

1 PRIMITIVES ET INTÉGRATION

Objectifs :

- Définir la primitive d'une fonction et maîtriser les technique de calcul des primitives,
- Définir et calculer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle,
- Maîtriser les notations : $\int f$, $\int f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$.

1.1. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

1.1.1 Définition

DÉFINITION 1

Soit I un intervalle. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

PROPOSITION 2

Soit I un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F sur I alors :

1. L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $F + \alpha$ où α parcourt $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

En effet, pour toute constante α dans $\mathbb{R}$ on a $(F + \alpha)' = F' = f$, donc $F + \alpha$ est une autre primitive de F . On retiendra donc qu'une primitive de F **n'est pas unique**, mais toujours définie à une constante près.

1.1.2 Théorème fondamental de l'analyse

Le théorème suivant découle de la construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment qui dépasse le cadre de ce cours. La notion d'intégrale sera toutefois discutée à la fin du chapitre.

THÉORÈME 3: THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

DÉFINITION 4

Soit I un intervalle. Soit f une fonction continue sur I . On note $\int f(x)dx$ **une** primitive de f sur I .

Cette écriture n'est donc bien définie qu'à addition près d'une constante arbitraire.

REMARQUE 1 : 1. On utilisera la notation $\int f(x)dx$ aussi bien pour parler d'une primitive de f en tant que *fonction* que pour parler de la *valeur en x d'une de ces primitives*.

2. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable, on note parfois l'intégrale de f avec la forme simplifiée $\int f$.

1.1.3 Techniques de calcul

Une primitive de certaines fonctions simples peut être obtenue à partir des dérivées des fonctions usuelles (en Annexe). Par exemple, on a $(\sin(x))' = \cos(x)$ donc $\sin$ est une primitive de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On peut ainsi établir une table des primitives pour certaines fonctions usuelles.

Pour le calcul de primitives de fonctions plus compliquées, il existe certaines techniques. Ainsi, en utilisant la linéarité de la dérivée, la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions ainsi que la dérivée d'une composée, on peut donner les propositions suivantes :

PROPOSITION 5: LINÉARITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toutes fonctions f et g continues sur I et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

(une primitive d'une **combinaison linéaire** est la combinaison linéaire des primitives).

En remarquant que $(fg)' = f'g + fg'$, on obtient :

PROPOSITION 6: INTÉGRATION PAR PARTIES

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables de dérivées continues sur I alors :

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

EXERCICE 1 Donner une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^+$.

PROPOSITION 7: PRIMITIVE ET COMPOSÉE

Si u est dérivable de dérivée continue sur un intervalle I et si f est continue sur $u(I)$ alors

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F \circ u,$$

où F est une primitive de f sur $u(I)$.

EXERCICE 2 Calculer $\int 3x^2 \cos(x^3) dx$.



Si $F' = f$, alors $F \circ u$ n'est pas une primitive de $f \circ u$: le terme u' doit apparaître !

Parfois on est en présence de la dérivée d'une fonction usuelle à un facteur multiplicatif près, il suffit de compenser ce facteur pour obtenir la primitive voulue, voir l'exercice suivant.

EXERCICE 3 Trouver une primitive de $\cos^{2019}(x) \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 8: CHANGEMENT DE VARIABLE

Soient I et J deux intervalles ; soit ϕ est une fonction dérivable sur J , à valeurs dans I vérifiant que sa dérivée est continue et ne s'annule pas sur J . Soit f une fonction continue sur I , alors on peut poser

$x = \phi(u)$ pour obtenir :

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(u))\phi'(u)du = F(u) = F(\phi^{-1}(x)) \quad \text{avec :}$$

$F : u \mapsto F(u)$ primitive de la fonction $f(\phi(u))\phi'(u)$.

REMARQUE 2 : Pour se rappeler cette formule, on peut utiliser les notations *différentielles* et écrire $\frac{dx}{du}$ pour $x'(u)$. Ainsi, le changement $x = \phi(u)$ donne $\frac{dx}{du} = \phi'(u)$ ou $dx = \phi'(u)du$...

EXERCICE 4 Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $x = \ln(u)$.

1.2. Primitives de polynômes et fractions rationnelles

1.2.1 Cas des polynômes

DÉFINITION 9

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les réels $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, la **fonction polynomiale** P , dite plus simplement ici **polynôme**, de coefficients $(a_0, \dots, a_n)$ est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par l'expression :

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

La puissance la plus élevée apparaissant dans l'écriture de P se nomme le **degré** de P , on le note $\deg(P)$. Si $P(x) = 0$, on dit que son degré est $-\infty$.

Les **racines** de P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$ (elles peuvent être réelles ou complexes).

Par *linéarité* de $\int$, et comme $\int x^k = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, on a :

PROPOSITION 10

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les réels $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{constante}.$$

1.2.2 Cas des fractions rationnelles

DÉFINITION 11

Une **fraction rationnelle** F est une fonction définie par une expression de la forme $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes (Q n'est pas la fonction nulle). Cette fonction n'est pas définie en

les racines de Q , que l'on nomme **pôles** de F .

On peut montrer que toute fraction rationnelle peut s'écrire plus simplement comme combinaison linéaire de fractions rationnelles particulières, appelées **éléments simples**.

DÉFINITION 12

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un **élément simple de première espèce** est une fraction rationnelle $F : x \mapsto F(x)$ où :

$$F(x) = \frac{a}{(x - b)^n}.$$

Cet élément simple ne possède que b comme pôle.

DÉFINITION 13

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un **élément simple de seconde espèce** est une fraction rationnelle $F : x \mapsto F(x)$ où :

$$F(x) = \frac{ax + b}{(x^2 + cx + d)^n}, \quad \text{où } \Delta := c^2 - 4d < 0.$$

Cet élément simple ne possède pas de pôles réels.

PROPOSITION 14: DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Soit F une fraction rationnelle ⁽¹⁾. Il existe un polynôme P , des entiers $N, M \in \mathbb{N}$, des éléments simples de première espèce notés $F_1, \dots, F_N$ et des éléments simples de seconde espèce, $G_1, \dots, G_M$ tels que :

$$F = P + F_1 + \dots + F_N + G_1 + \dots + G_M.$$

Cette décomposition est unique et se nomme la **décomposition en éléments simples de F** . Les pôles des fractions F_i sont les pôles de F .

REMARQUE 3 : Il existe une version de cette décomposition qui précise la forme des fractions F_i et G_i en fonction de la factorisation en polynômes irréductibles du dénominateur de F . Nous ne détaillerons pas ici et ne verrons que des cas particuliers.

On peut toujours trouver des primitives des éléments simples, on peut donc toujours calculer la primitive d'une fraction rationnelle. Dans le cadre de ce cours, on se restreindra à certains cas simples.

On ne donne qu'une primitive dans chacun des cas suivants (il y a toujours une constante d'intégration qui s'ajoute). De plus, on ne le précise pas, mais une primitive est toujours définie sur un intervalle. Donc le domaine sur lequel on recherche une primitive de la fonction f sera toujours un *intervalle* inclus dans $\mathcal{D}_f$.



Les formules suivantes ne sont pas à appliquer par cœur. Il faut plutôt connaître les méthodes pour obtenir ces primitives.

(1). On suppose ici que la fraction est irréductible, c'est-à-dire que l'on ne peut pas la simplifier par un polynôme non constant.

Fractions du type $\frac{a}{(x-b)^n}$

PROPOSITION 15

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int \frac{a}{(x-b)^n} dx = \begin{cases} a \ln(|x-b|) & \text{si } n = 1 \\ \frac{a}{-n+1} \frac{1}{(x-b)^{n-1}} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

REMARQUE 4 : Dans le cas $n \geq 2$, écrire $\frac{1}{(x-b)^n}$ sous la forme $(x-b)^{-n}$ est utile pour se rappeler la forme de sa primitive : on augmente d'un degré la puissance et on « compense » par le bon coefficient...

