

# Modèles de taux

poly. S. Henon & G.T.  
cours G. Turinici  
Master ISF APP

copyright Université Paris Dauphine - PSL 2019/2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Quelques rappels de calcul stochastique</b>	<b>4</b>
1.1	Formule d'Itô . . . . .	4
1.1.1	Enoncé . . . . .	4
1.1.2	Formule d'Itô pour le produit . . . . .	5
1.1.3	Calcul explicite des processus . . . . .	6
1.2	Changements de probabilité . . . . .	7
1.2.1	Probabilités équivalentes . . . . .	7
1.2.2	Théorème de Girsanov . . . . .	8
1.2.3	Espérance conditionnelle . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Généralités sur les modèles de taux</b>	<b>10</b>
2.1	Zéro-coupon . . . . .	10
2.1.1	Définition . . . . .	10
2.1.2	Cas déterministe . . . . .	11
2.1.3	Reconstitution de la courbe des taux . . . . .	11
2.1.4	Autres processus . . . . .	12
2.2	Probabilité risque neutre . . . . .	13
2.2.1	Dynamique des zéro-coupon sous $\mathbb{Q}$ . . . . .	14
2.2.2	Lien entre les zéro-coupon et le taux court . . . . .	15
2.3	Modèles de taux court . . . . .	15
2.3.1	Modèle de Vasicek . . . . .	15
2.3.2	Modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross) . . . . .	16
2.3.3	Modèles généralisés . . . . .	18
2.3.4	Modèles de taux court multifactoriels . . . . .	18
2.4	Modèle HJM (Heath Jarrow Morton) . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Produits de taux classiques</b>	<b>24</b>
3.1	Sous-jacents des produits vanilles . . . . .	24
3.1.1	Taux forward : . . . . .	24
3.1.2	Swap . . . . .	25
3.1.3	Taux swap . . . . .	28

3.2	Changement de numéraire et applications . . . . .	28
3.2.1	But de l'opération . . . . .	29
3.2.2	Choix d'un zéro-coupon comme numéraire. . . . .	32
3.2.3	Choix d'une combinaison linéaire de zéro-coupon . . . . .	32
3.3	Produits vanilles . . . . .	33
3.3.1	Les caps . . . . .	33
3.3.2	Les caplets . . . . .	34
3.3.3	Les swaptions . . . . .	34
3.4	Volatilité implicite . . . . .	35
3.4.1	Un outil : la formule de Black . . . . .	35
3.4.2	Volatilité implicite d'un caplet . . . . .	36
3.4.3	Volatilité implicite d'une swaption . . . . .	38
3.4.4	Courbes de volatilités implicites . . . . .	39
3.5	A propos des modèles . . . . .	40
3.5.1	Utilisation d'un modèle de taux . . . . .	40
3.5.2	Quel modèle ? . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Le modèle LGM</b>	<b>42</b>
4.1	Présentation du modèle à un facteur . . . . .	42
4.2	Pricing des caplets . . . . .	44
4.3	Formule de reconstruction . . . . .	45
4.3.1	Modèle markovien . . . . .	45
4.3.2	La formule . . . . .	45
4.4	Pricing des swaptions (receveuses) . . . . .	47
4.4.1	Formule . . . . .	47
4.4.2	Astuce de pricing . . . . .	47
4.5	Calibration . . . . .	49
4.6	Conclusion . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Le modèle BGM</b>	<b>51</b>
5.1	Présentation . . . . .	51
5.2	Calcul drift . . . . .	53
5.3	Mise en place du modèle . . . . .	55
5.3.1	Volatilités instantanées . . . . .	55
5.3.2	Structure de corrélation . . . . .	55
5.3.3	Volatilité implicite des swaptions . . . . .	56
5.3.4	Calibration . . . . .	58
5.3.5	Conclusion . . . . .	58

<b>6</b>	<b>Modèle SABR</b>	<b>59</b>
6.1	Définition d'un modèle à volatilité stochastique . . . . .	59
6.2	Présentation de SABR . . . . .	60
6.3	Résultat de pricing . . . . .	60
6.4	Rôles des paramètres . . . . .	61
6.5	Tests de calibration . . . . .	61
6.5.1	Choix des paramètres de calibration . . . . .	61
6.5.2	Processus de calibration . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Modèle d'Heston</b>	<b>65</b>
7.1	Présentation . . . . .	65
7.2	Calcul du prix d'une européenne . . . . .	66
7.2.1	Fonction caractéristique . . . . .	66
7.2.2	Prix de l'option . . . . .	69
7.2.3	Dernières précisions . . . . .	70

# Chapitre 1

## Quelques rappels de calcul stochastique

Toutes les notions rappelées ici sont reprises du poly de cours de M1, c'est à dire la référence [6]. D'autres références : [3, 5]. Nous travaillons dans le cadre suivant :  $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$  est un espace de probabilité filtré et  $(W_t)$  est un mouvement brownien qui engendre la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . L'horizon temporel est fini :  $\hat{\tau} > 0$  (40 ans pour les taux, par exemple) i.e., toutes les maturités  $T$  vérifient  $T \leq \hat{\tau}$  dans la suite.

