

# Méthodes numériques: problèmes dépendant du temps

Responsable de cours: Gabriel TURINICI

cours 2019-2020, semestre II

Master 1 Math

©Université Paris Dauphine - PSL

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Exemples : épidémiologie, finances, calcul de dérivée et contrôle</b>	<b>3</b>
1.1	Equations différentielles ordinaires (EDO)	3
1.2	Équations différentielles stochastiques (EDS)	5
1.3	Calcul de dérivée dans un graphe computationnel, contrôle des équations d'évolution	6
<b>2</b>	<b>Équations différentielles ordinaires (EDO)</b>	<b>7</b>
2.1	Existence et unicité de la solution	7
2.2	Schémas numériques	8
2.2.1	Définition de 4 schémas :	9
2.3	Erreur, consistance et ordre	10
2.3.1	Erreur	10
2.3.2	Consistance et ordre	11
2.4	Stabilité et convergence	11
2.4.1	Zéro-stabilité	11
2.4.2	Convergence	13
2.4.3	Stabilité absolue	14
2.5	Méthodes d'ordre supérieur : Runge-Kutta	16
2.5.1	Construction de méthodes d'ordre 2 (explicites)	17
2.5.2	Consistance	18
2.6	Pas de temps adaptatif pour R-K	18
2.7	Systèmes d'EDO	19
2.7.1	Stabilité d'un système :	20
2.7.2	Systèmes raides	20
2.8	Respect de la structure des solutions : lois de conservation, symplecticité et temps long	21
2.9	Application en épidémiologie : modèle SIR	21
2.10	Exercices EDO	23

<b>3</b>	<b>Optimisation, contrôle, adjoint</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Équations différentielles stochastiques (EDS)</b>	<b>28</b>
4.1	Rappels : mouvement brownien, martingales, intégrales et processus stochastiques, formule d'Ito . . . . .	28
4.2	Formules d'Ito -Taylor, schémas d'Euler-Maruyama et Milstein	29
4.3	Consistance des schémas numériques, convergence forte et faible	29
4.4	Application au delta-hedging des options et équation de Black& Scholes, Feynman-Kac . . . . .	29
4.5	Exercices . . . . .	30
4.6	Exercices EDS : solutions . . . . .	31

# Chapitre 1

## Exemples : épidémiologie, finances, calcul de dérivée et contrôle

L'objectif de ce cours est l'analyse numérique des problèmes d'évolution et le calcul de dérivée (et autres sensibilités) d'un critère dans un graphe computationnel (ceci sera appliqué au contrôle des équations d'évolution).

Pour informations additionnelles consulter le site du cours :

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~turinici/> ensuite "Cours" ensuite choisir le votre.

### 1.1 Equations différentielles ordinaires (EDO)

Modélisation en épidémiologie : le modèle SIR : S= susceptibles, I = infectieux, R = éliminés ou rétablis. Nous obtenons le système d'équations, dit modèle SIR

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \quad (1.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \quad (1.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI \quad (1.3)$$

On suppose  $S(0) = S_0 \neq 0$ ,  $I(0) = I_0 > 0$ ,  $R(0) = R_0 \geq 0$ ,  $S_0 + I_0 + R_0 = 1$  (il s'agit de proportions). Ici  $a$ ,  $r$  sont des paramètres du modèle.

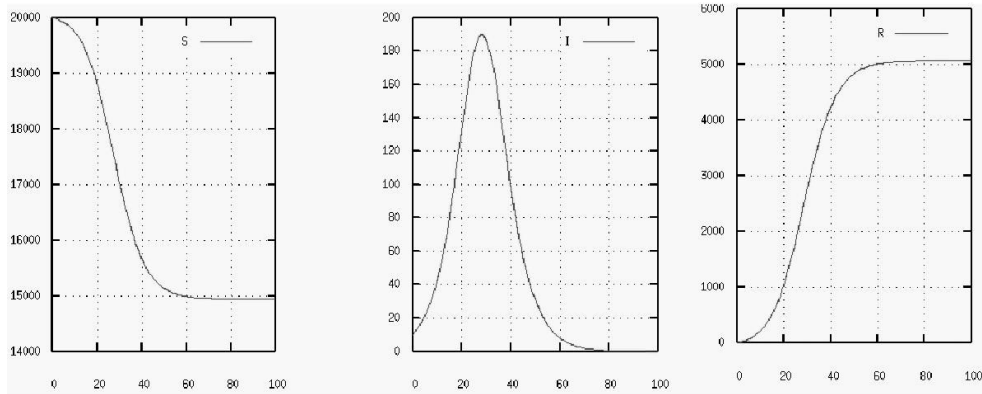


FIGURE 1.1 – Evolution typique du système dans l'équation (1.3); image prise de [3].

Une évolution typique est donnée dans la Figure 1.1.

En réalité il faut adapter le modèle, car les données réelles ne sont pas toujours compatibles avec des modèles simples, voir figure 1.2. On sort donc du domaine des modèles à solution analytique et on doit alors trouver des approximations numériques précises de leur solutions.

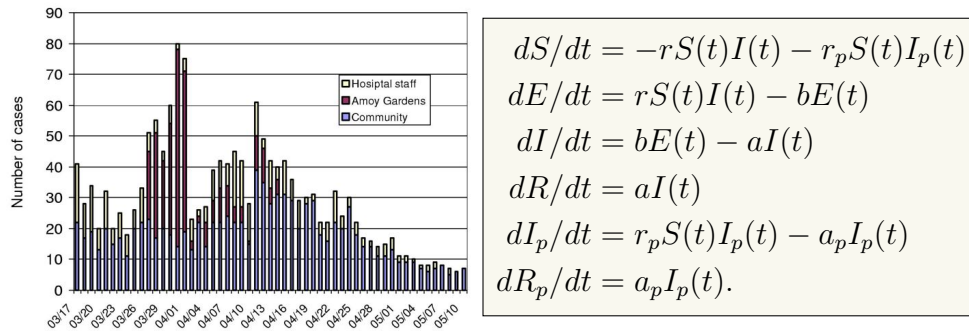


FIGURE 1.2 – Évolution réelle du nombre d'infectés; image prise de [3]. Pour bien reproduire les données réelles il faut utiliser un modèle comme celui de droite.

## 1.2 Équations différentielles stochastiques (EDS)

Applications

- en finances : calculs sur des scénarios pour les produits dérivés
- applications en physique (intégrale de chemin, etc.)

Dans ces cas, l'évolution contient une part d'incertitude ; par exemple le rendement  $\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$  contient une partie prévisible et autre partie aléatoire  $\mu\Delta t + \mathcal{N}(0, \Delta t)$ . On obtient l'équation différentielle stochastique (EDS) (voir le cours de M1 [4] pour détails) :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1.4)$$

Une illustration des scénarios solutions de (1.4) est donnée dans la figure 1.3.

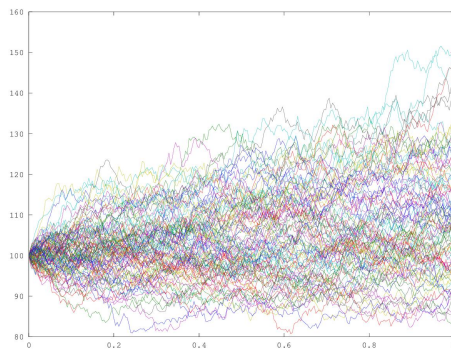


FIGURE 1.3 – Scénarios solutions de (1.4).

Rappel : des produits dérivés sont des instruments financiers dont la valeur dépende (selon un contrat pré-établi) d'un sous-jacent. Exemple : call européen sur  $S_t$  de valeur finale  $(S_T - K)_+$ . Par contre le calcul de la valeur avant expiration n'est pas connu. Il faut imposer des modèles et calculer des quantités du genre :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ | (S_u)_{u \leq t}]. \quad (1.5)$$

Pour rappel  $S_t$  suit une EDS ; il s'agira de calculer les solutions, étudier la précision du calcul numérique, savoir si on veut un calcul précis des scénarios (convergence forte) ou seulement des moyennes (convergence faible), etc. ...