Cas des fractions s'écrivant $\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_m)}$, les x_i étant tous distincts et $\deg(P) < m$

PROPOSITION 16

$$\int \frac{P(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_m)} dx = \lambda_1 \ln|x-x_1| + \lambda_2 \ln|x-x_2| + \cdots + \lambda_m \ln|x-x_m|,$$

avec pour tout entier $i \in \{1, \dots, m\}$: $\lambda_i = P(x_i) \left/ \prod_{j=1, j \neq i}^m (x_i - x_j) \right.$.

En effet, la décomposition en éléments simples de $\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_m)}$ s'écrit (pour des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ à déterminer) :

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_m)} = \frac{\lambda_1}{x-x_1} + \frac{\lambda_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{\lambda_m}{x-x_m}.$$

Pour trouver les constantes λ_i , on pourra par exemple multiplier des deux côtés par $x-x_i$, puis *simplifier* et évaluer en $x=x_i$.

On obtient alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i = \frac{P(x_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x_i - x_j)}.$$

Le résultat découle alors de la proposition 15.

EXERCICE 5 Trouver une primitive de $\frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

Fonction arc tangente

Le cas des éléments simples de seconde espèce repose sur le calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Pour cela il faut faire un détour par les fonctions trigonométriques réciproques. On rappelle que la fonction tangente $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ pour k dans $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 17: arctan

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = x$. On note $\theta = \arctan(x)$ et définit ainsi la fonction arc tangente :

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x &\longmapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

On a par exemple $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. On dit que $\arctan$ est la **fonction réciproque** de $\tan$, car pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $\tan(\arctan(x)) = x$.

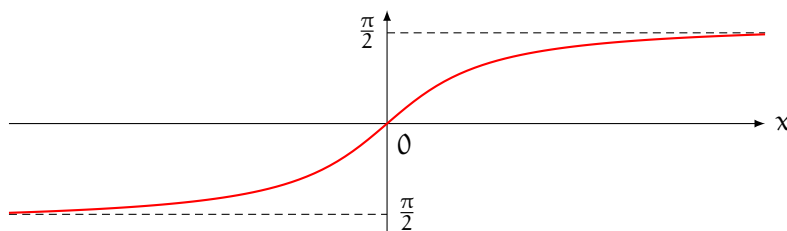


FIGURE 1.1 – Le graphe de la fonction arctan.

EXERCICE 6 En admettant que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit :

PROPOSITION 18

Une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan(x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.2.3 Polynômes trigonométriques

Méthode générale

Un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire de produits de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Par exemple :

$$f(x) = \sin^2(x) + \cos(x) + \frac{8}{3} \cos^3(x) \sin^2(x).$$

On donne ci-dessous les méthodes permettant de linéariser $\cos^p(x) \sin^q(x)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$ (en utilisant la linéarité de $\int$ on pourra trouver des primitives de tout polynôme trigonométrique).

La méthode générale pour trouver une primitive de $\cos^p(x) \sin^q(x)$ est de linéariser cette expression (en utilisant ce qui a été vu dans le chapitre sur les nombres complexes) pour obtenir une combinaison linéaire de fonctions du type $\cos(ax)$ et $\sin(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 7 Trouver une primitive de $\cos^3(x)$ après avoir linéarisé cette fonction.

1.3. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

DÉFINITION 19

Soit I un intervalle. Soit f une fonction continue sur I et soit a et b deux réels de I et soit F une primitive de f sur I . On appelle **intégrale de f de a à b** le réel :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ce réel est indépendant du choix de la primitive F de f .

COROLLAIRE 1: AUTRE VERSION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Soit f une fonction continue sur I et $x_0 \in I$. La fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f s'annulant en x_0 .

REMARQUE 5 : Le x apparaissant dans la définition de $\int_a^b f(x) dx$ est « muet ». Ainsi :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du \dots$$

PROPOSITION 20

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ avec $a \leq b$ alors $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \geq 0$ et cette quantité $\mathcal{A}$ correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f pour x entre a et b .

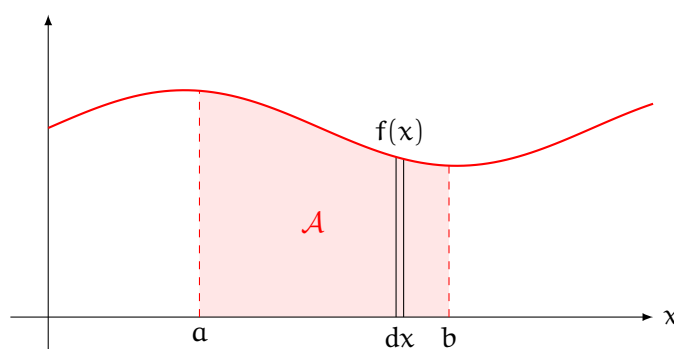


FIGURE 1.2 – L'intégrale de f correspond à l'aire sous la courbe entre a et b .

On peut ainsi voir $\int_a^b f(x) dx$ comme une somme de rectangles infinitésimaux de largeur dx et de hauteur $f(x)$ lorsque x varie de a à b . Le symbole $\int$ correspond à la lettre S, étirée verticalement, du mot « Somme ».

Une construction rigoureuse de l'intégrale via l'aire sous la courbe est possible mais dépasse le cadre de ce cours. Le théorème fondamental de l'analyse établit une relation remarquable entre l'aire sous la courbe d'une fonction et une primitive de la fonction.

DÉFINITION 21: CROCHET D'INTÉGRATION

Soit F une fonction continue sur un intervalle I , et $a, b \in I$, on utilise la notation :

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

PROPOSITION 22

Si F est une fonction continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$, on a :

1. $[F(x)]_a^a = 0$,
2. $[F(x)]_a^b = -[F(x)]_b^a$,
3. $[F(x)]_a^b = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$,
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : [F(x) + \alpha]_a^b = [F(x)]_a^b$.

On a alors :

PROPOSITION 23

La proposition précédente et la définition de l'intégrale donne les propriétés suivantes :

1. Si f est dérivable de dérivée continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b$.
2. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, on a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a et b alors :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b et c alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{Propriété de Chasles}).$$

1.4. Intégration par parties et changement de variable

1.4.1 Intégration par parties

En remarquant que $(uv)' = u'v + uv'$ et en intégrant entre a et b on obtient :

PROPOSITION 24

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et soit u et v deux fonctions dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I . Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

EXERCICE 8 Trouver la valeur de $A = \int_0^1 \arctan x dx$.

1.4.2 Changement de variable

En remarquant que $F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t)$ si F est une primitive de f , on obtient :

PROPOSITION 25

Soit I un intervalle contenant deux réels a et b . Soit ϕ une fonction dérivable de dérivée continue sur I à valeurs dans un intervalle J et soit f une fonction continue sur J . Alors :

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$



Les bornes d'intégration changent lors d'un changement de variables !

EXEMPLE 1 : Trouvons la valeur de $A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$:

- (a) Définir ϕ en écrivant $x = \phi(t) := \sin(t)$.
 (b) Écrire les bornes en fonction de ϕ :

$$\begin{array}{ccc} x & & t \\ -1 = \phi(a) & \Leftarrow & a = -\frac{\pi}{2} \\ 1 = \phi(b) & \Leftarrow & b = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

- (c) Vérifier que ϕ est dérivable sur $[a, b]$ (à valeurs dans un intervalle où f est définie) et calculer $\frac{dx}{dt} = \phi'(t) = \cos(t)$ puis écrire le changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt. \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \cos t dt && \text{mais } \cos(t) \geq 0 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt && \text{on linéarise} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

En pratique, face à une intégrale $\int_A^B f(x) dx$, on peut appliquer la formule de changement de variable de deux façons :

- En posant $x = \phi(t)$ et on a donc à chercher un intervalle $[a, b]$ tel que $\phi(a) = A$ et $\phi(b) = B$ pour appliquer la formule du changement de variable (comme l'exemple précédent)

- ⊙ En posant $t = \psi(x)$ et dans ce cas, pour appliquer le changement de variable, il a besoin que ψ **soit dérivable de dérivée continue non nulle** : il existe alors ϕ telle que $\psi \circ \phi(t) = t$ et dans ce cas ϕ est dérivable. Le changement de variable s'écrit alors $x = \phi(t)$ avec $\phi'(t) = \frac{1}{\psi' \circ \phi(t)}$. On a alors :

$$\int_A^B f(x) dx = \int_{\phi(\psi(A))}^{\phi(\psi(B))} f(x) dx = \int_{\psi(A)}^{\psi(B)} f(\phi(t)) \frac{dt}{\psi' \circ \phi(t)}.$$

EXEMPLE 2 : Calculons la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

On sait calculer une primitive de $\frac{1}{1+t^2}$, cherchons à s'y ramener :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})\right)^2 + 1} dx.$$

On a envie ici de poser $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})$, qui est dérivable, de dérivée $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Ensuite :

$$\begin{array}{lcl} x & & t \\ \hline 0 & \Rightarrow & \frac{2}{\sqrt{3}}(0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \Rightarrow & \frac{2}{\sqrt{3}}(1 + \frac{1}{2}) = \sqrt{3} \end{array}$$

Finalement, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{4}{3} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2 + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan t]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(2). ce qui suit est un abus de notation : cela signifie « dérivée de l'expression fournissant t en fonction de x ».