### 1.1 Formule d'Itô

#### 1.1.1 Énoncé

On fixe  $T \leq \hat{\tau}$ .

**Définition**  $(W_t)$  est un mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} Pps \quad \forall t \leq T : X_t &= X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \text{ sous forme intégrale} \\ \text{ou } dX_t &= K_t dt + H_t dW_t \text{ sous forme dynamique, avec } X_0 \text{ donné.} \end{aligned} \quad (1.1)$$

avec  $X_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $(H_t)$  et  $(K_t)$  adaptés à  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $\int_0^T |K_s| ds < \infty$  et  $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$  Pps.

**Formule d'Itô** (version simple)

Soit  $U$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ ,  $(X_t)$  un processus d'Itô à valeurs réelles :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X; X \rangle_s \quad (1.2)$$

En forme différentielle (dite aussi dynamique) on écrit pour  $(f(t, X_t))_{t \geq 0}$  :

$$d[f(t, X_t)] = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) K_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) H_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) H_t dW_t. \quad (1.3)$$

### 1.1.2 Formule d'Itô pour le produit

ou formule d'intégration par parties.

$$d(XY)_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle X, Y \rangle_t \quad (1.4)$$

Plus précisément, si  $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$  et  $dY = \tilde{K}_t dt + \tilde{H}_t dW_t$  alors

$$d(XY)_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + H_t \tilde{H}_t dt. \quad (1.5)$$

**Remarque 1** Si l'on utilise deux browniens différents tels que  $d\langle W, B \rangle_t = \rho dt$ , alors

$$d\langle X, Y \rangle_t = H_t \tilde{H}_t d\langle W, B \rangle_t = \rho H_t \tilde{H}_t dt. \quad (1.6)$$

**Exercice 1.1.1** Soit  $(X_t)$  un actif tel que

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \quad (1.7)$$

Calculer la dynamique du processus suivant :  $(e^{aX_t})$ .

$$d(e^{aX_t}) = e^{aX_t} \left( a dX_t + \frac{a^2}{2} d\langle X, X \rangle_t \right) \quad (1.8)$$

$$d(e^{aX_t}) = e^{aX_t} \left[ a(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{a^2}{2} \sigma_t^2 dt \right] \quad (1.9)$$

$$\frac{d(e^{aX_t})}{e^{aX_t}} = \left( a\mu_t + \frac{a^2 \sigma_t^2}{2} \right) dt + a\sigma_t dW_t. \quad (1.10)$$

**Définition** Si l'on calcule  $\frac{dX_t}{X_t}$  plutôt que  $dX_t$  alors on parle (abusivement) de dynamique lognormale. Abusivement car il faudrait réserver ce terme à une volatilité lognormale (ici  $a\sigma_t$ ) déterministe.

On vient donc de calculer la dynamique lognormale de  $(e^{aX_t})$ .

Dans la suite, les processus seront considérés comme "suffisamment réguliers" pour que les intégrales stochastiques soient définies.

### 1.1.3 Calcul explicite des processus

Il est très intéressant de savoir résoudre explicitement l'EDS, c'est-à-dire connaître  $X_t$  pour des objectifs de pricing. Sinon, il faut utiliser un schéma d'Euler-Maruyama ou Milstein, etc (voir [6] et le cours de M1 d'analyse numérique). On peut le faire dans les cas suivants :

#### Dynamique normale

Si

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (1.11)$$

alors

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t. \quad (1.12)$$

#### Dynamique lognormale

Soit

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \quad (1.13)$$

Alors on pose

$$Y_t = X_0 \exp \left( \int_0^t \left( \mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right). \quad (1.14)$$

On cherche la dynamique de  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . On pose

$$Z_t = \int_0^t \left( \mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \quad (1.15)$$

On a donc

$$Y_t = X_0 e^{Z_t} \quad \text{et} \quad dZ_t = \left( \mu_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t. \quad (1.16)$$

En différentiant l'exponentielle (fonction régulière) d'après la formule d'Itô, on obtient

$$d(X_0 e^{Z_t}) = X_0 e^{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} X_0 e^{Z_t} d \langle Z, Z \rangle_t \quad (1.17)$$

$$dY_t = Y_t \left[ \left( \mu_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t \right] + \frac{1}{2} Y_t \sigma_t^2 dt. \quad (1.18)$$

Soit,

$$dY_t = Y_t (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \quad \text{ou encore} \quad \frac{dY_t}{Y_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \quad (1.19)$$

Les processus  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  vérifient la même EDS, avec les mêmes conditions initiales. On suppose que l'on peut appliquer le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une EDS. Cela permet de conclure que ces processus sont égaux.

Dans la suite, on pourra affirmer (sans le prouver) que alors

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \Leftrightarrow X_t = X_0 \exp \left( \int_0^t \left( \mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right). \quad (1.20)$$

## Processus de type Ornstein-Uhlenbeck

**Exercice 1.1.2** Si

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t. \quad (1.21)$$

calculer explicitement  $X_t$ .

