Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront être clairement énoncés. Les réponses sans justification complète ne seront pas prises en compte.

1 Schéma R-K d'ordre 3

On considère le schéma :

$$u_{n+1} = u_n + h\left(\frac{K_1}{6} + \frac{2K_2}{3} + \frac{K_3}{6}\right)$$

où $K_1 = f(t_n, u_n)$, $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + h\frac{K_1}{2})$, $K_3 = f(t_n + h, u_n - hK_1 + 2hK_2)$.

1. Écrire le tableau de Butcher du schéma.
Réponse :

```
 0   |  0   0   0
 1/2 | 1/2  0   0
 1   | -1   2   0
---------------------
       1/6 2/3 1/6
```

2. Rappeler pourquoi ce schéma est consistent.
Réponse : Car il satisfait la condition $\sum_i b_i = 1$.

3. Pour la fonction $f(t, y) = \lambda y$ calculer K_1, K_2 et K_3 en fonction de t_n, u_n et h.
Réponse : $K_1 = \lambda u_n$, $K_2 = \lambda u_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)$, $K_3 = \lambda\left(1 + h\lambda + (h\lambda)^2\right)u_n$.

4. Trouver une condition sur $z = h\lambda$ pour décrire l'ensemble des z où ce schéma est stable. Montrer que cet ensemble est borné.
Réponse : $u_{n+1} = \left\{1 + z\left(\frac{z^2}{6} + \frac{z}{2} + 1\right)\right\}u_n$. **La condition pour avoir la stabilité sera donc** $\left|1 + z\left(\frac{z^2}{6} + \frac{z}{2} + 1\right)\right| < 1$. **En particulier cet ensemble est borné car** $\left|1 + z\left(\frac{z^2}{6} + \frac{z}{2} + 1\right)\right| \to \infty$ **pour** $z \to \infty$ **donc en dehors d'un certain voisinage de l'origine** $\left|1 + z\left(\frac{z^2}{6} + \frac{z}{2} + 1\right)\right|$ **est plus grand que** 1. **L'ensemble de stabilité sera contenu donc dans un voisinage de l'origine, donc sera borné.**

5. Décider si l'ensemble précédent contient un point z avec $Re(z) < 0$.
Réponse : oui par exemple $z = -1$, car dans ce cas $\left|1 - \left(\frac{1^2}{6} - \frac{1}{2} + 1\right)\right| < 1$

Décider si l'ensemble précédent contient tous les points z avec $Re(z) < 0$.

Réponse : non par exemple il ne contient pas $z = -10$.

6. Démontrer que ce schéma est au moins d'ordre 2 en calculant l'erreur de troncature et un développement à l'ordre 1 en h pour K_1, K_2 et K_3.

Indication : il faudra utiliser les formules des dérivées temporelles d'ordre 1 et 2 pour la solution exacte.

Réponse : Soit $y(t)$ la solution exacte. Alors en tout point t :

$$y'(t) = f(t,y), \quad y''(t) = f_t(t,y) + f_y(t,y) \cdot f(t,y) \tag{1}$$

Pour simplicité on note $y_n = y(t_n)$, $y_{n+1} = y(t_n + h)$, $f_n = f(t_n, y_n)$, $f_{t_n} = \frac{\partial f}{\partial t}|_{t=t_n}(t_n, y_n)$, $f_{y_n} = \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=y_n}(t_n, y_n)$. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 nous obtenons

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}\left[f_{t_n} + f_{y_n} \cdot f_n\right] + O(h^3) \tag{2}$$

ou encore

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_n + \frac{h}{2}\left[f_{t_n} + f_{y_n} \cdot f_n\right] + O(h^2) \tag{3}$$

L'erreur de troncature locale est par définition

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \left(\frac{K_1}{6} + \frac{2K_2}{3} + \frac{K_3}{6}\right) \tag{4}$$

ou K_1, K_2 et K_3 sont à calculer avec $u_n = y_n$: $K_1 = f_n$, $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_1}{2})$, $K_3 = f(t_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2)$.

Il ne reste plus qu'à écrire les développements

$$K_2 = f_n + \frac{h}{2}f_{t_n} + h\frac{K_1}{2}f_{y_n} + O(h^2) = f_n + \frac{h}{2}f_{t_n} + h\frac{f_n}{2}f_{y_n} + O(h^2),$$

$$K_3 = f_n + hf_{t_n} + (-hK_1 + 2hK_2)f_{y_n} + O(h^2) = f_n + hf_{t_n} + (-hf_n + 2hf_n)f_{y_n} + O(h^2)$$

et rentrer dans Eq.(4) pour obtenir que l'erreur de troncature est $O(h^2)$ (tous les termes d'ordre inférieur se simplifient) Le schéma est donc d'ordre au moins 2.

2 Estimation d'erreur sur une EDP

Soit V un espace de Hilbert $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bi-linéaire, continue et elliptique (i.e., définie positive) sur $V \times V$ et $l \in V'$ (V' est le dual de V, c'est à dire l'ensemble des fonctionnelles linéaires de V aux valeurs réelles). A noter que la forme a n'est **pas** forcement symétrique. On considère un problème écrit en formulation variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in V \tag{5}$$