### 1.3 Calcul de dérivée dans un graphe computationnel, contrôle des équations d'évolution

Il s'agit d'influencer l'évolution d'un système en agissant sur divers paramètres appelés "contrôles". Même approche nous aide à étudier la sensibilité d'un résultat venant d'une évolution par rapport aux divers paramètres en entrée (voir EDO par ex., comment le résultat  $S(\infty)$  dépend de  $a$ ).

D'une manière générale, chaque fois qu'un résultat est obtenu à l'aide des calculs séquentiels sur un graphe computationnel, on peut calculer la dérivée du résultat par rapport aux entrées. C'est ce qu'on appelle la propagation rétrograde ("backpropagation" en anglais); dans la théorie du contrôle ceci donne naissance aux "états adjoints".

Exemple (adapté de [1], voir aussi [2, chap 6.5]) :  $f = 5 \cdot (x + y \cdot z)$ . Le graphe a comme entrées  $x, y, z$  et sortie  $f = f(x, y, z)$ . Pour calculer  $\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f$  il faut écrire sous forme de graphe computationnel (calcul direct ou "forward") :

$$u = y \times z$$

$$v = x + u$$

$$f = 5 \times v$$

Soit  $x = 1, y = 2, z = 3$ ; alors on constate voici les relations qu'on obtient par dérivation élémentaire de chaque calcul (calcul adjoint ou "backward") :

$$\partial_v f = 5$$

$$\partial_x f = \partial_v f \times \partial_x v = \partial_v f = 5$$

$$\partial_u f = \partial_v f \times \partial_u v = \partial_v f = 5$$

$$\partial_y f = \partial_u f \times \partial_y u = 5z = 15$$

$$\partial_z f = \partial_u f \times \partial_z u = 5y = 10.$$

# Chapitre 2

## Équations différentielles ordinaires (EDO)

Soit  $I$  un intervalle ouvert inclus dans  $\mathbb{R}_+$ . On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X(t)), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.1)$$

dont la forme intégrale est

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds. \quad (2.2)$$

### 2.1 Existence et unicité de la solution

Afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'EDO précédente, on utilise les 2 théorèmes suivants :

**Théorème 2.1 (Cauchy-Lipschitz variante locale)** Soient  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, Lipschitz localement en  $X_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ , c'est à dire qu'il existent 2 boules  $B_x(X_0, R_x)$ ,  $B_t(t_0, R_t)$  et une constante  $L > 0$  telle que

$$|f(t, X_1) - f(t, X_2)| \leq L|X_1 - X_2|, \quad \forall t \in B_t(t_0, R_t), \quad X_1, X_2 \in B_x(X_0, R_x).$$

Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le problème de Cauchy (2.1) admet une solution locale unique :  $X(t) : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus,  $X(\cdot)$  est une fonction de classe  $C^1$ .



**Théorème 2.2 (Cauchy-Lipschitz variante globale)** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème (2.1), si  $L$  est la même pour tout  $R_x$  (rayon de la boule) et condition initiale  $X_0$ , alors une solution globale existe et est unique.*

**Remarque 2.3** *Il y a existence globale également si on peut trouver une fonction continue  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que*

$$|f(t, X_1) - f(t, X_2)| \leq \alpha(t)|X_1 - X_2|.$$

*Ceci peut donner à  $L$  la possibilité de dépendre du temps.*

Exemples

1/  $f(t, X) = rX$  avec  $r \in \mathbb{R}$  constante. Alors  $|f(t, X_1) - f(t, X_2)| = |r| \cdot |X_1 - X_2|$  donc nous obtenons existence globale avec  $L = |r|$ ;

2/  $f(t, X) = \frac{5}{X-3}$ . Un calcul immédiat nous donne  $|f(t, X_1) - f(t, X_2)| = \frac{5}{|(X_1-3)(X_2-3)|} \cdot |X_1 - X_2|$  donc nous obtenons existence locale pour  $L = \frac{5}{|(X_1-3)(X_2-3)|}$  dans un voisinage de tout point  $(t_0, X_0 \neq 3)$ . Par contre comme  $L = \frac{5}{|(X_1-3)(X_2-3)|}$  n'est pas borné autour de  $X_0 = 3$  le thm. d'existence globale n'est pas applicable.

## 2.2 Schémas numériques

Si la solution du problème de Cauchy existe, elle est unique (cf. théorème 2.1). Pour trouver numériquement la solution on l'approche à l'aide de schémas. L'approximation se fait par exemple sur  $[0, T]$  par  $N$  points.

Notations : - l'équation à résoudre est (2.1) ;

-  $h = T/N$ ,  $t_n = n \cdot h$ ,  $\forall n \leq N$  ;

-  $X_n = X(t_n)$  est la solution exacte.

**On notera par  $U_n$  une approximation de  $X_n$  et  $f_n = f(t_n, U_n)$ .** Comment calculer les  $U_n$ ? Par exemple en partant de la formule suivante :

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, X(s))ds. \quad (2.3)$$

Un schéma à un pas est donné par la formule :

$$U_{n+1} = U_n + h\phi(t_n, U_n, f_n, h). \quad (2.4)$$

Chaque fonction  $\phi$  donne un autre schéma numérique. A noter que  $\phi$  peut aussi dépendre de  $U_{n+1}$  ou  $f_{n+1}$ , dans ce cas on parle de schémas implicites.

### 2.2.1 Définition de 4 schémas :

Nous allons expliciter quelques schémas pour  $f_1(t, X) = rX$  et  $f_2(t, X) = rX^2$ . Nous rappelons que pour  $f_1$  la solution  $X(t)$  de  $\dot{X}(t) = f_1(t, X(t))$  est  $X(t) = e^{rt}X_0$  alors que pour  $f_2$  la solution  $Y(t)$  de  $\dot{Y}(t) = f_2(t, Y(t))$  est  $Y(t) = \frac{Y_0}{1-rtY_0}$ .

— **Euler explicite (notée EE dorénavant) :**

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + hf(t_n, U_n) = U_n + hf_n \\ U(0) = X(0) \end{cases}$$

Ici on a donc  $\phi = f_n$ . Exemples : pour  $f_1 : U_{n+1} = U_n + hrU_n = (1 + rh)U_n$ ; pour  $f_2 : U_{n+1} = U_n + hrU_n^2 = (1 + rhU_n)U_n$ .

— **Euler implicite (notée EI dorénavant) :**

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + hf_{n+1} \\ U(0) = X(0) \end{cases}$$

Ici  $\phi = f_{n+1}$ . Exemples : pour  $f_1 : U_{n+1} = U_n + hrU_{n+1}$  donc  $U_{n+1} = \frac{U_n}{1-rh}$ ; pour  $f_2 : U_{n+1} = U_n + hrU_{n+1}^2$  donc  $U_{n+1}$  est solution de  $rhU_{n+1}^2 - U_{n+1} + U_n = 0$ .

Lorsque  $f$  est Lipschitz, pour  $h$  suffisamment petit, la valeur  $U_{n+1}$ , solution de l'équation de définition du schéma EI est unique, voir l'exercice 2.5 page 25.

— **Cranck Nicholson (notée CN dorénavant, implicite) :**

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + h \left[ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \right] \\ U(0) = X(0) \end{cases}$$

Exemples : pour  $f_1 : U_{n+1} = U_n + hr \frac{U_n + U_{n+1}}{2}$  donc  $U_{n+1} = \frac{1 + \frac{rh}{2}}{1 - \frac{rh}{2}} U_n$ ;

pour  $f_2 : U_{n+1} = U_n + hr \frac{U_n^2 + U_{n+1}^2}{2}$  donc  $U_{n+1}$  est solution de  $\frac{rh}{2} U_{n+1}^2 - U_{n+1} + (1 + \frac{rh}{2} U_n) U_n = 0$ .