Résolution : on pose  $Y_t = e^{-\mu t} X_t$  (et on utilise Ito avec  $f(t, x) = xe^{-\mu t}$ )

$$dY_t = -\mu e^{-\mu t} X_t dt + e^{-\mu t} dX_t + \frac{1}{2} \times 0. \quad (1.22)$$

$$= e^{-\mu t} (\mu X_t dt + \sigma dW_t) - \mu X_t e^{-\mu t} dt = \sigma e^{-\mu t} dW_t. \quad (1.23)$$

On a donc

$$Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{-\mu s} dW_s \text{ ou encore } X_t = e^{\mu t} X_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)} dW_s. \quad (1.24)$$

## 1.2 Changements de probabilité

### 1.2.1 Probabilités équivalentes

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espace probabilisé et  $\mathbb{Q}$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Définition 1.2.1** Une variable aléatoire positive  $Z$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , est appelée densité de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$  et notée  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ , si elle vérifie

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{Q}(A) = \int_A Z d\mathbb{P} \text{ i.e. } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A). \quad (1.25)$$

**Remarque 2** On peut généraliser

$$\forall X \in L^2(\mathbb{P}) : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZX). \quad (1.26)$$

Ainsi, si l'on connaît la densité entre  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$ , on peut calculer les espérances sous  $\mathbb{Q}$ , en fonction des espérances sous  $\mathbb{P}$ .



On dit que les deux probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont équivalentes si elles ont les mêmes ensembles négligeables.

**Proposition 1.2.2** *S'il existe une densité strictement positive entre deux probabilités, alors elles sont équivalentes. Dans ce cas, si  $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$  alors  $\frac{1}{Z} = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ .*

En pratique, lorsque l'on travaille en horizon fini  $T$ , on parle d'un processus densité en posant

$$L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T] : L_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_T | \mathcal{F}_t). \quad (1.27)$$

On peut remarquer que, si  $L_T \in L^2$ ,  $(L_t)$  est alors une  $\mathbb{P}$ -martingale.

## 1.2.2 Théorème de Girsanov

**Exercice 1.2.3** *On pose, pour  $t \in [0, T]$ ,*

$$L_t = \exp \left( \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right). \quad (1.28)$$

*Calculer la dynamique lognormale de  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ .*

Résolution :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \Leftrightarrow X_t = X_0 \exp \left( \int_0^t \left( \mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right). \quad (1.29)$$

Donc

$$dL_t = L_t \theta_t dW_t \quad \text{ou encore} \quad \frac{dL_t}{L_t} = \theta_t dW_t. \quad (1.30)$$

**Remarque 3**  $(\theta_t)$  est la volatilité lognormale du processus densité.

$(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une intégrale stochastique (pas de drift). On peut donc affirmer que  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  est toujours une martingale locale. Dans le théorème de Girsanov ci-dessous, on demande en plus que ce soit une vraie martingale (ce qui requiert des propriétés d'intégrabilité plus importantes pour  $(\theta_t)$ ). Par exemple, le théorème de Novikov donne une condition suffisante pour que  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  soit une vraie martingale :

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty. \quad (1.31)$$

**Théorème de Girsanov** : Soit  $(W_t)$  un  $\mathbb{P}_1$ -mouvement brownien qui engendre la filtration,  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté tel que  $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$  p.s. et tel que le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par

$$L_t = \exp \left( \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \quad (1.32)$$

soit une martingale. On appelle  $\mathbb{P}_2$  la probabilité de densité  $L_T$  par rapport à  $\mathbb{P}_1$ .

Alors le processus  $(\widehat{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par

$$d\widehat{W}_t = dW_t - \theta_t dt \quad (1.33)$$

est un mouvement brownien sous  $\mathbb{P}_2$ .

- Dans des modèles de taux plus complexes, certains choix pour  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  ne sont pas possibles car ce ne sont pas de vraies martingales.
- Les deux probabilités  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  sont équivalentes car la densité  $L_T$  est strictement positive.

### 1.2.3 Espérance conditionnelle

Si

$$L_T = \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1|_{\mathcal{F}_T}} \quad (1.34)$$

et si  $X$  est une v.a. de carré intégrable,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable alors (voir [6] pour détails) :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(XL_T). \quad (1.35)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(X|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(XL_T|\mathcal{F}_t)}{E_{\mathbb{P}_1}(L_T|\mathcal{F}_t)} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(XL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t}, \forall t \leq T. \quad (1.36)$$

# Chapitre 2

## Généralités sur les modèles de taux

- Notre objectif est le pricing des **produits dérivés** complexes, dont les sous-jacents sont des taux. Les modèles étudiés doivent être calibrés, c'est-à-dire que l'on va modifier leurs paramètres pour qu'ils donnent les mêmes prix que le marché, sur un ensemble d'options simples. On reviendra sur la notion de calibration tout au long du cours.
- Dans le domaine des taux, aucun modèle ne s'impose comme référence unanime.
- On parle de "Fixed Income" dans le monde anglo-saxon.
- Dans ce cours, les taux sont STOCHASTIQUES!!

### 2.1 Zéro-coupon

#### 2.1.1 Définition

On appelle **zéro-coupon** de maturité  $T$  un titre qui paye 1 à la date  $T$ . Son nom vient du fait qu'il ne paye pas d'intérêts avant maturité. Ce sont des obligations ou bonds particuliers. Le prix (strictement positif) à la date  $t \in [0, T]$  du zéro-coupon de maturité  $T$  est noté  $B(t, T)$ .