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Objectifs :

- Comprendre ce qu'est une équation différentielle.
- Savoir reconnaître les différentes caractéristiques : linéaire, ordre, homogène, avec forçage...
- Maîtriser la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

2.1. Introduction

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction y , et qui fait intervenir y et/ou ses dérivées. On a vu au chapitre précédent comment résoudre les équations de la forme $y'(x) = f(x)$ ou $f(x)$ est une fonction donnée (ex : $\cos$). On a alors $y = \int f(x)dx$. C'est un exemple d'équation différentielle, mais il en existe plein d'autres.

Considérons par exemple la population de bactéries se développant dans un milieu favorable. On note $B(t)$ le nombre de bactéries se trouvant dans ce milieu au temps t . Après étude de quelques populations, il semble que $B'(t)$, représentant la vitesse d'évolution du nombre de bactéries à l'instant t , soit proportionnelle au nombre de bactéries $B(t)$. Cette fonction, définie sur $I = [0, +\infty[$, vérifie ainsi la relation suivante pour une certaine constante k , dépendant de la population et du milieu :

$$\text{Pour tout } t \in I : B'(t) = kB(t).$$

On dit que B est solution sur I de l'**équation différentielle** $y' = ky$. Comment **résoudre** cette équation différentielle, c'est-à-dire trouver les fonctions B solutions de cette équation ? De plus, peut-on trouver la solution vérifiant la condition initiale $B(0) = B_0$ pour une certaine valeur B_0 ?

REMARQUE 1 : Les équations différentielles sont partout ! En physique (mécanique, optique, électronique, acoustique...), en chimie (cinétique...), en biologie (génétique, populations d'espèces...), en économie... Étudier leur structure et trouver des solutions est donc un outil mathématique essentiel.

Notons qu'il existe en général plusieurs solutions à une équation différentielle donnée. Par exemple, l'équation $f'' = -f$ admet pour solution $f(x) = \cos(x)$, mais aussi $\sin(x)$, ou encore $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il est donc important de regarder l'ensemble des solutions d'une équation différentielle donnée.

2.2. Équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre

DÉFINITION 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b deux fonctions continues définies sur I . Une équation :

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

s'appelle une **équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1**.

Résoudre une telle équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions dérivables y définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in I$, $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$.

THÉORÈME 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit α une fonction continue sur I . On note A une primitive de la fonction α sur I (i.e. $A'(x) = \alpha(x)$ pour $x \in I$).

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' + \alpha(x)y = 0$ sont les fonctions f s'écrivant pour une certaine constante K :

$$\begin{aligned} f &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto K e^{-A(x)}. \end{aligned}$$

2. De plus, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$.

EXERCICE 1 Démontrer ce théorème. Indication : multiplier l'équation par $e^A(x)$ et reconnaître la dérivée d'un produit.

EXEMPLE 1 : Revenons à l'exemple initial : comme $-kt$ est une primitive de la constante $-k$, $B(t)$ est solution de $y' - ky = 0$ si et seulement si $B(t) = K e^{-(-kt)} = K e^{kt}$. Si on ajoute la condition $B(0) = B_0$, on obtient $K = B_0$ et :

$$\text{Pour tout } t \geq 0, \quad B(t) = B_0 e^{kt}.$$

Plus généralement,

COROLLAIRE 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a, b deux fonctions continues sur I . On suppose que a ne s'annule pas sur I et on note A une primitive de la fonction $\frac{b}{a}$.

1. Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions f s'écrivant pour une certaine constante K :

$$\begin{aligned} f &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto K e^{-A(x)}. \end{aligned}$$

2. De plus, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$.

PROPOSITION 3: PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Si y_1 et y_2 sont solutions d'une équation différentielle **linéaire**, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$.

Cette propriété se vérifie aisément pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, mais elle est en fait beaucoup plus générale.

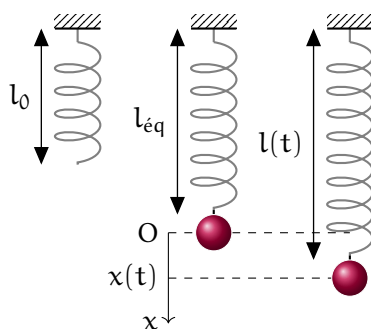
2.3. Équation différentielle linéaire homogène du second ordre

Considérons l'exemple suivant (c.f. figure 2.1) : une bille de masse m est accrochée à un ressort vertical de constante de raideur k . On écarte la bille à l'instant $t = 0$ de sa position à l'équilibre. On note $x(t)$ l'écart entre sa position à l'instant t et sa position à l'équilibre. Comment évolue la quantité $x(t)$?

En effectuant une étude des forces en présence, et en utilisant le principe fondamental de la mécanique, on montre que la fonction x vérifie la relation (on note $I = [0, +\infty[$) :

$$\text{Pour tout } t \in I, \quad m x''(t) + k x(t) = 0.$$

Cette fois-ci la fonction x est solution de l'équation différentielle $m y'' + k y = 0$ qui est un exemple d'équations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants.

FIGURE 2.1 – Élongation d'un ressort vertical (l'objet est de masse m ; le ressort de raideur k).**DÉFINITION 4**

On appelle **équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme (a, b sont des **constantes** réelles) :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Résoudre cette équation, c'est déterminer toutes les fonctions f définies sur un intervalle I , deux fois dérivables et vérifiant, pour tout $x \in I$: $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$.

Cherchons une solution de cette équation de la forme $f(x) = e^{rx}$ où r est une constante. On obtient $r^2 e^{rx} + ar e^{rx} + be^{rx} = 0$, et puisque $e^{rx} \neq 0$ on en déduit :

DÉFINITION 5: ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ l'équation (en $r \in \mathbb{C}$) : $r^2 + ar + b = 0$.

On sait, *c.f.* le chapitre sur les complexes, que cette équation caractéristique possède ou bien deux racines réelles distinctes, ou bien une unique racine réelle, ou bien deux racines complexes conjuguées. On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 6

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, notons (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ et soit (EC) : $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique. Toute solution f de (E) vérifie alors :

1. si (EC) possède deux racines **réelles** distinctes r_1, r_2 , il existe deux constantes réelles A et B telles que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.$$

2. si (EC) possède une **unique racine réelle** r_0 (le discriminant de (EC) est nul), il existe deux constantes réelles A et B telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = (A + Bx)e^{r_0 x}.$$

3. si (EC) possède deux racines **complexes** conjuguées $r_{\pm} = p \pm iq$, de parties réelles p et imaginaires $\pm q \neq 0$, il existe deux constantes réelles A et B telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = e^{px} (A \cos(qx) + B \sin(qx)).$$

De plus, dans tous les cas, si $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

REMARQUE 2 : ☉ Pour une équation d'ordre 2, il faut deux conditions initiales pour trouver une unique solution. Pour une équation d'ordre 1, une condition suffit.

- ☉ Les racines du théorème précédent ont des expressions explicites. En posant $\Delta = a^2 - 4b$ on a $r_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ dans le cas 1 ($\Delta > 0$), $r_0 = -\frac{a}{2}$ dans le cas 2 ($\Delta = 0$) et $r = p \pm iq$ avec $p = -\frac{a}{2}$ et $q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ dans le cas 3 ($\Delta < 0$).