— **Heun (notée H dorénavant, explicite) :**

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2} [f_n + f(t_{n+1}, U_n + hf_n)] \\ U(0) = X(0) \end{cases}$$

Exemples : pour  $f_1 : U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2} [rU_n + r(U_n + hrU_n)]$ ; pour  $f_2 : U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2} [rU_n^2 + r(U_n + hrU_n)^2]$ .

**Intuition 2.2.1** La relation (2.3) indique qu'il faut trouver une façon de calculer de manière approchée l'intégrale de  $f(t, X(t))$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1} = t_n + h$ . Le schéma *EE* prend une approximation par la méthode des rectangles en utilisant la valeur en  $t_n$ , *EI* en utilisant la valeur en  $t_n + h$  et *CN* en faisant la moyenne des deux, c'est à dire en utilisant la méthode des trapèzes. Quant au schéma de Heun il utilise une approximation de  $X_{n+1}$  qu'il re-introduit dans un schéma de type *CN* mais avec l'idée de le garder explicite.

## 2.3 Erreur, consistance et ordre

### 2.3.1 Erreur

Quand on introduit la solution exacte dans la formule (2.4) des méthodes à un pas on obtient les "erreurs de troncature"  $\tau_{n+1}(h)$  :

$$\underbrace{X(t_{n+1}) = X(t_n) + h\phi(t_n, X_n, f(t_n, X_n), h)}_{\text{vrai pour le schéma numérique i.e., } U_n \text{ à la place de } X_n, \text{ etc.}} + h\tau_{n+1}(h).$$

ou encore

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) &:= \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n) - h\phi(t_n, X_n, f(t_n, X_n), h)}{h} \\ &= \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{h} - \phi(t_n, X_n, f(t_n, X_n), h). \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Définition 2.4** Le reste qui apparait lorsqu'on met la vraie solution dans la relation définissant le schéma numérique (similaire en forme à l'équation de départ) est dite erreur de troncature. Pour les méthodes à un pas (2.4) il s'agit de  $\tau_{n+1}(h)$  définie en (2.5) qui est appelée erreur de troncature locale au rang  $n + 1$ . L'erreur de troncature globale est définie par la relation :  $\tau(h) = \max_{n=1, \dots, N} |\tau_n(h)|$ .

**Remarque 2.5** L'erreur de troncature est ici la même chose que l'erreur (divisée par  $h$ ) entre  $X_{n+1}$  et le  $U_{n+1}^*$  obtenu en partant de  $U_n = X_n$ .

Exemples

**Euler explicite** : par la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$X(t+h) = X(t) + h\dot{X}(t) + \frac{1}{2}h^2\ddot{X}(\xi), \quad \xi \in [t, t+h]$$

Pour ( $t = t_n$  et  $t_n + h = t_{n+1}$ ), on obtient :  $\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{2}h\ddot{X}(\xi_n)$ .

**Euler implicite** : ...

### 2.3.2 Consistance et ordre

**Définition 2.6** *Un schéma est dit consistant si :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0, \quad (2.6)$$

*c'est à dire que pour  $h$  petit la solution exacte vérifie le schéma).*

*Un schéma est d'ordre "p" si :  $\tau(h) = O(h^p)$  pour  $h \rightarrow 0$ .*

## 2.4 Stabilité et convergence

### 2.4.1 Zéro-stabilité

Pour étudier la stabilité par rapport aux perturbations, on regarde si  $Z_n^h$  défini par :

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^{(h)} &= Z_n^{(h)} + h[\phi(t_n, Z_n^{(h)}, f(t_n, Z_n^{(h)}), h) + \delta_{n+1}] \\ Z_0^{(h)} &= \delta_0 + X_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

est proche de  $U_{n+1}$ .

**Pour en savoir plus 2.4.1** *Les imprécisions numériques n'apparaissent pas lors d'une addition mais surtout dans le calcul, souvent complexe, de la fonction  $\phi$  ; c'est pour cette raison que les perturbations  $\delta_n$  sont placées aux endroits indiqués dans la formule (2.7). Par exemple si  $f(t, X) = X^2 - 1$  doit être calculée en  $t = 0, X = \sqrt{2}$  la valeur  $\sqrt{2}^2 - 1 = 1$  est souvent entachée d'erreurs. Exemple de calcul en python :*

```
In [2]: numpy.sqrt(2)**2 -1
Out[2]: 1.0000000000000004
```

**Définition 2.7** Le schéma donné par  $\phi$  est dit *zéro-stable* s'il existe  $h_0$  et une constante  $C$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) tels que si  $h \leq h_0$  et  $|\delta_n| < \varepsilon$  ( $\forall n$ ) : alors

$$|Z_{n+1}^{(h)} - U_{n+1}| \leq C\varepsilon, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.8)$$

**Théorème 2.8** On suppose  $f$  Lipschitz et  $\phi$  Lipschitz par rapport à sa deuxième variable c'est à dire qu'il existent  $\Lambda > 0, h_0 > 0$  tels que  $\forall h < h_0$

$$|\phi(t, X, f, h) - \phi(t, Y, f, h)| < \Lambda|X - Y|, \forall X, Y.$$

Alors le schéma numérique donné par  $\phi$  est *zéro-stable*.

**Démonstration** Notons :  $W_n = Z_n^{(h)} - U_n$ . Alors

$$W_{n+1} = Z_{n+1}^{(h)} - U_{n+1} = Z_n^{(h)} - U_n + h[\phi(t_n, Z_n^{(h)}, f, h) - \phi(t_n, U_n, f, h)] + h\delta_{n+1}$$

d'où  $|W_{n+1}| \leq |W_n| + h\Lambda|W_n| + h|\delta_{n+1}|$  donc en sommant ces inégalités et après simplification des termes :

$$|W_{n+1}| \leq |W_0| + h\Lambda \sum_{s=0}^n |W_s| + \sum_{s=1}^{n+1} h|\delta_s|.$$

Ceci nous permet de conclure en utilisant le lemme de Gronwall discret (voir exercice 2.3 page 24) :

$$|W_{n+1}| \leq (1 + nh)\varepsilon \exp(\Lambda T) \leq (1 + T)\varepsilon \exp(\Lambda T). \square$$

**Technique importante 2.4.1** Question : quels schémas parmi *EE, EI, CN, H* satisfont les hypothèses du théorème 2.8 ?

*EE* :  $\phi = f_n$ , Lipschitz quand  $f$  l'est.

*EI* : par définition,  $\phi$  a la propriété :  $\phi(t_n, U_n, f_n, h) = f(t_{n+1}, U_{n+1})$  (on suppose existence d'une solution unique). Alors pour deux points initiaux  $U_n, V_n$  il faut borner

$$f(t_{n+1}, U_{n+1}) - f(t_{n+1}, V_{n+1}) : |f(t_{n+1}, U_{n+1}) - f(t_{n+1}, V_{n+1})| \\ L|U_{n+1} - V_{n+1}| \text{ et } |U_{n+1} - V_{n+1}| \leq |U_n - V_n| + |f(t_{n+1}, U_{n+1}) - f(t_{n+1}, V_{n+1})| \leq |U_n - V_n| + hL|U_{n+1} - V_{n+1}| \text{ donc } |U_{n+1} - V_{n+1}| \leq |U_n - V_n| / (1 - hL) \dots$$

*H, CN : techniques similaires*

*Pour les schémas implicites généraux voir l'exercice 2.5 page 25.*

## 2.4.2 Convergence

**Définition 2.9** *Un schéma est dit convergent à l'ordre  $p$  si, avec les notations précédentes,  $|U_n - X_n| = O(h^p)$ . Un schéma convergent à l'ordre 1 est dit "convergent".*

**Théorème 2.10** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.8 on a :*

$$|U_n - X_n| \leq (|U_0 - X_0| + nh\tau(h)) \exp(\lambda nh).$$

*En particulier si pour  $p \geq 1$  :  $|U_0 - X_0| = O(h^p)$  et  $\tau(h) = O(h^p)$ , alors  $|U_n - X_n| = O(h^p)$  ( le schéma converge à l'ordre  $p$ ).*