A retenir  $B(T, T) = 1$ .

Les ZC dépendent à la fois de la date  $t$  de valorisation et de la date  $T$  d'échéance. On associe un taux à chaque ZC, appelé taux ZC. C'est le taux de rendement actuariel de l'obligation. Cette notion ne sera pas développée ici.

- A une date de valorisation  $t$  donnée, le graphique de  $(T \rightarrow \text{Taux ZC}(t, T))$  est appelé courbe des taux zéro-coupon.

— A  $T$  fixé, on manipule un seul sous-jacent  $(B(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ . Les taux sont donc un domaine multi sous-jacents.

### Hypothèses ( $H_2$ )

1. Les mouvements browniens considérés sont unidimensionnels, sauf mention contraire.
2. Pour chaque  $T$  fixé, le processus  $\{B(t, T), 0 \leq t \leq T\}$  est adapté et continu.
3. Pour chaque  $t$  fixé,  $(T \rightarrow B(t, T))$  est dérivable. De plus,  $\frac{\partial B}{\partial T}$  est continue par rapport aux deux variables.

## 2.1.2 Cas déterministe

Sous hypothèses d’Absence d’Opportunités d’Arbitrage (notée AOA dorénavant, voir [6] pour une définition) on montre que

$$\forall t \leq T \leq U : B(t, T) \cdot B(T, U) = B(t, U) \quad (2.1)$$

**Preuve.** Portefeuille 1 : en  $t = 0$ , on achète un ZC de maturité  $U$ . A la date  $T$ , on possède  $B(T, U)$ .

Portefeuille 2 : en  $t = 0$ , on achète une quantité  $B(T, U)$  d’un ZC de maturité  $T$ .

A la date  $T$ , on possède donc  $B(T, U) \cdot B(T, T) = B(T, U)$ .

Les deux portefeuilles ont la même valeur en  $T$  donc à tout instant entre 0 et  $T$ . ■

On notera que si les taux deviennent stochastiques, il est alors impossible de connaître  $B(T, U)$  à la date  $t$ .

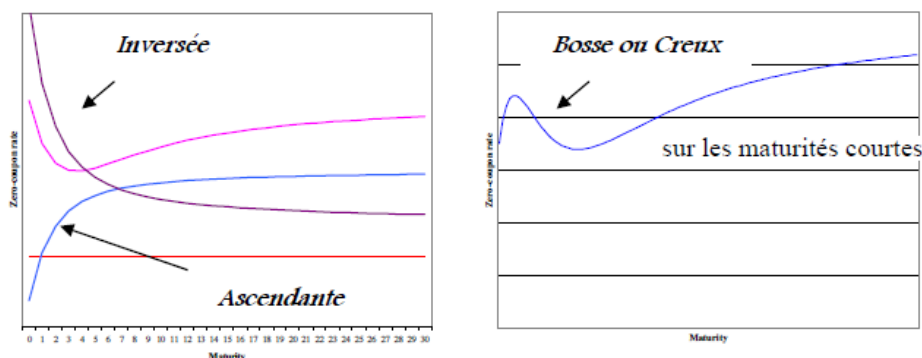
**Dans la suite, cette formule est fausse !**

## 2.1.3 Reconstitution de la courbe des taux

Ce sujet constitue un cours à lui-seul, voir le livre [4]. Cette reconstitution est rendue nécessaire car les zéro-coupon ne sont pas directement cotés sur le marché. La courbe qui nous intéresse est la courbe interbancaire. Elle résulte d’opérations financières entre banques. Il ne s’agit pas d’une courbe sans risque puisque les banques ne jouissent pas du meilleur rating des agences de notations.

Elle est construite à partir d’un panier d’instruments :

- les taux Euribor en zone Euro pour les maturités allant de 1 jour à 6 mois. Les banques se prêtent de l’argent à ce taux.



différentes formes de courbes de taux zéro-coupon

FIGURE 2.1 – Différentes formes de courbes de taux zéro-coupon. Crédits : [4].

Euribor, pour “Euro Interbank Offered Rate”. Pour le calculer, on regroupe, pour chaque maturité, les cotations proposées par les banques du panel, et on retire les 15% des taux les plus hauts et les 15% les plus bas. Le taux publié est la moyenne de l’échantillon final. Un taux Euribor est un taux forward.

- les contrats sur Euribor 3 mois, sur le segment allant de 6 mois à 2 ans.

Un contrat future est un engagement réciproque d’achat-vente dans un marché réglementé (par opposition aux contrats à termes de gré à gré).

- les swaps standards Euribor 3 mois ou 6 mois, pour les maturités supérieures à 2 ou 3 ans. Définition à suivre dans le cours.

Dans la suite, on considère donc que les valeurs de  $B(0, T)$  sont des données de marché (on parlera abusivement de courbe de taux initiale).

En résumé, on dispose de deux types de données de marché :

- la courbe de taux initiale.
- les prix des produits vanilles (ce sont des options sur taux) que l’on définira plus tard. Ces prix servent pour calibrer les modèles.

