fait uniforme sur $[0, R]$, où on a posé $f(R) := \sum a_n R^n$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N suffisamment grand tel que $|S_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Le premier terme est borné par ε , et le second par

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} S_{n+1} \left(\left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R} \right)^n \right) \right| \leq \varepsilon \sum_N^{\infty} \left(\left(\frac{x}{R} \right)^n - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} \right) = \varepsilon \left(\frac{x}{R} \right)^{N+1} \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que

$$\sup_{x \in [0, R]} \sum_{n \geq N} a_n x^n \leq 2\varepsilon,$$

donc f_N converge uniformément vers f sur $[0, R]$. La limite correspondante est un prolongement par continuité de f sur $(-R, R]$. $\square$

EXEMPLE 5.6 : La série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, et sa somme vaut $f(x) = \ln(1+x)$. En $x = 1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est alternée donc converge. En appliquant le Théorème d'Abel, on en déduit

$$\log(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

REMARQUE 5.9 : La réciproque est fautive : ce n'est pas parce que f admet une limite en R^- que la série entière est convergente en $x = R$. Considérons par exemple

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Le rayon de convergence est $R = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$ existe, mais la série $\sum (-1)^n$ n'est pas convergente.

Il existe des réciproques partielles au Théorème d'Abel, avec certaines hypothèses supplémentaires sur la suite (a_n) , appelés théorèmes taubériens, du mathématicien autrichien Alfred Tauber (1866-1942), qui n'a aucun lien de parenté connu avec l'auteur de ces lignes.