**Démonstration** Nous faisons comme dans la preuve du théorème 2.8 avec  $\delta_j = \tau_j(h)$  (en utilisant donc le lemme du Gronwall discret).  $\square$

**Pour en savoir plus 2.4.2** *Le thm. précédent peut être re-écrit en disant que la consistance et la stabilité impliquent la convergence. C'est un principe souvent rencontré.*

**Corrolaire 2.11** *Les schémas EE et EI convergent à l'ordre 1. Les schéma CN et H convergent à l'ordre 2.*

**Démonstration** Nous détaillons seulement pour le schéma de Crank-Nicholson :

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{2} \left\{ f(t_n, X_n) + f(t_{n+1}, X_{n+1}) \right\} + h\tau_{n+1}(h) \quad (2.9)$$

donc

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{2} \left\{ X'_n + X'_{n+1} \right\} + h\tau_{n+1}(h). \quad (2.10)$$

Par ailleurs la formule de Taylor à l'ordre 2 pour  $X'$  et d'ordre 3 pour  $X$  donnent

$$X'_{n+1} = X'_n + hX''_n + \frac{h^2}{2} X_n^{(3)}(\eta) \quad (2.11)$$

$$X_{n+1} = X_n + hX'_n + \frac{h^2}{2} X''_n + \frac{h^3}{6} X_n^{(3)}(\xi) \quad (2.12)$$

En remplaçant (2.11) et (2.12) dans (2.10) on obtient

$$h\tau_{n+1}(h) = \frac{h^3}{6} X_n^{(3)}(\xi) - \frac{h^3}{4} X_n^{(3)}(\eta) \quad (2.13)$$

d'où  $\tau_{n+1}(h) = O(h^2)$  (après des calculs permettant de transférer la version implicite en explicite).  $\square$

### 2.4.3 Stabilité absolue

Ici la stabilité est regardée sous l'angle de la solution en temps  $= NhT$  grand ( $T \rightarrow \infty$ ), mais pour un pas  $h$  fixé (donc  $N \rightarrow \infty$ ). Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $t \geq 0$  on considère le problème test :

$$\dot{Y}(t) = \lambda Y(t) \quad (2.14)$$

$$Y(0) = 1 \quad (2.15)$$

dont la solution est  $Y(t) = e^{\lambda t}$ . Pour  $Re(\lambda) < 0$  nous obtenons  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$ . Donc toute perturbation locale en temps est "effacée" en temps long. Ceci est une propriété très convenable pour les schémas numériques qui doivent lutter contre les erreurs d'arrondi etc. Nous voulons conserver cette propriété.

**Définition 2.12** *Un schéma est dit absolument stable si pour  $f(t, x) = \lambda x$  et  $\forall h, \lambda U_n \rightarrow 0$ . Sinon sa région de stabilité absolue est :*

$$\{h\lambda \in \mathbb{C} | U_n \rightarrow 0\}.$$

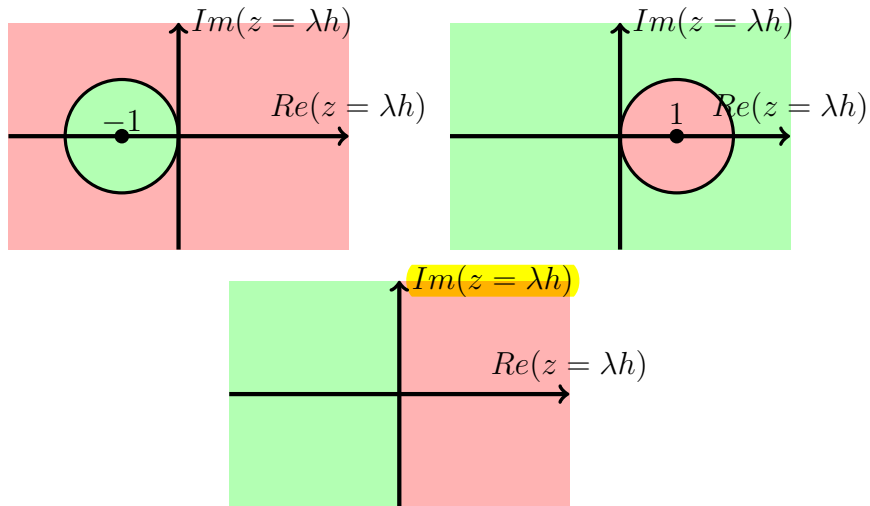


FIGURE 2.1 – La stabilité de Euler explicite (haut gauche), Euler implicite (haut droite) et Crank-Nicholson (bas) : en vert région de stabilité, en rouge celle d’instabilité.

**Exemples**

**Euler explicite**  $U_{n+1} = U_n + h\lambda U_n = (1 + h\lambda)U_n = (1 + h\lambda)^{n+1}U_0$

On définit sa région de stabilité en imposant la condition de stabilité :  $|1 + h\lambda| < 1$ . C’est donc l’intérieur de  $B((-1,0),1)$ , voir figure (2.1) pour une illustration.

**Euler implicite**  $U_{n+1} = U_n + h\lambda U_{n+1} = \frac{U_n}{1 - h\lambda} = \frac{U_0}{(1 - h\lambda)^{n+1}}$

Comme précédemment, pour trouver la région de stabilité, on limite le pas de temps h en imposant la condition de stabilité :

$$|1 - h\lambda| > 1$$

Il s’agit donc ici de l’extérieur de la  $B((1,0),1)$ , voir figure 2.1 pour une illustration.

**Crank-Nicholson**

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}(\lambda U_n + \lambda U_{n+1}) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} U_n = \left( \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right)^{n+1} U_0$$



On définit la région de stabilité en limitant le pas de temps  $h$  en imposant la condition de stabilité :

$$\left\{ z = h\lambda \in \mathbb{C} : \left| \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right| < 1 \right\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\},$$

voir figure 2.1 pour une illustration.

**Heun** : la région de stabilité est  $\{z \in \mathbb{C} : |1 + z + \frac{z^2}{2}| < 1\}$ .

## 2.5 Méthodes d'ordre supérieur : Runge-Kutta

Il s'agit de méthodes qui évaluent la fonction à des pas intermédiaires :

$$U_{n+1} = U_n + hF(t_n, U_n; h, f)$$

avec la fonction  $F$  du schéma définie par

$$F(t_n, U_n; h, f) = \sum_{i=1}^s b_i K_i \quad (2.16)$$

$$K_i = f(t_n + c_i h, U_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad c_i \geq 0. \quad (2.17)$$

Une telle méthode est dite de Runge-Kutta (R-K). Pour une présentation

plus simple nous introduisons le **tableau du Butcher du schéma**  $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$

ou encore

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad (2.18)$$

Nous supposons toujours  $\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i$ .

**Définition 2.13** Si  $A$  est strictement triangulaire inférieure alors la méthode est dite explicite ; si  $A$  est seulement triangulaire inférieure alors la méthode est semi-explicite. Dans tous les autres cas il s'agit d'une méthode implicite.

**Intuition 2.5.1** • Lorsque  $A$  est triangulaire inférieure à diagonale nulle, le calcul des  $K_1$  se fait explicitement. Ensuite ceci permet de faire le calcul de  $K_2$  explicitement et ainsi de suite. Le schéma est donc explicite.

- Lorsque  $A$  est triangulaire à diagonale non-nulle, le schéma nécessite la résolution séquentielle de  $s$  équations (pas forcément linéaires) pour trouver les  $K_i$ ,  $i \leq s$ .
- Lorsque  $A$  est pleine, le schéma nécessite la résolution simultanée de  $s$  équations (un système d'équations donc) pour trouver les  $K_i$ ,  $i \leq s$ .

Exemple de méthode R-K d'ordre 4 :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.19)$$

$$K_1 = f_n = f(t_n, U_n), \quad K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2}K_1\right), \quad (2.20)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(t_{n+1}, U_n + hK_3). \quad (2.21)$$

Le tableau de Butcher associé est

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} \quad (2.22)$$

### 2.5.1 Construction de méthodes d'ordre 2 (explicites)

Pour construire une méthode d'ordre 2 nous partons de  $U_n = X_n$ . La récurrence est  $U_{n+1} = U_n h(K_1 b_1 + K_2 b_2)$  avec  $K_1 = f(t_n, X_n)$  et  $K_2 = f(t_n + c_2 h, X_n + h c_2 K_1)$ .