## 2.1.4 Autres processus

En s’inspirant du cas déterministe, on veut exprimer les ZC comme une exponentielle. On définit le **taux forward instantané** à la date  $t$ , pour l’échéance  $T$  par

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} (\ln B(t, T)) = -\frac{\frac{\partial B}{\partial T}(t, T)}{B(t, T)}. \quad (2.2)$$

Pour  $T$  fixé,  $(f(t, T))_{t \in [0; T]}$  est adapté. De plus,

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, u) du &= - \int_t^T \frac{\partial}{\partial u} (\ln B(t, u)) du = - [\ln B(t, u)]_t^T \\ &= - \ln B(t, T) + \ln B(t, t) = - \ln B(t, T) \quad \text{car } B(t, t) = 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Autrement dit,

$$B(t, T) = \exp \left( - \int_t^T f(t, u) du \right). \quad (2.4)$$

Le **taux court**  $r_t$  (ou taux spot) est défini par  $r_t = f(t, t)$ .

( $H_3$ ) on supposera

$$\int_0^T |r_s| ds < \infty \text{ p.s.} \quad (2.5)$$

A noter qu'ici  $r_t$  n'est pas nécessairement déterministe. Si le taux d'intérêt est déterministe alors  $r_t$  est le taux instantané.

## 2.2 Probabilité risque neutre

**Définition 2.2.1** le zéro-coupon actualisé  $\tilde{B}(t, T)$  est défini par

$$\tilde{B}(t, T) = e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T), \text{ pour } t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

$\mathbb{P}$  est la probabilité initiale, dite historique.

Dans le domaine des taux, les zéro-coupon sont les actifs de référence. Cela signifie qu'une probabilité  $\mathbb{Q}$  est dite martingale ou risque-neutre si elle est équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  et si les zéro-coupon actualisés sont des  $\mathbb{Q}$ -martingales.

On admet l'existence d'une telle probabilité, laquelle n'est pas évidente. En effet, comme  $\mathbb{Q}$  rend martingale les zéro-coupon actualisés de toutes maturités (infinité de sous-jacents), le lien entre les deux probabilités équivalentes  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  ne doit dépendre d'aucune maturité  $T$ . Dans [2] Heath Jarrow et Morton ont montré que c'est le cas, sous des hypothèses peu contraignantes.

On suppose aussi que le marché est complet (sauf mention contraire), ainsi, la probabilité martingale  $\mathbb{Q}$  est unique.

### 2.2.1 Dynamique des zéro-coupon sous $\mathbb{Q}$

**Hypothèse importante** : on considère la filtration naturelle du brownien sous  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 2.2.2** *Pour chaque  $T$  fixé, il existe un processus  $(\Gamma(t, T))_{0 \leq t \leq T}$  adapté tel que*

$$\text{sous } \mathbb{Q}, \quad \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t. \quad (2.7)$$

**Preuve**

Si la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  est engendrée par le brownien  $W$  sous  $\mathbb{Q}$ , le théorème de représentation des martingales affirme que les martingales continues sont forcément des intégrales stochastiques. Comme le zéro-coupon actualisé  $\tilde{B}(t, T)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale, il existe donc  $(H_t)$  adapté tel que

$$\tilde{B}(t, T) = \int_0^t H_s dW_s + B(0, T) \text{ ou encore } d\tilde{B}(t, T) = H_t dW_t, \text{ sous forme dynamique.} \quad (2.8)$$

Comme  $\tilde{B}(t, T)$  ne s'annule pas, on peut réécrire la dynamique ainsi :

$$\frac{d\tilde{B}(t, T)}{\tilde{B}(t, T)} = \Gamma(t, T) dW_t \text{ sous } \mathbb{Q}. \quad (2.9)$$

**Exercice 2.2.3** *En déduire  $dB(t, T)$ .*

Résolution : Posons  $Y_t = -\int_0^t r_s ds$ . On a  $dY_t = -r_t dt$ . Comme  $Y_t$  est à variations finies, on en déduit

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds}\right) = d(e^{Y_t}) = e^{Y_t} dY_t. \quad (2.10)$$

Soit

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds}\right) = -e^{-\int_0^t r_s ds} r_t dt. \quad (2.11)$$

D'après Itô, on a donc

$$d\tilde{B}(t, T) = d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T)\right) = e^{-\int_0^t r_s ds} d(B(t, T)) + B(t, T) e^{-\int_0^t r_s ds} r_t dt \quad (2.12)$$

Ainsi

$$e^{-\int_0^t r_s ds} [d(B(t, T)) - B(t, T) r_t dt] = e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T) \Gamma(t, T) dW_t \quad (2.13)$$

soit

$$\begin{aligned} d(B(t, T)) &= B(t, T) r_t dt + B(t, T) \Gamma(t, T) dW_t \\ \frac{d(B(t, T))}{B(t, T)} &= r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t. \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Remarque 4**  $\Gamma(t, T)$  est appelée volatilité lognormale de  $(B(t, T))$ . Elle est commune à  $(B(t, T))$  et à  $(\tilde{B}(t, T))$ .