EXERCICE 2 Résoudre l'équation différentielle de l'exemple précédent ($mx''(t) + kx(t) = 0$) et trouver la solution qui vérifie $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$

EXERCICE 3 Montrer que, dans le cas 3, $f(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ est aussi une solution de (E) si r_1 et r_2 sont solution de (EC) et faire le lien avec la solution proposée dans le théorème.

2.4. Équations différentielles linéaires avec second membre

Les équations que l'on a considéré jusqu'ici sont homogènes, de la forme $y' + \alpha y = 0$ ou $y'' + ay' + by = 0$. On étudie maintenant le cas où l'on remplace le terme nul à droite par une fonction donnée, indépendante de y . Dans l'exemple précédent, si le support du ressort n'est plus fixe mais attaché à une table vibrante d'amplitude F et de fréquence ω , on peut montrer que le mouvement de la bille est régi par l'équation différentielle suivante :

$$mx''(t) + kx(t) = F \cos(\omega t)$$

Cette équation n'est plus homogène car le membre de droite ne vaut plus zéro, elle est dite **avec second membre** ou **avec forçage**. Pour résoudre ce type d'équation, on va utiliser la linéarité des équations différentielles considérées. Supposons par exemple que l'on « devine » **une solution particulière**, que l'on note $x_p(t)$. On a donc

$$mx_p''(t) + kx_p(t) = F \cos(\omega t).$$

Considérons maintenant une solution générale $x(t)$. En soustrayant les équations précédentes on en déduit :

$$m(x'' - x_p'')(t) + k(x - x_p)(t) = 0,$$

où le second membre a maintenant disparu ! On s'est ramené à une équation différentielle homogène dont on connaît déjà l'ensemble des solutions.

THÉORÈME 7

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants avec second membre, c'est à dire

$$y' + \alpha y = g \quad \text{ou} \quad y'' + ay' + by = g$$

avec α, a et b des constantes réelles et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions de (E) sont données par

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

où y_p est **une** solution particulière de (E) et y_h une solution de l'équation différentielle homogène correspondante : $y' + \alpha y = 0$ ou $y'' + ay' + by = 0$.

REMARQUE 3 : ☉ Ce théorème ne nous donne pas la forme de la solution particulière, mais une fois que l'on connaît celle-ci il nous donne l'ensemble des solutions de (E).

- ⊙ Ce théorème reste vrai si α , a et b ne sont plus des coefficients constants mais des fonctions continues sur un intervalle.

EXERCICE 4 Trouver une solution particulière de l'équation de la bille : $mx''(t) + kx(t) = F \cos(\omega t)$ de la forme $x_p(t) = A \cos(\omega t)$ et en déduire toutes les solutions de cette équation.

2.4.1 Quelques solutions particulières

Il existe une méthode générale pour trouver la solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants. On se restreindra ici à quelques second membres spécifiques.

PROPOSITION 8

Considérons l'équation

$$y'(x) + \alpha y(x) = P(x)e^{kx}$$

où P est un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{R}$ avec $k \neq -\alpha$. Une solution particulière est à de la forme

$$y_p(x) = Q(x)e^{kx}$$

où Q est un polynôme de degré au plus $\deg(P) = p$.

REMARQUE 4 : Cette méthode reste valable lorsque $P = 1$ ou $k = 0$.

EXERCICE 5 Trouver une solution particulière de $y'(x) + y(x) = x + 1$ et en déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

PROPOSITION 9

Considérons les équations

$$(E1) \quad y'(x) + \alpha y(x) = P(x) \cos(kx)$$

$$(E2) \quad y'(x) + \alpha y(x) = P(x) \sin(kx)$$

où P est un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Les solutions particulières sont respectivement $\operatorname{Re}(\tilde{y}_p)$ et $\operatorname{Im}(\tilde{y}_p)$ ou $\tilde{y}_p$ est une solution (complexe) de l'équation $\tilde{y}'(x) + \alpha \tilde{y}(x) = P(x)e^{ikx}$, de la forme

$$\tilde{y}_p(x) = Q(x)e^{ikx}$$

où Q est un polynôme de degré au plus $\deg(P) = p$.

REMARQUE 5 : Puisque $e^{ikx} = \cos(x) + i \sin(x)$, l'équation sur $\tilde{y}$ permet de résoudre à la fois (E1) et (E2) par une fonction à valeurs complexes. On retrouve ensuite la solution de chaque équation en prenant la partie réelle ou imaginaire.

Les deux méthodes ci-dessus s'appliquent aussi au cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2

PROPOSITION 10

Considérons l'équation

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = P(x)e^{kx}$$

où P est un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $k^2 + ak + b \neq 0$. Une solution particulière est de la forme

$$y_p(x) = Q(x)e^{kx}$$

où Q est un polynôme de degré au plus $\deg(P) = p$.

EXERCICE 6 Trouver une solution particulière de l'équation $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{2x}$.

PROPOSITION 11

Considérons les équations

$$(E1) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = P(x) \cos(kx)$$

$$(E2) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = P(x) \sin(kx)$$

où P est un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$ avec $k \in \mathbb{R}$ tel que $k^2 \neq b$ si $a = 0$. Les solutions particulières sont respectivement $\operatorname{Re}(\tilde{y}_p)$ et $\operatorname{Im}(\tilde{y}_p)$ ou $\tilde{y}_p$ est une solution (complexe) de l'équation $\tilde{y}''(x) + a\tilde{y}'(x) + b\tilde{y}(x) = P(x)e^{ikx}$, de la forme

$$\tilde{y}_p(x) = Q(x)e^{ikx}$$

où Q est un polynôme de degré au plus $\deg(P) = p$.

2.4.2 Phénomène de résonance

Les propositions ci-dessus requièrent certaines conditions sur le paramètre k pour être valable. Que se passe-t-il lorsque cette condition n'est pas satisfaite. Reprenons l'exemple précédent de la bille oscillante et supposons que le terme de forçage s'écrit $F \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$. On cherche une solution de

$$\tilde{x}''(t) + \frac{k}{m}\tilde{x}(t) = \frac{F}{m}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

de la forme $\tilde{x}_p(t) = Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ avec $A \in \mathbb{R}$. En dérivant on obtient $\tilde{x}'_p(t) = i\sqrt{\frac{k}{m}}Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ et $\tilde{x}''_p(t) = -\frac{k}{m}Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$. En remplaçant dans l'équation on en déduit

$$\tilde{x}''(t) + \frac{k}{m}\tilde{x}(t) = -\frac{k}{m}Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{k}{m}Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = 0$$

Ce terme disparaît et ne permet donc pas de trouver de solution particulière à l'équation avec second membre. Le problème vient du fait que le forçage $A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$ est aussi une solution de l'équation différentielle homogène. Ce phénomène est appelé **résonance** et a de nombreuses conséquences physiques. Pour la résolution des équations différentielles, on verra en Travaux Dirigés quelques exemples pour trouver une solution particulière dans ce cas.

3 MATRICES, SYSTÈMES, DÉTERMINANTS



Objectifs :

- Initiation à l'algèbre linéaire par l'étude du calcul matriciel.
- Savoir appliquer la méthode du pivot de Gauss à la résolution de systèmes linéaires et/ou au calcul de l'inverse d'une matrice.
- Savoir faire le lien entre l'inversibilité d'une matrice et système linéaire.
- Savoir calculer un déterminant et connaître ses applications.

3.1. Introduction

Considérons le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x + y - 6z &= 4 \\ -x + 2y + 3z &= 0 \\ x - 2y &= 2 \end{cases} \quad (3.1)$$

On cherche à répondre aux questions suivantes :

- Existe-t-il une solution $x, y, z \in \mathbb{R}$ à ce système ?
- Si oui, est-elle unique ?
- Si elle n'est pas unique, combien y en a-t-il et quelles sont-elles ?

Le but de ce chapitre est de répondre de façon systématique à ces questions pour tout système linéaire. On peut aussi se demander comment varie l'ensemble des solutions d'un système en fonction du nombre d'inconnues p et du nombre d'équations n .