On développe en série Taylor et on obtient les conditions  $b_1 + b_2 = 1$ ,  $b_2 c_2 = 1/2$ . Il existe donc plusieurs méthodes.

## 2.5.2 Consistance

**Théorème 2.14** *Soit  $f$  une fonction Lipschitz. Alors la méthode R-K (explicite) est consistante si et seulement si  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ .*

**Démonstration** par développements de Taylor.  $\square$

**Remarque 2.15** *Pour les méthodes implicites il faudrait aussi montrer l'existence d'une solution pour les pas de temps.*

## 2.6 Pas de temps adaptatif pour R-K

Motivation : parfois la solution est presque constante, mais parfois elle est très variable. on voudrait profiter des régions "calmes" et utiliser un pas  $h$  grand, qui sera adapté ensuite dans les régions très oscillantes. Pour ceci il faut faire du **pas adaptatif** (c'est à dire variable et ajusté). Pour savoir comment choisir ce pas il faut avoir des **estimations d'erreur**.

Comment estimer l'erreur en pratique ? Le plus facile serait de doubler le pas

$$X(t_n + 2h) = X_1 + (2h)^{p+1}\psi_n + O(h^{p+2}) \quad (2.23)$$

$$X(t_n + 2h) = X_2 + 2h^{p+1}\psi_n + O(h^{p+2}). \quad (2.24)$$

Ici  $X_1$  est obtenu après un pas  $2h$  alors que  $X_2$  est obtenu après 2 pas  $h$ . Nous remarquons que nous avons supposé travailler avec une méthode d'ordre  $p$ . La quantité  $\Delta = X_2 - X_1 = (2^{p+1} - 2)h^{p+1}\psi_n$  nous aide à ajuster le  $h$ .

**Remarque 2.16** *Il est possible d'obtenir une approximation d'ordre  $p + 1$  car  $X(t_n + 2h) = X_2 + \frac{\Delta}{2^p - 1} + O(h^{p+2})$ . Mais alors l'erreur serait inconnue.*

Bien qu'en principe la méthode ci-dessus serait intéressante, elle utilise trop d'évaluation de  $f$ . Nous allons la raffiner en construisant deux méthodes qui utilisent les mêmes évaluations (donc mêmes  $K_i$ ) mais dont les combinaisons linéaires faisant intervenir les  $b_i$  donnent d'ordres différents. Nous parlons alors de **schémas emboîtés** de Runge-Kutta-Fehlberg (R-K-F).

Notation : 
$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & \hat{b}^T \\ & \hat{b}^T \\ \hline & E^T \end{array}$$
, où  $c, A, b$  donnent un schéma d'ordre  $p$  alors que  $c, A, \hat{b}^T$

donnent un schéma d'ordre  $p + 1$ . La différence  $E = b - \hat{b}$  sert à estimer l'erreur de troncature  $\Delta = h \sum_{i=1}^s E_i K_i$ .

Les plus populaires sont les schémas R-K-F d'ordres 4-5 ou 5-6 ou encore 2-3. En pratique l'algorithme est le suivant :

- nous précisons au début une tolérance  $\Delta_0$
- si  $\Delta \geq \Delta_0$  alors nous refaisons le calcul avec le pas  $\tilde{h} = h \sqrt[p+1]{\frac{\Delta_0}{\Delta}}$ .
- si  $\Delta \leq \Delta_0$  le pas  $h$  est maintenu constant.

## 2.7 Systèmes d'EDO

Soit  $I \subset \mathbb{R}_+$  un intervalle ouvert et  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Il s'agit de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(t=0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.25)$$

**Exemple :**  $X'' = f(X)$  n'est pas une EDO, mais on peut la mettre sous forme d'un système, en posant :  $Y_1 = X, Y_2 = X'$  et on obtient :

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = f(Y_1) \end{cases}$$

**Théorème 2.17 (existence et unicité)** Soit  $F : ]-\infty, \infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue et est Lipschitz par rapport à la deuxième variable

$$\|F(t, y) - F(t, \tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

avec un  $L$  ne dépendant pas de  $y \in \mathbb{R}^n$ . Alors le problème de Cauchy (2.25) admet une solution unique  $y(t)$  globale (c'est-à-dire définie pour tout  $t \geq 0$ ). Si  $F$  est Lipschitz seulement autour de  $(t_0 = 0, Y_0)$ , alors la solution est définie seulement localement.

**Cas particulier :**  $F(t, y) = Ay$  avec  $A$  matrice  $n \times n$ . Le problème

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

admet la solution (unique)  $Y(t) = e^{At}Y_0$  où on rappelle la définition de  $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$ .

Si  $A$  est diagonalisable c'est-à-dire :

- 1)  $\exists Q$  inversible tel que  $A = QDQ^{-1}$ ,  $D$  diagonale  
 2) ou d'une manière équivalente  $\exists V_i, \lambda_i$ , tel que  $AV_i = \lambda_i V_i$ ,  $\|V_i\| = 1$  et  $\{V_i; i = 1, \dots, n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$   
 alors,  $Y(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} V_i \langle y_0, V_i \rangle$ .

### 2.7.1 Stabilité d'un système :

En posant  $Z = Q^{-1}Y$  nous obtenons :

$$Y' = AY \implies Y' = QDQ^{-1}Y \implies Q^{-1}Y' = DQ^{-1}Y \quad (2.26)$$

et donc comme  $Z' = (Q)^{-1}Y'$  on obtient par les égalités précédentes l'équation différentielle :  $Z' = DZ$  et le problème :

$$\begin{cases} Z'_1 = \lambda_1 Z_1 \\ \vdots \\ Z'_n = \lambda_n Z_n \end{cases}$$

Les solutions de ce problème s'écrivent :  $Z_i(t) = e^{\lambda_i t} Z_i(t=0)$  et la stabilité du système équivaut à la stabilité de toutes les EDO dans le problème.

#### Exemples

- **Euler explicite** :  $U_{n+1} = U_n + hf(t_n, U_n)$ . Soit  $f(y) = Dy$ .

En appliquant Euler explicite à cette exemple on a :  $U_{n+1} = U_n + hDU_n = (1 + hD)U_n$  donc le schéma est stable si  $|1 + h\lambda_i| < 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

- **Euler implicite** :  $U_{n+1} = U_n + hf(t_{n+1}, U_{n+1})$  ; pour l'exemple précédent, on a :  $U_{n+1} = U_n + hDU_{n+1}$  donc  $U_{n+1} = (1 - hD)^{-1}U_n$ . Le schéma est stable si  $|1 - h\lambda_i| > 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

**Implémentation** Nous considérons toujours le cas  $f(t, y) = Ay$ .

- pour les schémas explicites  $U_{n+1} = U_n + hAU_n$  donc c'est un calcul direct

- pour les schémas implicites  $U_{n+1} = U_n + hAU_{n+1}$  donc  $U_{n+1} = (I - hA)^{-1}U_n$  ; il faut résoudre un système linéaire. Pour des fonctions  $f$  plus compliquées il faut faire une méthode de Newton ou une approximation ...

### 2.7.2 Systèmes raides

Nous avons vu que les schémas implicite était parfois difficiles de mettre en oeuvre ; pourquoi les utiliser alors ? Considérons le système différentiel

suisvant :

$$\begin{aligned}u' &= 998u + 1998v \text{ avec } u(0) = 1 \\v' &= -999u - 1999v \text{ avec } v(0) = 0\end{aligned}$$

On fait le changement de variables  $u = 2y - z$  et  $v = -y + z$ , ce qui nous donne

$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = -1000z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = e^{-t}y_0 \\ z(t) = e^{-1000t}z_0 \end{cases}$$

(donc  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1000$ ). On retourne à nos variables initiales, et on obtient la solution désirée,

$$\begin{aligned}u &= 2e^{-t} - e^{-1000t}, \\v &= e^{-t} + e^{-1000t}.\end{aligned}$$

Pour la stabilité de Euler explicite il faut  $|1 + h\lambda_1| < 1$  et  $|1 + h\lambda_2| < 1$ , donc  $h \leq \frac{1}{1000}$ .