## 2.2.2 Lien entre les zéro-coupon et le taux court

Comme  $(\tilde{B}(t, T))$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale, on a

$$\tilde{B}(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\tilde{B}(T, T) \mid \mathcal{F}_t\right). \quad (2.15)$$

Or,  $B(T, T) = 1$  donc

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right) \text{ et } \left(e^{-\int_0^t r_s ds}\right) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.} \\ B(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

**A retenir :** on peut définir des modèles par la seule donnée de  $dr_t$ . Ces modèles sont dits de **taux courts**. Dans ces modèles, on choisit la dynamique de  $(r_t)$  puis l'on calcule les valeurs des zéro-coupon  $B(t, T)$ , pour tous  $t$  et  $T$ , à l'aide de la formule précédente.

## 2.3 Modèles de taux court

On présente deux modèles de taux court (à coefficients constants). Le modèle de Vasicek fut le premier de ce type et apparaît en 1977. Le modèle CIR est apparu en 1985 et il est toujours utilisé, dans d'autres contextes.

### 2.3.1 Modèle de Vasicek

**Le modèle :**

$a, b, \sigma$  sont des constantes strictement positives. Sous  $\mathbb{Q}$ ,

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t. \quad (2.17)$$

**Remarque 5** *Les taux évoluent dans un tunnel, il est courant d'inclure un effet de retour à la moyenne dans le drift du taux spot.*

Si l'on pose  $X_t = r_t - b$  alors

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t. \quad (2.18)$$

Le processus  $X_t$  est dit d'Ornstein-Uhlenbeck (OU). A contrario du mouvement brownien (qui finit par s'étaler sur tout l'espace), le processus OU possède une mesure invariante (limite).



On pose ensuite  $Y_t = e^{at} X_t$ . D'après le paragraphe consacré aux processus explicites,

$$X_t = e^{-at} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (2.19)$$

**Exercice** : quelle est la loi de  $X_t$ , sous  $\mathbb{Q}$  ?

$X_t$  suit une loi normale  $\mathcal{N}\left(e^{-at} X_0, \int_0^t (e^{-a(t-s)})^2 ds\right)$  donc elle est très facile à simuler.

Ainsi, on connaît la forme intégrale explicite de  $r_t$  et on peut le simuler. On peut aussi facilement calculer le prix des zéro-coupon, à partir de la formule

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right). \quad (2.20)$$

On peut aussi évaluer des calls sur ZC, et donc les produits dérivés vanilles par une formule fermée.

**Problème posé par le modèle** : il existe une probabilité non nulle que  $r_t$  prenne des valeurs strictement négatives.

### 2.3.2 Modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

#### Définition

Soit  $\sigma$  et  $a$  des constantes strictement positives,  $b \in \mathbb{R}$ . On dit que  $r_t$  suit un modèle CIR si :

$$dr_t = (a - br_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t. \quad (2.21)$$

Le théorème classique d'existence et d'unicité des solutions pour les EDS ne peut être appliqué car la fonction  $(x \mapsto \sqrt{x})$  n'est pas lipschitzienne. Mais on peut étendre le résultat classique en utilisant le fait que  $(x \mapsto \sqrt{x})$  est höldérienne de coefficient  $\frac{1}{2}$ , i.e.

$$\exists K > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}_+ : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K |x - y|^{1/2}. \quad (2.22)$$

**Proposition 2.3.1** *Pour tout réel  $x \geq 0$ , il existe un unique processus continu et adapté  $(r_t)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant*

$$r_0 = x \text{ et } dr_t = (a - br_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t. \quad (2.23)$$

**Remarque 6** *on ne connaît pas explicitement  $r_t$  mais on sait qu'il suit une loi du  $\chi^2$  décentrée.*

## Calcul des ZC (méthode d'EDP dite de Feynman-Kac)

On peut calculer des espérance à l'aide des EDP. Par exemple, l'équation de la chaleur et Black and Scholes sont liées, voir [6, Section 3.3.3]

Ici, on va calculer les ZC grâce à une EDP. On admet qu'il existe une fonction mesurable  $\phi$  telle que

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right) = \phi(t, r_t) \text{ ou encore } \tilde{B}(t, T) = e^{-\int_0^t r_s ds} \phi(t, r_t). \quad (2.24)$$

$(\tilde{B}(t, T))$  est une martingale donc le drift est nul dans la dynamique de  $(e^{-\int_0^t r_s ds} \phi(t, r_t))$ .

On obtient ce drift par la formule d'Ito. On rappelle que

$$d \left( e^{-\int_0^t r_s ds} \right) = -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} dt. \quad (2.25)$$

Ainsi

$$d \left( e^{-\int_0^t r_s ds} \phi(t, r_t) \right) = e^{-\int_0^t r_s ds} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, r_t) + (a - br_t) \frac{\partial \phi}{\partial r}(t, r_t) + \frac{1}{2} (\sigma^2 r_t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}(t, r_t) \right] dt - r_t e^{-\int_0^t r_s ds} \phi(t, r_t) dt + d \langle \cdot, \cdot \rangle + (\dots) dW_t \quad (2.26)$$

Le crochet est nul. On en déduit l'EDP vérifiée par  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + (a - br) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{2} (\sigma^2 r) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) (t, r) &= r \phi(t, r) \text{ pour } t \in [0, T[ \text{ et pour tout } r > 0 \\ \phi(T, r) &= B(T, T) = 1 \text{ pour tout } r > 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Attention dans l'EDP ci-dessus  $r$  est une variable muette, ce n'est pas le taux court  $r_t$ ! C'est seulement par la suite, dans la formule suivante, qu'on peut prendre comme valeur de  $r$  le taux  $r_t$ . On cherche une solution explicite de l'EDP ci-dessous sous la forme :

$$B(t, T) = \phi(t, T) e^{-\Psi(t, T)r_t}. \quad (2.28)$$

En reportant cette forme dans l'EDP, on trouve des équations différentielles dont  $\phi(\cdot, T)$  et  $\Psi(\cdot, T)$  sont solutions. Et on en déduit  $B(t, T)$ .