DÉFINITION 1: SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Un système (S) de n équations à p inconnues est dit linéaire si, pour tout $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ solutions de (S) , $(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p)$ est aussi solution de (S) . Résoudre un tel système revient à trouver l'ensemble de ses solutions.

Dans notre exemple précédent, on a 3 inconnues et 3 équations. Il s'avère commode de noter l'ensemble des informations de ce système à l'aide de trois tableaux :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le tableau X contient l'ensemble des inconnues x, y et z . Le tableau B regroupe le terme dans chaque équation qui ne dépend pas de ces inconnues (à droite dans notre exemple). Enfin, l'information restante est encodée dans les différents coefficients qui apparaissent comme facteur multiplicatif devant chaque inconnue pour chacune des équations, c'est le tableau A . Ces trois tableaux de nombres sont appelés **matrices**. La manipulation des équations pour résoudre un système peut ainsi être remplacée par une théorie très complète : le **calcul matriciel**.

3.2. Matrices

Dans toute la suite la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n , p ou q désignent des entiers strictement positifs.

3.2.1 Définitions

DÉFINITION 2: MATRICE

Une **matrice** A à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à n lignes et p colonnes est un tableau de n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \text{ notée aussi : } ((a_{ij}))_{i \leq n, j \leq p}$$

A est dite de **taille** $n \times p$. Les a_{ij} sont les **coefficients** de la matrice.

Le premier indice (i ici) désigne la ligne du coefficient, le second sa colonne.

Enfin, l'**ensemble des matrices** $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $n = p$.

REMARQUE 1 : On peut noter une matrice de façon équivalente avec des parenthèses ou des crochets

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

mais on n'utilisera **pas** les simples barres verticales $|\cdot|$, réservées aux déterminants (cf. dernière section). Pour les coefficients d'une matrice, on peut noter $a_{i,j}$ au lieu de a_{ij} en cas d'ambiguïté.

DÉFINITION 3: MATRICES PARTICULIÈRES

- ⊙ On appelle **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $O_{n,p}$.
- ⊙ Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée**.
- ⊙ La matrice $I_n = ((\delta_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée **matrice identité** (on rappelle que δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker ayant pour valeur 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$) :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ⊙ Si $p = 1$, la matrice n'a qu'une colonne : c'est donc une **matrice-colonne**. *idem*, si $n = 1$ on parle de **matrice-ligne**.

EXEMPLE 1 : Dans l'exemple de l'introduction, la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, et les matrices X et $B \in \mathcal{M}_{3,1}$ sont des matrices colonnes.



Deux matrices $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$ sont égales si :

- ⊙ elles possèdent les mêmes dimensions,
- ⊙ Pour tout i et j , on a : $a_{ij} = b_{ij}$.

DÉFINITION 4

Soit $M = ((m_{ij}))$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ⊙ On appelle **coefficient diagonaux** de M les coefficients m_{ii} .
- ⊙ M est une matrice **diagonale** si $m_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$.
- ⊙ M est une matrice **triangulaire supérieure** si $m_{ij} = 0$ dès que $i > j$.
- ⊙ M est une matrice **triangulaire inférieure** si $m_{ij} = 0$ dès que $i < j$.

EXEMPLE 2 : La matrice $\begin{pmatrix} 2i & -3 & 5+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

3.2.2 Opérations sur les matrices

DÉFINITION 5: ADDITION DE MATRICES

Soient $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **somme** $M + N$ est la matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$M + N = ((m_{ij} + n_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$



On n'**additionne** que des matrices de **même taille** !

DÉFINITION 6: MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}$. On définit pour M la **multiplication par le scalaire** a par :

$$aM = ((a m_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

DÉFINITION 7: PRODUIT DE MATRICES

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le **produit** de ces deux matrices par :

$$AB = ((c_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}),$$

avec pour tout (i, j) :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$



Le produit AB n'est défini **que** lorsque le nombre de colonnes de la première matrice A est égal au nombre de lignes de la seconde matrice B !

REMARQUE 2 : Il est alors possible que le produit AB soit bien défini mais que le produit BA ne le soit pas. Cependant, le produit de deux matrices carrées est toujours défini.

Dans un premier temps, pour effectuer le calcul AB , il est possible de poser l'opération sous la forme ci-après : la seconde matrice B est décalée vers le haut, le produit se « lisant » en bas à droite.

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & b_{2j} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 1 Calculer le produit matriciel AB où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 3 : Si X est une matrice-colonne à n éléments et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AX est toujours une matrice-colonne à n éléments.

EXERCICE 2 Montrer que l'équation matricielle $AX = B$ est équivalente au système d'équations (3.1), où A, X et B sont définis dans l'introduction

PROPOSITION 8: RÈGLES DE CALCUL

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors on a :

1. $A+(B+C) = (A+B)+C$: le résultat est simplement noté $A + B + C$ (associativité de l'addition)
2. $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$ (existence d'un élément neutre pour +)
3. $A + (-A) = (-A) + A = O_{n,p}$ (existence d'un opposé)
ou plus simplement $A - A = -A + A = O_{n,p}$
4. $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition)
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributivité scalaires/matrices)
6. $1 A = A$ et $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$ notée $\lambda \mu A$

En ajoutant ces propriétés, on dit que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des opérations $+$ et « multiplication par un scalaire » est un *espace vectoriel*.

Pour la suite $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $N, N' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

7. $I_n A = A I_p = A$
8. $M(NP) = (MN)P$ noté plus simplement MNP (associativité du produit)
9. $(\lambda A + \mu B)N = \lambda AN + \mu BN$ et $A(\lambda N + \mu N') = \lambda AN + \mu AN'$. (distributivité)
10. $\lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$



La multiplication des matrices est **non commutative**, c'est-à-dire qu'en général, $MN \neq NM$!



La multiplication n'est **pas intègre** : si $AB = 0$, on ne peut pas en conclure, en général, que $A = 0$ ou $B = 0$!

EXEMPLE 3 : Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On a $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2,2}$ alors que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

DÉFINITION 9: MATRICES E_{ij}

On définit $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf en position (i, j) , où ce coefficient vaut 1.

EXEMPLE 4 : Pour $n = 2$ on a quatre matrices E_{ij}

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 3

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, calculer $E_{12}A$
2. Écrire les coefficients de $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide de symboles de Kronecker.
3. Montrer en utilisant la définition du produit matriciel que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $E_{ij}A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles, sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A .

DÉFINITION 10: TRANSPOSITION

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **transposée** de M , notée tM est la matrice de taille $p \times n$ définie par :

$${}^tM = ((\ell_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{où} \quad \ell_{i,j} = m_{j,i}.$$

1. Si ${}^tM = M$, on dit que M est une **matrice symétrique**.
2. Si ${}^tM = -M$, on dit que M est une **matrice antisymétrique**.

REMARQUE 4 : ☉ La transposée d'une matrice-ligne est une matrice-colonne, et vice versa :

$${}^t(1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- ⊙ Pour une matrice carrée, la transposition revient à échanger les coefficients de façon symétrique par rapport à la diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 5 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

PROPOSITION 11: RÈGLES DE CALCUL

Soient A, B et C des matrices telles que $A + B$ et AC soient bien définies et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

- ⊙ ${}^t({}^tA) = A$
- ⊙ ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ⊙ $\Leftrightarrow {}^t(AC) = {}^tC \times {}^tA$
- ⊙ ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

3.3. Matrices inversibles

3.3.1 Définitions

DÉFINITION 12: MATRICE INVERSIBLE

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$MN = NM = I_n.$$

L'ensemble des toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

REMARQUE 5 : ⊙ Une matrice inversible est nécessairement carrée.

- ⊙ Il est possible de montrer qu'il suffit d'avoir l'existence de N vérifiant l'une des deux égalités — $MN = I_n$ ou $NM = I_n$ — pour assurer l'inversibilité de la matrice M .

LEMME 13: UNICITÉ DE L'INVERSE

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Il existe une **unique** matrice B telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, on dit que B est l'inverse de A et est notée $B = A^{-1}$.