Pour la stabilité de Euler implicite il faut  $|1 - h\lambda_i| > 1$ , qui est toujours vérifié ( $\forall h > 0$ ). Supposant que nous sommes intéressés seulement par la partie en  $e^{-t}$  de la solution (on traite donc  $e^{-1000t}$  comme une perturbation ce qu'elle l'est en fait), la précision des deux schémas pourrait être bonne pour des pas  $h$  assez grands ; pourtant pour Euler explicite nous sommes obligés d'utiliser un  $h$  petit car sinon il n'y a pas de stabilité. Conclusion : utiliser de schémas implicites permet de résoudre avec  $h$  plus grand donc plus rapidement.

## 2.8 Respect de la structure des solutions : lois de conservation, symplecticité et temps long

## 2.9 Application en épidémiologie : modèle SIR

Les variables :

- $S$  = le nombre de personnes susceptibles d'être infectées (la population non encore touchée par l'épidémie).
- $I$  = les personnes infectées.

-  $R$  = les personnes qui ont eu la maladie, qui sont mortes ou qui ne peuvent plus la transmettre (ayant acquis l'immunité ou car en quarantaine etc).

**Hypothèses du modèle :**

1. Le nombre d'infection (passage de  $S$  à  $I$ ) est proportionnel au nombre de rencontres  $S \times I$ . On peut le définir de la manière suivante :

$$S(t + dt) - S(t) \approx \text{nombre infections nouvelles entre } t \text{ et } dt$$

2. Le passage  $I \rightarrow R$  est proportionnel au nombre d'individus en  $I$ . On peut le définir de la manière suivante :

$$R(t + dt) - R(t) \approx aI(t)dt$$

Nous obtenons le système d'équations, dit modèle SIR

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \tag{2.27}$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \tag{2.28}$$

$$\frac{dR}{dt} = aI \tag{2.29}$$

On suppose  $S(0) = S_0 \neq 0$ ,  $I(0) = I_0 > 0$ ,  $R(0) = R_0 = 0$

**Remarque 2.18**  $\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$  donc  $S + I + R = cst$ .

**Critères du modèle :**

Le  $\rho = \frac{rS}{a}$  est dit taux de reproductivité; il intervient dans  $\frac{dI}{dt} = (\rho - 1)aI$ .

- si  $\rho(t = 0) < 1 \Rightarrow$  pas d'épidémie.

- si  $\rho(t = 0) > 1$  alors il y a épidémie.  $I$  croit ensuite décroît. Le nombre total d'individus infectés est  $R_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = I_0 + S_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ . ( $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  existe car  $S(t), I(t), R(t) \geq 0 \forall t$  et  $S \searrow$ ).

**Remarque 2.19**  $S_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \neq 0$ ; on parle alors de phénomène d'immunité du groupe du modèle SIR.

En pratique :  $r, a$  sont inconnues, on procède en 2 étapes

- 1) inversion : trouver  $r, a$  à partir des observations  $R(n), n = 1, \dots, N_{max}$
- 2) prévision : calculer  $S(t), I(t), t \geq N_{max}$

**Remarque 2.20** Des modèles plus compliqués sont parfois nécessaires, par exemple :  $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ .

**Remarque 2.21** Les politiques sanitaires ont pour but d'influencer  $r, a$  et  $S_0$  : quarantaine :  $a$  croit et  $r$  décroît; vaccination :  $S_0$  décroît, etc.

## 2.10 Exercices EDO

**Exercice 2.1** (*Lemme de Gronwall : variante intégrale*)

Soit  $T > 0$  (il peut être  $\infty$  aussi),  $a(t), b(t), \lambda(t)$  des fonctions continues sur  $[0, T]$ ,  $\lambda(t) \geq 0$  pour tout  $t$ . On note  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$ .

1. Si pour tout  $t > 0$  :

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t \lambda(s)a(s)ds, \quad (2.30)$$

alors

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s)b(s)ds. \quad (2.31)$$

*Indication : Majorer la dérivée de  $A(t) = e^{-\Lambda(t)} \int_0^t \lambda(s)a(s)ds$ .*

*Alternative : prendre  $\xi$  le terme de droite de (2.31). Il vérifie aussi  $\xi(t) = b(t) + \int_0^t \lambda_s \xi_s ds$  (calcul direct ou utilisation de  $V(t) = \int_0^t \lambda \xi$ ), c'est à dire (2.30) avec égalité. Il est normal alors de vouloir démontrer que  $a(t) \leq \xi(t)$  pour tout  $t$ ; ceci se fait en minorant  $\xi - a$  par (2.30) et l'équation de  $\xi$ .*

2. Si  $b$  est dérivable avec la dérivée intégrable sur  $[0, T]$  alors

$$a(t) \leq e^{\Lambda(t)} \left( b(0) + \int_0^t e^{-\Lambda(s)} b'(s) ds \right). \quad (2.32)$$

3. Si en plus  $b$  est monotone croissante alors

$$a(t) \leq e^{\Lambda(t)} b(t). \quad (2.33)$$

4. Vérifier que en l'absence de l'hypothèse  $\lambda(t) \geq 0$  un contre-exemple est  $\lambda(t) = \lambda < 0$ ,  $b(t) = b + \omega(t)$ ,  $\text{supp}(\omega) \subset ]0, T[$ ,  $a(t) = be^{\lambda t}$ .

**Exercice 2.2** (*Gronwall : variante différentielle sans hypothèse de signe*)

Soit  $T > 0$  (il peut être  $\infty$ ),  $g(t), \lambda(t)$  des fonctions continues sur  $[0, T]$  et  $a(t)$  une fonction dérivable et dont la dérivée est continue sur  $[0, T]$ . On note  $\Lambda(s) = \int_0^s \lambda(\tau) d\tau$ .

Si pour tout  $t > 0$  :

$$a'(t) \leq g(t) + \lambda(t)a(t) \quad (2.34)$$

alors

$$a(t) \leq e^{\Lambda(t)} a(0) + \int_0^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} g(s) ds. \quad (2.35)$$

*Indication : Majorer la dérivée de  $A(t) = e^{-\Lambda(t)} a(t)$ .*



**Exercice 2.3** (Gronwall : variante discrète) Soit  $k_n$  une suite de réels positifs et  $\phi_n \geq 0$  une suite telle que

$$\phi_0 \leq g_0 \quad (2.36)$$

$$\phi_n \leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s \phi_s, \quad n \geq 1. \quad (2.37)$$

Si  $g_0 \geq 0$  et  $p_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$  alors

$$\phi_n \leq \left( g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s \right) \exp \left( \sum_{s=0}^{n-1} k_s \right) \quad (2.38)$$

**Exercice 2.4** On considère le problème de Cauchy :

$$x'(t) = 2|x(t)|^{1/2} \quad (2.39)$$

$$x(0) = 0 \quad (2.40)$$

1. Démontrer que pour toute constante  $\lambda \in [0, \infty]$  ce problème admet la solution  $x_\lambda(t) = (t - \lambda)^2$  si  $t \geq \lambda$  et  $x_\lambda(t) = 0$  sinon. Commenter sur l'unicité.
2. Écrire un schéma d'Euler explicite/implicite et expliquer vers  $x_\lambda(t)$  converge la solution trouvée par un calcul numérique.

**Exercice 2.5** (existence des schémas implicites) Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz par rapport à tous les arguments ; soit  $h > 0$ .

1. Montrer que l'équation

$$y = x + h\Psi(t, x, y), \quad (2.41)$$

admet une unique solution dès que  $h$  est assez petit et donner une façon numérique de la calculer. Indication : on pourra utiliser les itérations de Picard. Notation : la solution sera notée  $y = s(t, x, h)$ .