On dispose aussi d'une formule de pricing d'un call sur ZC, impliquant la fonction de répartition d'une loi du  $\chi^2$  (peu pratique).

## Conclusion

Le modèle CIR est plus difficile à manipuler que le modèle de Vasicek mais il garantit des taux positifs. Cela illustre le fait qu'il n'existe pas de

modèle de taux idéal et qu'il faut connaître les avantages et les inconvénients de chacun pour les utiliser à bon escient.

Ces deux modèles présentent néanmoins défaut majeur concernant la courbe de taux initiale qu'on discutera dans les sections suivantes.

### 2.3.3 Modèles généralisés

Rappelons que les  $B(0, T)$  sont des données de marché. Dans les deux modèles précédents, on calcule, à partir de la dynamique de  $r_t$ , toutes les valeurs des zéro-coupon  $B(t, T)$  et donc, en particulier, les  $B(0, T)$ . Mais les  $B(0, T)$  calculés ne coïncident pas avec les données de marché  $B^{\text{marché}}(0, T)$  pour tout  $T$ .

Les paramètres du modèle sont réservés à la calibration par rapport aux produits vanilles mais le modèle n'a pas assez de flexibilité pour reproduire tous les  $T$  disponibles. Une solution est de rajouter des degrés de liberté en faisant dépendre un paramètre du temps. On parle alors de **modèles de taux courts généralisés**. Ce choix permet de conserver les facilités de calcul des modèles précédents. Par exemple, une version généralisée du modèle de Vasicek serait

$$dr_t = a(b_t - r_t) dt + \sigma dW_t. \quad (2.29)$$

où  $b_t$  dépend du temps (constant par morceaux en général). Les différentes valeurs de  $b_t$  seront utilisées pour que les prix  $B(0, T)$  donnés par le modèle coïncident avec les prix du marché  $B^{\text{marché}}(0, T)$  pour tout  $T$ .

### 2.3.4 Modèles de taux court multifactoriels

Si l'on étudie les variations de taux zéro-coupon à différentes maturités, elles ne sont pas parfaitement corrélées. La corrélation de marché diminue très fortement lorsque les maturités entre taux s'éloignent.

Afin de prendre en compte les corrélations entre les taux, on peut modéliser à la fois un taux court  $r(t)$  et un taux long-terme  $\ell(t)$  (voir par exemple [1]). Ces modèles ont été abandonnés pour plusieurs raisons. D'abord, ils n'offrent pas d'évaluation simple des ZC, sauf au prix d'approximations analytiques. Mais surtout, ils sont en contradiction avec un résultat de 1996 montrant qu'en AOA, le taux long terme ne peut pas diminuer.

Ainsi, les modèles multifactoriels utilisés aujourd'hui postulent plutôt des dynamiques de taux court à plusieurs facteurs stochastiques.

**Exemple : modèle G2++ de Brigo et Mercurio (2005)**

$$r_t = x(t) + y(t) + \phi(t), \quad (2.30)$$

	1 mois	3 mois	6 mois	9 mois	1 an	2 ans	3 ans	5 ans	7 ans	10 ans
1 mois	1,000	0,295	0,365	0,289	0,311	0,182	0,148	0,110	0,107	0,079
3 mois	0,295	1,000	0,548	0,444	0,459	0,167	0,133	0,100	0,109	0,086
6 mois	0,365	0,548	1,000	0,634	0,647	0,270	0,230	0,215	0,205	0,175
9 mois	0,289	0,444	0,634	1,000	0,651	0,377	0,328	0,281	0,270	0,222
1 an	0,311	0,459	0,647	0,651	1,000	0,422	0,381	0,341	0,325	0,285
2 ans	0,182	0,167	0,270	0,377	0,422	1,000	0,897	0,857	0,807	0,742
3 ans	0,148	0,133	0,230	0,328	0,381	0,897	1,000	0,842	0,806	0,745
5 ans	0,110	0,100	0,215	0,281	0,341	0,857	0,842	1,000	0,908	0,892
7 ans	0,107	0,109	0,205	0,270	0,325	0,807	0,806	0,908	1,000	0,933
10 ans	0,079	0,086	0,175	0,222	0,285	0,742	0,745	0,892	0,933	1,000

Tableau 1 : matrice de corrélation des variations quotidiennes de taux

FIGURE 2.2 – Matrice de corrélation des variations quotidiennes de taux. Crédits : voir [4].

où  $\phi$  est une fonction déterministe qui permet de retrouver la courbe initiale des ZC. On choisit  $\phi(0) = r_0$  et

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), \quad x(0) = 0 \quad (2.31)$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), \quad y(0) = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{avec } d\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho dt. \quad (2.33)$$

Ainsi, on peut connaître explicitement  $r_t$  (processus gaussien) puis trouver une formule explicite pour les ZC et les calls sur ZC, avec en prime un paramètre de corrélation.