PROPOSITION 14: RÈGLES DE CALCUL AVEC L'INVERSE

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}$:

- $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\Leftrightarrow$
- ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $aA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(aA)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1}$.

PROPOSITION 15: PREMIÈRE CARACTÉRISATION DES MATRICES INVERSIBLES

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour toute matrice-colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une **unique** solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ satisfaisant l'équation $AX = Y$. Cette unique solution s'écrit alors $X = A^{-1}Y$.

On verra dans la section 4 que tout système linéaire défini par une matrice carrée inversible admet une unique solution.

EXERCICE 4 Montrer que la matrice A définie dans l'introduction est inversible et que son inverse est

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

En déduire l'ensemble des solutions du système (3.1).

PROPOSITION 16: MATRICES INVERSIBLES ET SIMPLIFICATION

Considérons $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $AB = AC$. Alors, on a nécessairement $B = C$.



Ce résultat est faux en général si A n'est pas inversible !

EXEMPLE 6 : Avec $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on a $AB = AC = 0$ alors que $B \neq C$.

La section suivante a pour but de fournir une méthode générale permettant de trouver l'inverse d'une matrice A .

3.3.2 Matrices et opérations élémentaires

Opérations élémentaires sur les lignes

On rappelle (c.f. exercice 3) que la matrice $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf en position (i, j) où ce coefficient a pour valeur 1.

DÉFINITION 17: MATRICES DE DILATATION, TRANSVECTION ET PERMUTATION

Soit $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.

- ⊙ On appelle **matrice de dilatation de rapport** a notée $D_i(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice I_n dont le $i^{\text{ème}}$ coefficient est remplacé par a :

$$D_i(a) = I_n + (a - 1)E_{ii}.$$

- ⊙ On appelle **matrice de transvection de rapport** b la matrice $T_{ij}(b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$T_{ij}(b) = I_n + bE_{ij}.$$

- ⊙ On appelle **matrice de permutation** notée $P_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ égale à I_n à l'exception de ses colonnes i et j qui sont échangées.

LEMME 18

Toute matrice de permutation s'écrit comme un produit de matrices de dilatation et transvection, pour tout (i, j) on a :

$$P_{ij} = D_i(-1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1).$$

De plus on a $P_{ij}^2 = P_{ij}P_{ij} = I_n$.

En utilisant l'exercice 3, on montre alors :

DÉFINITION 19: OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES ET LES COLONNES

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.

On note L_k la $k^{\text{ème}}$ ligne de M .

On définit les **opérations élémentaires sur les lignes** :

- $L_i \rightarrow aL_i$ donne la matrice obtenue à partir de M en remplaçant L_i par aL_i
- $L_i \rightarrow L_i + bL_j$ donne la matrice obtenue à partir de M en remplaçant L_i par $L_i + bL_j$
- $L_i \leftrightarrow L_j$ donne la matrice obtenue à partir de M en échangeant L_i et L_j .

Chacune de ces opérations se traduit par une multiplication matricielle :

PROPOSITION 20: OPÉRATIONS SUR LES LIGNES

En utilisant les notations de la définition précédente, le résultat de l'opération :

- $L_i \rightarrow aL_i$ est donnée par la matrice : $D_i(a) \times M$.
- $L_i \rightarrow L_i + bL_j$ est donnée par la matrice : $T_{ij}(b) \times M$.
- $L_i \leftrightarrow L_j$ est donnée par la matrice : $P_{i,j} \times M$.

EXERCICE 5 Calculer $D_1(2)A$, $T_{31}(3)A$ et $P_{12}A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

LEMME 21: INVERSIBILITÉ DES OPÉRATIONS SUR LES LIGNES

On a :

1. pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, $D_i(a)$ est une matrice inversible d'inverse $D_i(\frac{1}{a})$,
2. pour tout $b \in \mathbb{K}$, $T_{ij}(b)$ est une matrice inversible d'inverse $T_{ij}(-b)$,
3. les matrices P_{ij} sont donc inversibles.

En utilisant ce qui précède :

LEMME 22: OPÉRATIONS SUR LES LIGNES ET INVERSIBILITÉ

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il est possible de trouver une succession d'opérations sur les lignes transformant M en I_n **alors la matrice M est inversible**. De plus, les mêmes opérations appliquées à I_n donnent M^{-1} .

COROLLAIRE 1: MÉTHODE POUR « POSER » LE CALCUL DE L'INVERSE

Pour poser le calcul de M^{-1} , on peut commencer par écrire la matrice M augmentée de I_n (c'est à dire la matrice M à laquelle on a accolé les colonnes de I_n) : on l'écrit $[M|I_n]$.

Si une suite d'opérations sur les lignes de M la transforme en I_n , on applique cette même suite d'opérations sur la matrice augmentée $[M|I_n]$. On obtient alors la matrice $[I_n|M^{-1}]$ et la partie à droite de I_n fournit M^{-1} .

EXERCICE 6 Montrer que la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et trouver M^{-1} .

DÉFINITION 23

Nous dirons *dans ce chapitre* que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **équivalente sur les lignes** à $U \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes transformant A en U . On notera $A \simeq U$.

REMARQUE 6 : 1. On a $A \simeq U$ si et seulement si il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ qui soit produit de matrices de dilatation ou transvection vérifiant $U = PA$.

2. Cette relation $\simeq$ est une relation dite **réflexive** ($A \simeq A$), **symétrique** (si $A \simeq U$ alors $U \simeq A$) et **transitive** (si $A \simeq U$ et $U \simeq B$ alors $A \simeq B$).

3. On a donc montré dans le lemme 22 que si $A \simeq I_n$ alors A est inversible.

On peut alors se poser la question de la réciproque : si A est inversible, est-ce que A est bien équivalente à I_n ? De plus, toutes les matrices ne sont pas inversibles, il existe alors des matrices M qui ne sont pas équivalente à I_n . Dans ce cas, nous allons montrer que M reste équivalente à une matrice simple d'utilisation (c.f. la partie sur les systèmes linéaires) et « ressemblant à I_n ».

Méthode du pivot de Gauss**DÉFINITION 24: ÉLÉMENT DE TÊTE**

On appelle **élément de tête** d'une ligne non nulle d'une matrice l'élément non nul situé le plus à gauche de la ligne.

DÉFINITION 25: MATRICE (BIEN) ÉCHELONNÉE

Une matrice est **échelonnée** si elle remplit les deux conditions suivantes :

(E₁) toutes ses lignes non nulles sont situées au-dessus de ses lignes nulles,

(E₂) chaque élément de tête d'une ligne se trouve **dans une colonne strictement à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.**

Si l'on rajoute les deux conditions :

(R₁) l'élément de tête de chaque ligne (non nulle) vaut 1,

(R₂) chaque 1 de tête d'une ligne est **le seul élément non nul de sa colonne**,

alors la matrice est dite **échelonnée réduite** ou **bien échelonnée**.

EXEMPLE 7 : La matrice $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ est échelonnée, mais non réduite. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas échelonnée. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ est échelonnée réduite.

EXERCICE 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée carrée.

On dit qu'un élément de tête d'une matrice échelonnée est à droite de la diagonale s'il se trouve en position (ℓ, p) avec $p > \ell$.

1. Montrer que si l'élément de tête de la ligne ℓ de A est à droite de la diagonale, alors tous les éléments de tête des lignes non nulles suivantes le sont aussi.
2. Montrer que la matrice A est triangulaire supérieure.
3. Montrer que si A est bien échelonnée sans ligne nulle, alors $A = I_n$.

On obtient donc le lemme :

LEMME 26: CARACTÉRISATION DE I_n PARMI LES MATRICES ÉCHELONNÉES RÉDUITES

Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **bien échelonnée**. Alors :

$$E = I_n \iff E \text{ est inversible} \iff \text{la dernière ligne de } E \text{ est non nulle.}$$

THÉORÈME 27

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il est possible de transformer M en une matrice bien échelonnée en utilisant une suite d'opérations sur les lignes.

Dit autrement, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente (c.f. déf. 23) à une matrice bien échelonnée.

COROLLAIRE 2

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle, il existe une matrice inversible P , produit de matrices de dilatation et transvection, telle que PM est bien échelonnée.