2. Soit maintenant  $y$  solution de (2.41) et  $\psi$  la fonction définie par

$$y = x + h\phi(t, x) \quad (2.42)$$

Donner la formule de  $\phi$  en fonction de  $s(\cdot)$  et  $\Psi(\cdot)$  et montrer que  $\phi$  est bien définie et est une fonction Lipschitz pour  $h$  assez petit.

**Exercice 2.6** (*stabilité de schémas implicite*) En utilisant éventuellement l'exercice 2.5 montrer que le schéma de Crank-Nicholson satisfait les hypothèses du théorème 2.8 (page 12) de zéro-stabilité.

**Exercice 2.7** Donner un résultat de convergence pour le schéma d'Euler sans le lemme de Gronwall discret.

*Indications : commencer sans les erreurs d'arrondi et établir une formule de récurrence pour l'erreur.*

**Exercice 2.8** (*écriture R-K*)

Vérifier que la méthode de Heun est bien une méthode de Runge-Kutta à deux pas et écrire les tableaux de Butcher correspondants.

*De même pour la méthode d'Euler modifiée :*

$$u_{n+1} = u_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f_n\right)$$

**Exercice 2.9** ( $\theta$ -schéma) On considère le " $\theta$ -schéma" :

$$u_{n+1} = u_n + h \{(1 - \theta)f(t_n, u_n) + \theta f(t_{n+1}, u_{n+1})\}.$$

*Démontrer que ce schéma est stable sur  $\{z = h\lambda; \operatorname{Re}(z) < 0\}$  ssi  $\theta > 1/2$ .*

**Exercice 2.10** (*Modèle SIR*)

*Écrire un pas de la méthode d'Euler implicite pour le système*

$$dS/dt = -rSI \tag{2.43}$$

$$dI/dt = rSI - aI \tag{2.44}$$

$$dR/dt = aI \tag{2.45}$$

**Exercice 2.11** *Soit le problème de Cauchy :*

$$x' = 2y \tag{2.46}$$

$$y' = -2x - 4x^3 - y \tag{2.47}$$

*partant de  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Démontrer que ce problème admet une solution maximale sur tout l'intervalle  $]\alpha, \beta[$  (avec  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ ).*

**Exercice 2.12** *Soit le problème de Cauchy :*

$$x' = 2y(z - 1) \tag{2.48}$$

$$y' = -x(z - 1) \tag{2.49}$$

$$z' = -xy \tag{2.50}$$

*partant de  $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ . Démontrer que ce problème admet une solution maximale sur tout l'intervalle  $[0, \infty[$ .*

**Exercice 2.13** *(systèmes autonomes) Soit le système  $x' = f(x)$  avec  $f$  de classe  $C^1$ . L'état  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ .*

*1/ Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux solutions de ce système. Alors si ces solutions se touchent en un point elles sont égales.*

*2/ Soit  $x$  une solution. Alors soit  $t \mapsto x(t)$  est injective soit elle est périodique.*

# Chapitre 3

## Optimisation, contrôle, adjoint

# Chapitre 4

## Équations différentielles stochastiques (EDS)

### 4.1 Rappels : mouvement brownien, martingales, intégrales et processus stochastiques, formule d'Ito

Pour les rappels de calcul stochastique voir le poly de M1 [4].

Nous nous plaçons dans un cadre d'espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$  et  $(W_t)$  est un mouvement brownien qui engendre la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ .

On appelle processus d'Itô, un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\mathbb{P} - ps \quad \forall t \leq T : X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad (4.1)$$

ou de manière équivalente :

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t, \quad (4.2)$$

avec  $X_0$  donné  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $(H_t)$  et  $(K_t)$  adaptés à  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $\int_0^T |K_s| ds < \infty$  et  $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ ,  $\mathbb{P}$ -ps. La forme (4.1) est dite intégrale alors que la forme (4.2) est dite différentielle ou dynamique.

Lorsque  $K$  et  $H$  dépendent de  $X$  l'existence de  $(X_t)$  n'est pas toujours possible, nous obtenons des Equations Differentielles Stochestiques (EDS) dont l'existence d'une solution est donnée par un résultat spécifique (voir toujours [4]). L'approximation de leur solution est l'objet de ce chapitre.

- 4.2 Formules d'Ito -Taylor, schémas d'Euler-Maruyama et Milstein**
- 4.3 Consistance des schémas numériques, convergence forte et faible**
- 4.4 Application au delta-hedging des options et équation de Black& Scholes, Feynman-Kac**

Pour les applications en finances voir le poly de M1 [4].

## 4.5 Exercices

Dans tout ce qui suit on considère une EDS

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (4.3)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  qui satisfont, au minimum, les conditions du théorème d'existence d'un processus d'Ito, à savoir :

- $a, b$  sont adaptés à la filtration  $\mathcal{A}_t$  du processus  $X_t$
- $\int_0^T |a_s| ds \leq \infty$  ppt ,  $\int_0^T |b_s|^2 ds \leq \infty$  ppt

Rappel : le pas de temps est ici égal à  $h$  et on note  $\tau_n = nh$ . Les schémas numériques proposeront des approximations  $Y_n$  de  $X_{\tau_n}$ .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note  $a_n = a(\tau_n, Y_n)$ ,  $b_n = b(\tau_n, Y_n)$ .

**Exercice 4.1** (*consistance faible*) On suppose  $a$  bornée :  $|a(t, x)| \leq M \forall t, x$ .

1/ Montrer que le schéma suivant, dit "Euler Maruyama faible"

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)h + b(\tau_n, Y_n)\xi_n\sqrt{h} \quad (4.4)$$

est faiblement consistant. Ici  $\xi_n$  sont des variables aléatoires indépendantes entre elles et indépendantes de  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  telles que  $P(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$ .

2/ Généraliser pour d'autres variables  $\xi_n$ .

3/ Le schéma est-il fortement consistant ?

**Exercice 4.2** (*schéma de Heun pour EDS*) Dans cet exercice on considère que dans (4.3) les coefficients  $a$  et  $b$  sont indépendants du temps, de classe  $C^2$  et  $a, b$  et les dérivées d'ordre 1 et 2 ( $a', a'', b', b''$ ) également bornées. On étudie une généralisation formelle du schéma de Heun

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \left\{ a(Y_n) + a\left(Y_n + a(Y_n)h + b(Y_n)\Delta W_n\right) \right\} h + \frac{1}{2} \left\{ b(Y_n) + b\left(Y_n + a(Y_n)h + b(Y_n)\Delta W_n\right) \right\} \Delta W_n \quad (4.5)$$

Montrer que ce schéma n'est pas fortement consistant pour tout choix de  $a$  et  $b$  et trouver pour quels types de coefficients le schéma l'est (conditions suffisantes).

**Exercice 4.3** (*consistance : définitions*)

Montrer que pour l'équation (4.3) les définitions de la consistance comme EDS et comme EDO coïncident si  $b = 0$  ( $a$  et  $b$  seront supposés aussi régulières que nécessaire).

**Exercice 4.4** Donner un exemple de coefficients  $a$  et  $b$  tels que le schéma d'Euler Maruyama appliqué à l'équation (4.3) ait un ordre de convergence forte strictement inférieur à 1.0.

**Exercice 4.5** Dans l'équation (4.3) on supposera  $a, b$  Lipschitz, de croissance au plus quadratique en  $X$ . Montrer qu'un schéma fortement consistant partant de  $X(0)$  converge fortement. Appliquer au schémas Euler-Maruyama et Milstein et montrer que dans ces cas l'ordre de convergence  $\gamma$  est supérieur à 0.5.