REMARQUE 7 : Il est possible de montrer que si deux matrices bien échelonnées sont équivalentes sur les lignes alors elles sont égales : toute matrice est donc équivalente sur les lignes à une *unique* matrice bien échelonnée.

COROLLAIRE 3: MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS (I)

En pratique, pour **échelonner une matrice**, on utilise l'algorithme suivante :

1. On note C la colonne la plus à gauche contenant au moins un coefficient non nul : on note L sa ligne (si ce coefficient est 1, cela simplifie souvent les calculs).
2. On permute cette ligne avec la première et on ajoute des multiples adéquats de L aux autres lignes pour faire apparaître des 0 dans le reste de la colonne C .
3. On recommence les étapes précédentes sur la matrice obtenue en oubliant sa première ligne... On répète ceci jusqu'à obtenir une matrice-ligne.

Chaque élément de tête de la matrice échelonnée obtenu s'appelle **un pivot**.

EXERCICE 8 Échelonner la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & -6 & -22 \end{bmatrix}$.

COROLLAIRE 4: MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS (II)

Pour **bien échelonner une matrice**, on ajoute à la méthode donnée dans le corollaire 3 les étapes :

1. on divise chaque ligne contenant un pivot par sa valeur pour mettre les éléments de tête à 1,
2. pour chaque pivot — *en commençant par celui le plus à droite vers celui le plus à gauche* — on « nettoie » la colonne le contenant en mettant des zéros aux autres positions de cette colonne : on utilise pour cela la ligne du pivot.

EXERCICE 9 Bien échelonner la matrice A de l'exercice précédent.

REMARQUE 8 : On peut maintenant montrer la réciproque du résultat du lemme 22. En effet soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$: en appliquant le corollaire 2, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *produit de matrices de transvection et dilatation* telle que $PA := E$ soit bien échelonnée. Alors par produit de matrices inversibles, $E = PA$ est inversible. Le lemme 26 assure que $E = I_n$. Donc $A = P^{-1}$ qui reste un produit de matrices de dilatation/transvection. On obtient donc l'équivalence : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff A \simeq I_n$. Finalement :

PROPOSITION 28: LES MATRICES INVERSIBLES SONT LES PRODUITS DE TRANSVECTION/DILATATION

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est équivalente sur les lignes à la matrice I_n .

Dit autrement :

A est inversible si et seulement si elle s'écrit un produit de matrices de transvection/dilatation.

3.4. Systèmes linéaires

3.4.1 Généralités

DÉFINITION 29: SYSTÈME LINÉAIRE

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. Un **système d'équations linéaires** à n équations et p inconnues est une équation de la forme $AX = B$ où $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice de**

coefficients du système, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le **second membre** et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la **matrice inconnue**.

DÉFINITION 30: SOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

En reprenant les notations précédentes, si le vecteur $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ satisfait l'égalité $AX = B$, on dit que X est une **solution** de ce système.

REMARQUE 9 : Le vecteur $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ est alors solution de $AX = B$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$
DÉFINITION 31

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. **Résoudre** le système linéaire $AX = B$ consiste à trouver toutes les solutions de ce système.

DÉFINITION 32: SYSTÈMES ÉQUIVALENTS

Deux systèmes linéaires sont dit **équivalents** si et seulement s'ils possèdent *exactement* les mêmes solutions.

La suite de cette section a pour but d'exhiber une méthode permettant de toujours trouver un système équivalent dont les solutions s'écrivent aisément.

3.4.2 Résolution par la méthode du pivot

Nous avons déjà vu à la proposition 15 le résultat suivant :

PROPOSITION 33: MATRICE A INVERSIBLE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Soit A une matrice carrée inversible de $GL_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ admet alors une *unique solution* X donnée par :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = A^{-1}B.$$

DÉFINITION 34: MATRICE AUGMENTÉE D'UN SYSTÈME

Soit le système linéaire $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La **matrice augmentée de ce système** est la matrice $[A|B] \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ constituée de A suivie de la matrice colonne B .

Dans le cas où cette matrice augmentée est échelonnée, les solutions du système associée s'écrivent facilement :

PROPOSITION 35: SOLUTIONS D'UN SYSTÈME ÉCHELONNÉ

Soit un système $AX = B$ (noté (S)) de matrice augmentée $[A|B] \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ échelonnée. On note r le nombre de pivots de $[A|B]$ et $\mathcal{J}$ l'ensemble des colonnes contenant ces pivots.

1. Si $p+1 \in \mathcal{J}$ (la dernière colonne contient un pivot) alors (S) n'a pas de solutions.
2. Sinon, $r \leq p$.

(a) Si $r = p$ alors (S) possède une unique solution.

(b) Si $r < p$ alors (S) possède une infinité de solutions :

- ⊙ chaque variable x_i , où $i \notin \mathcal{J}$, est libre,
- ⊙ les variables x_j , pour $j \in \mathcal{J}$, s'écrivent en fonction des variables libres.

EXERCICE 10 Donner toutes les solutions $X = {}^t[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ de chacun des systèmes suivants dont on écrit la matrice augmentée :

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La proposition suivante permet de justifier la méthode du pivot pour résoudre des systèmes linéaires :

PROPOSITION 36

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors le système $AX = B$ est équivalent au système $PAX = PB$.

COROLLAIRE 5: MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

En pratique, pour résoudre un système linéaire $AX = B$, on échelonne la **matrice augmentée du système** $[A|B]$ (on concatène la matrice A et la colonne B). On obtient alors une matrice échelonnée $[A'|B']$: les solutions du système sont alors les solutions de $A'X = B'$, que l'on trouve en utilisant la proposition 35.

COROLLAIRE 6: NOMBRE DE SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Tout système linéaire admet soit zéro, soit une seule, soit une infinité de solutions.

EXERCICE 11 Résoudre le système $AX = B$, où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

3.4.3 Quelques propriétés complémentaires

PROPOSITION 37: STRUCTURE DES SOLUTIONS

On associe à tout système linéaire $AX = B$, le système linéaire $AX = 0$ dit **système linéaire homogène associé à A**.

Supposons qu'il existe une solution X_0 tel que $AX_0 = B$ alors les solutions de $AX = B$ sont les matrices s'écrivant sous la forme $X_0 + Y$ pour Y solution du système homogène associé.

Terminons cette section en donnant une relation entre le nombre de solutions du système homogène associé à A et l'inversibilité de A :

THÉORÈME 38: AUTRE CARACTÉRISATION DE L'INVERSIBILITÉ

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors :

A est inversible si et seulement si le système $AX = 0$ ne possède que la solution nulle $X = 0$.

3.5. Déterminants

Dans toute cette section, les matrices sont supposées *carrées*.



Les déterminants sont définis *uniquement* pour les matrices carrées !

3.5.1 Introduction

DÉFINITION 39: DÉTERMINANT D'UNE MATRICE 1×1

La matrice $A = ((a_{11}))$ est inversible si et seulement si $a_{11} \neq 0$. On définit le **déterminant** de $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, que l'on note $\det(A)$, comme étant égal à a_{11} .

DÉFINITION 40: DÉTERMINANT D'UNE MATRICE 2×2

Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on note **$\det(A) = ad - bc$** .

Ce nombre est appelé **déterminant** de A .

PROPOSITION 41

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et l'inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

REMARQUE 10 : Pour des matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a donc $\det A \neq 0$ si et seulement si A est inversible. On donne à la définition 42 une définition du déterminant généralisant ce résultat à des matrices de toutes tailles.

3.5.2 Définition

DÉFINITION 42: DÉFINITION DU DÉTERMINANT PAR RÉCURRENCE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A , noté $\det(A)$ le scalaire défini comme suit :

- ⊙ Si $n = 1$ et $A = (a)$, alors $\det(A) = a$ (c.f. définition 39).
- ⊙ Si $n > 1$ et $A = ((a_{ij}))$, on pose :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}),$$

où $A_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue à partir de A en retirant à A sa $k^{\text{ème}}$ ligne et sa $\ell^{\text{ème}}$ colonne.

On dit que l'on a **développé le déterminant de A par rapport à la première colonne de A** .

On note également $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

DÉFINITION 43: MINEUR ET COFACTEUR D'INDICE (i, j)

Le déterminant de $A_{i,j}$ (c.f. définition précédente) est appelé **mineur** d'indice (i, j) .

Le **cofacteur** d'indice (i, j) , noté $C_{i,j}$, est obtenu en multipliant $(-1)^{i+j}$ par le mineur d'indice (i, j) .

EXEMPLE 8 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$. Cherchons $C_{3,1}$:

$j = 1$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$i = 3$

et

	+	-	+	-
	-	+	-	+
+	-	+	-	
	-	+	-	+

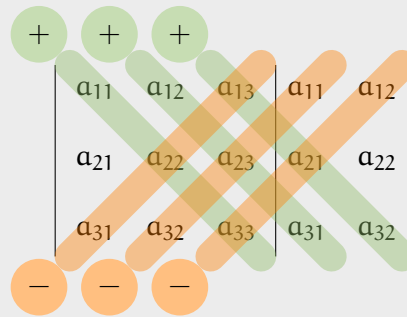
Ainsi, le cofacteur $C_{3,1} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ égal ici à 0.

REMARQUE 11 : Dans le cas où $n = 2$, cette définition coïncide bien avec ce qui a été défini dans la définition 40.

COROLLAIRE 7: RÈGLE DE SARRUS POUR LES MATRICES 3×3

Si $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a la formule, appelée **règle de Sarrus** :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$



EXERCICE 12 Calculer le déterminant de la matrice suivante en utilisant la définition générale puis la règle de Sarrus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3.5.3 Propriétés calculatoires

PROPOSITION 44: DÉTERMINANT D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE

Le déterminant d'une matrice triangulaire T est égal au produit des coefficients diagonaux de T .

COROLLAIRE 8: DÉTERMINANT DES MATRICES DE TRANSVECTION/DILATATION

- ⊙ Le déterminant d'une matrice de transvection est égal à 1,
- ⊙ le déterminant d'une matrice de dilatation de rapport λ vaut λ .

PROPOSITION 45: DÉTERMINANTS ET OPÉRATIONS SUR LES LIGNES

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

1. Si B est la matrice obtenue après l'opération $L_i \rightarrow \lambda L_i$ alors $\det(B) = \lambda \det(A)$.
2. Si B est la matrice obtenue après l'opération $L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j$ alors $\det(B) = \det(A)$.
3. Si B est la matrice obtenue après l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ alors $\det(B) = -\det(A)$.

En utilisant les relations précédentes on a les corollaires :

COROLLAIRE 9

Si A est une matrice carrée ayant une ligne nulle. Alors $\det(A) = 0$.

COROLLAIRE 10

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $\lambda_k \in \mathbb{K}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$.

« Ajouter une combinaison linéaire des autres lignes à une ligne ne modifie pas le déterminant ».

Plus précisément :

Si A' est obtenue en modifiant A par l'opération $L_i \rightarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k$ alors $\det(A) = \det(A')$.

On peut maintenant utiliser ces résultats pour énoncer les deux propriétés essentielles du déterminant :

PROPOSITION 46: DÉTERMINANT D'UN PRODUIT DE MATRICES

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$

PROPOSITION 47: DÉTERMINANT ET INVERSIBILITÉ

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Démontrons les deux propositions précédentes :

Étape 1 Le corollaire 8 et la proposition 45 assurent que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ pour toute matrice B si A est une matrice de dilatation ou de transvection. Par une récurrence immédiate, le résultat reste vrai dans le cas où A est un produit de matrices de dilatation/transvection.

Étape 2 On montre que $\det A \neq 0 \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un produit de matrices de dilatation/transvection P et une matrice bien échelonnée E telle que $PA = E$ (c.f. corollaire 2 page 10).

La première étape permet d'écrire $\det(E) = \det(P) \det(A)$. On distingue alors deux cas :

- ⊙ Si A est inversible alors E est inversible (car produit de matrices inversibles) et bien échelonnée : le lemme 26 assure que $E = I_n$. Ainsi, $\det(E) = 1 = \det(P) \det(A)$ (en particulier, $\det(A) \neq 0$).
- ⊙ Si A n'est pas inversible alors E ne l'est pas non plus (car sinon, $A = P^{-1}E$ serait un produit de matrices inversibles donc inversible). En particulier, $E \neq I_n$ et le lemme 26 assure que E contient une ligne nulle : ainsi (c.f. corollaire 9) $\det(E) = 0$. Comme P est inversible, le début de la preuve assure que $\det(P) \neq 0$ donc $\det(A) = 0$.

Étape 3 On veut montrer que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ pour toute matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On distingue deux cas :

- ⊙ Si A est non inversible, alors AB non plus donc $\det(A) = \det(AB) = 0$, ce qui donne le résultat.
- ⊙ Si A est inversible, alors A est produit de matrices de transvection/dilatation et l'étape 1 permet de conclure.

PROPOSITION 48: DÉTERMINANT ET TRANSPOSÉE

Si A est une matrice $n \times n$ alors :

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

On distingue deux cas :

- ⊙ Si A n'est pas inversible alors tA non plus et $\det(A) = \det({}^tA) = 0$.
- ⊙ Si A est inversible, alors $A = E_k E_{k-1} \dots E_1$ où chaque E_i est une matrice de dilatation/transvection. On a donc : $\det(A) = \det(E_k) \det(E_{k-1}) \dots \det(E_1)$ et $\det({}^tA) = \det({}^tE_1) \det({}^tE_2) \dots \det({}^tE_k)$. Mais il est aisé de remarquer que $\det({}^tE_k) = \det(E_k)$ pour toute matrice de dilatation/transvection. On obtient alors le résultat voulu.

REMARQUE 12 : Ainsi, toutes les propriétés énoncées précédemment restent vraies en remplaçant le mot « ligne » par « colonne » : il est possible de faire des manipulations sur les colonnes, toute matrice ayant une colonne nulle a un déterminant nul...

La définition donnée pour le déterminant n'est qu'une possibilité pour développer le déterminant d'une matrice :

PROPOSITION 49: DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE LIGNE OU UNE COLONNE DE A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j}).$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne.

De même, si $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j}).$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Une stratégie vise donc à développer selon une ligne et/ou une colonne contenant beaucoup de zéros.

EXERCICE 13 Calculer :

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

3.5.4 Applications**Forme explicite de l'inverse d'une matrice : formule par la comatrice****DÉFINITION 50: COMATRICE**

On appelle **comatrice** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice des cofacteurs de A (voir définition 43 page 15) :

$$\text{com}(A) = (C_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

PROPOSITION 51: FORMULE DE L'INVERSE D'UNE MATRICE

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a toujours :

$$A \times {}^t\text{com}(A) = \det(A)I_n.$$

De plus, si A est inversible alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A).$$

EXERCICE 14 Écrire cette formule pour une matrice 2×2 .

EXERCICE 15 Calculer l'inverse de la matrice A donnée en introduction en utilisant la formule de la comatrice.

Solution explicite d'un système : formule de Cramer

DÉFINITION 52: SYSTÈME DE CRAMER

Un système linéaire est dit de **Cramer** ⁽¹⁾ s'il admet autant d'équations que d'inconnues et s'il possède une unique solution.

PROPOSITION 53: FORMULE DE CRAMER

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système carré $AX = B$ est de Cramer si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution s'écrit $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ où pour tout i : $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, avec A_i , la matrice A dans laquelle la $i^{\text{ème}}$ colonne de A est remplacée par B .

La première partie de cette proposition est déjà connue. Pour la deuxième partie, on a que $\det(A)X = \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix}$. Mais on a $\begin{cases} X = A^{-1}B \\ \det(A)A^{-1} = {}^t\text{com}(A) \end{cases}$, on doit donc montrer : $\begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix} = {}^t\text{com}(A) \times B$. En développant $\det(A_i)$ par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ colonne — qui est B —, on obtient le résultat.

EXERCICE 16 Résoudre le système (3.1) de l'introduction en utilisant les formules de Cramer.

(1). Gabriel Cramer, Mathématicien suisse (1704—1752).