## 4.6 Exercices EDS : solutions

**Rappel** dans le calcul des esperances conditionnelles les propriétés suivantes sont utiles ( $\mathcal{A}$  est une tribu) :

- a/  $E(XZ|\mathcal{A}) = ZE(X|\mathcal{A})$  si  $Z$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{A}$
- b/  $E(X|\mathcal{A}) = EX$  si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{A}$
- c/ majoration :  $E(X|\mathcal{A}) \leq E(|X||\mathcal{A})$

**Exo. 4.1** Nous vérifions les deux propriétés dans la définition de la consistance faible.

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) - a_n &= E\left(\frac{a_n h + b_n \sqrt{h} \xi_n}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) - a_n \\ &= a_n + \frac{b_n}{\sqrt{h}} E \xi_n - a_n = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

où nous avons utilisé le fait que  $a_n$  et  $b_n$  sont mesurable p/r à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  et aussi le fait que  $\xi_n$  est indépendante de  $\mathcal{A}_{\tau_n}$ , et  $E \xi_n = 0$ . Donc

$$E\left|E\left(\frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) - a_n\right|^2 = E0 = 0 \quad (4.7)$$

ce qui donne la première majoration dans la définition de la consistance, avec  $c(h) = 0$ .

La deuxième condition :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{(Y_{n+1} - Y_n)^2}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) &= E\left(\frac{(a_n h + b_n \sqrt{h} \xi_n)^2}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) \\ &= ha_n^2 + 2a_n b_n \sqrt{h} E \xi_n + b_n^2 E \xi_n^2 = ha_n^2 + b_n^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$



Nous avons à nouveau utilisé  $E\xi_n = 0$  mais aussi  $E\xi_n^2 = 1$  (et bien sur l'indépendance de  $\xi_n$  et la mesurabilité de  $a$  et  $b$  p/r à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$ ). On conclut

$$E \left| E \left( \frac{(Y_{n+1} - Y_n)^2}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n} \right) - a_n^2 \right|^2 = E(ha_n^2)^2 \leq h^2 M. \quad (4.9)$$

Mais  $Mh^2 \rightarrow 0$  pour  $h \rightarrow 0$ , ce qui achève la démonstration de la consistance faible (avec  $c(h) = Mh^2$  dans les deux estimations).

2/ On remarque que toute suite de variables aléatoires  $\xi_n$  indépendantes entre elles et indépendantes de  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  de moyenne 0 et variance 1 donnent les même resultat.

3/ Il ne peut pas l'être, car la deuxième condition de la définition de la consistance forte ne serait pas satisfaite (en effet, les variables  $\xi_n$  n'ont aucune relation avec les  $\Delta W_n$ , donc en particulier ne peuvent pas les compenser lors du calcul, et on reste avec un terme qui ne tend pas vers zéro pour  $h \rightarrow 0$ ).

#### Exo. 4.2

Les calculs de cet exo ne sont pas tout à fait similaires à ceux de l'application précédente pour la raison suivante :  $a(Y_n + a_n h + b_n \Delta W_n)$  n'est ni indépendante de  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  ni mesurable par rapport à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  ; effectivement, la fonction  $a$  mélange  $\Delta W_n$  d'une part et  $Y_n, a_n$  et  $b_n$  d'autre part donc,  $a(Y_n + a_n h + b_n \Delta W_n)$  n'est pas indépendante de  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  à cause de la présence des  $Y_n, a_n$  et  $b_n$  et n'est pas mesurable p/r à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  à cause de la présence de  $\Delta W_n$ . Il nous faut alors remplacer le calcul exacte de l'espérance conditionnelle, qu'on pouvait faire avant, par un calcul approché par des formules de Taylor.

On remarque tout d'abord que, avec les notations  $a_n = a(Y_n)$ ,  $b_n = b(Y_n)$ ,  $a'_n = a'(Y_n)$ ,  $b'_n = b'(Y_n)$ , une formule de Taylor à l'ordre 2 nous donne :

$$a(Y_n + a_n h + b_n \Delta W_n) = a_n + a'_n \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n) + \frac{a''(\alpha_y^n)}{2} \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n)^2$$

pour un certain point  $\alpha_y^n$ .

De même :

$$b(Y_n + a_n h + b_n \Delta W_n) = b_n + b'_n \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n) + \frac{b''(\beta_y^n)}{2} \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n)^2$$

pour un certain point  $\beta_y^n$ .

Remarque : e.g.,  $a'_n$  est mesurable p/p à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  car il s'agit d'une fonction i.e.  $a'(\cdot)$  appliquée à une variable  $Y_n$  qui elle est mesurable p/r à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$ .

Il ne reste plus qu'à faire les calculs de la même façon qu'avant. Nous omettons **seulement** le calcul immédiat initial qui utilise l'indépendance et la mesurabilité p/r à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$ ; le lecteur est par contre invité à refaire si besoin.

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) - a_n &= a_n + \frac{a_n a'_n h + E\left(\frac{a''(\alpha_y^n)}{2} (a_n h + b_n \Delta W_n)^2 \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right)}{2} \\ &+ \frac{b_n b'_n}{2h} E \Delta_n^2 + \frac{E\left(\frac{b''(\beta_y^n)}{2} \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n)^2 \Delta W_n \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right)}{2h} - a_n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A ce point, sous les hypothèses de l'exo, nous pouvons donc estimer que

$$E\left(\frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right) - a_n = \frac{b'_n b_n}{2} + O(\sqrt{h}) \quad (4.11)$$

A titre d'exemple, détaillons le traitement du terme  $\frac{E\left(b''(\beta_y^n) \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n)^2 \Delta W_n \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right)}{4h}$ . Tout d'abord il faut se rappeler que  $\beta_y^n$  dépend de  $\Delta W_n$  aussi, donc  $b''(\beta_y^n)$  n'est pas forcément mesurable par rapport à  $\mathcal{A}_{\tau_n}$  (ni forcément indépendant de  $\mathcal{A}_{\tau_n}$ ). Donc on aura seulement des majorations :

$$\frac{E\left(b''(\beta_y^n) \cdot (a_n h + b_n \Delta W_n)^2 \Delta W_n \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right)}{2h} \leq M_2 \frac{E\left((a_n h + b_n \Delta W_n)^2 \middle| \Delta W_n \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right)}{2h}$$

où  $M_2 = \sup_x |b''(x)|$ . On continue les majorations :

$$\begin{aligned} M_2 \frac{E\left((a_n h + b_n \Delta W_n)^2 \middle| \Delta W_n \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}\right)}{2h} &\leq M_2 \left\{ E a_n^2 h |\Delta W_n| + \right. \\ &\left. 2E a_n b_n |\Delta W_n|^2 + E \frac{b_n^2 |\Delta W_n|^3}{h} \right\} \leq C(h\sqrt{h} + \sqrt{h}^2 + \sqrt{h}^3) \leq C' h^{1/2} \end{aligned}$$

avec des constantes  $C, C'$  indépendantes de  $h$ .

Revenant à (4.11), comme  $b_n b'_n$  n'a aucune raison d'être petit pour  $h \rightarrow 0$  (en fait il ne dépend même pas de  $h$ ), le schéma n'est pas consistant en général.

Un calcul similaire nous montre que

$$E\left(\frac{1}{h} \left| Y_{n+1} - Y_n - E(Y_{n+1} - Y_n \middle| \mathcal{A}_{\tau_n}) - b_n \Delta W_n \right|^2\right) = O(h). \quad (4.12)$$

En conclusion, le schéma est fortement (donc faiblement) consistant si et seulement si  $bb' = 0$  c'est à dire  $b = \text{constant}$ .

# Bibliographie

- [1] Computation graph - Neural Networks Basics. Coursera, Neural Networks and deep learning course by Andrew Ng.
- [2] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. *Deep Learning*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, November 2016.
- [3] Tuen Wai Ng, Gabriel Turinici, and Antoine Danchin. A double epidemic model for the SARS propagation. *BMC Infectious Diseases*, 3(1) :19, September 2003.
- [4] Imen Ben Tahar, José Trashorras, and Gabriel Turinici. *Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés avec Exercices Corrigés Travaux Pratiques et Études de Cas*. Ellipses Marketing, Paris, March 2016. pdf : [www.ceremade.dauphine.fr/~turinici](http://www.ceremade.dauphine.fr/~turinici).