Il subsiste néanmoins d'importantes limites avec les modèles multifactoriels : problèmes de calibration, peu de formules analytiques et des méthodes numériques difficiles à implémenter.

## 2.4 Modèle HJM (Heath Jarrow Morton)

Une autre approche est possible : il s'agit de modéliser l'ensemble de la courbe des taux, c'est-à-dire de choisir les dynamiques des zéro-coupon : on se donne  $dB(t, T)$  et les valeurs initiales  $B(0, T)$  sont en entrée du modèle. Ce sont les modèles dites de HJM [2]. Nous allons relier les modèles HJM avec les modèles généralisés de taux court. Sous  $\mathbb{Q}$ ,

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t. \quad (2.34)$$

D'après le travail sur les modèles lognormaux, on a

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left[ \int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 ds \right] \quad (2.35)$$

En particulier,

$$B(t, t) = B(0, t) \exp \left[ \int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, t) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, t)^2 ds \right]. \quad (2.36)$$

Donc en divisant les deux termes,

$$\frac{B(t, T)}{B(t, t)} = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[ \begin{array}{l} \int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 ds \\ - \left( \int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, t) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, t)^2 ds \right) \end{array} \right] \quad (2.37)$$

Ainsi, comme  $B(t, t) = 1$ , on obtient

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[ \int_0^t \Gamma(s, T) - \Gamma(s, t) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 - \Gamma(s, t)^2 ds \right]. \quad (2.38)$$

**Remarque 7** Dès que l'on connaît la volatilité lognormale des zéro-coupon, on peut en calculer le prix. **Un modèle HJM est totalement défini par la donnée de  $\Gamma$ .**

Hypothèses ( $H_4$ ) :

- le processus  $(\Gamma(t, T))_{t \in [0, T]}$  est borné, continu par rapport aux deux variables, dérivable par rapport à  $T$ , de dérivée bornée.
- $\Gamma(t, t) = 0$ , en référence à  $B(t, t) = 1$ .

### Proposition 2.4.1

$$\text{Sous } \mathbb{Q}, \quad df(t, T) = -\sigma(t, T) \Gamma(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t, \quad (2.39)$$

$$\text{où } \sigma(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \Gamma(t, T) \text{ i.e. } \Gamma(t, T) = -\int_t^T \sigma(t, u) du.$$

**Preuve**

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} (\ln B(t, T)). \quad (2.40)$$

$$-\ln B(t, T) = -\ln B(0, T) + \ln B(0, t) - \int_0^t \Gamma(s, T) - \Gamma(s, t) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 - \Gamma(s, t)^2 ds. \quad (2.41)$$

On suppose  $t$  fixé et on dérive par rapport à la deuxième variable  $T$ .

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 ds. \quad (2.42)$$

— On remarque que  $f(0, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T)$ .

— Les hypothèses permettent d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme, on a donc

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} \Gamma(s, T)^2 ds = -2 \int_0^t \sigma(s, T) \Gamma(s, T) ds. \quad (2.43)$$

— De plus, grâce aux hypothèses,  $\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial T} \Gamma(s, T) dW_s\right)$  est une martingale de carré intégrable, vérifiant la propriété d'isométrie ce qui permet de généraliser le théorème de dérivation sous le signe somme pour cette intégrale stochastique et d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s = \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} (\Gamma(s, T)) dW_s = - \int_0^t \sigma(s, T) dW_s. \quad (2.44)$$

— En conclusion,

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \sigma(s, T) \Gamma(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s, \quad (2.45)$$

donc

$$df(t, T) = -\sigma(t, T) \Gamma(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t. \quad (2.46)$$

Pour conclure, un modèle HJM peut être défini par la seule donnée de  $\sigma(t, T)$ .

**Exercice 2.4.2** Soit  $0 < T_1 < \dots < T_n$ . Calculer la dynamique lognormale de  $\left(\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i)\right)$ , avec  $a_i > 0$  (ainsi  $\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i)$  ne s'annule pas).

Résolution

$$d\left(\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i)\right) = \sum_{i=1}^n a_i dB(t, T_i) \quad (2.47)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i) r_t dt + \sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i) \Gamma(t, T_i) dW_t \quad (2.48)$$

Si l'on veut présenter cette dynamique sous forme lognormale, on obtient

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i)\right)}{\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i)} = r_t dt + \frac{\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i) \Gamma(t, T_i)}{\sum_{i=1}^n a_i B(t, T_i)} dW_t. \quad (2.49)$$

**Conclusion** : la volatilité lognormale d'une combinaison linéaire de zéro-coupon est compliquée. La notion de volatilité lognormale ne s'adapte pas très bien aux sommes de zéro-coupon.

**Exercice 2.4.3** Calculer la dynamique lognormale de  $\left(\frac{B(t,T)}{B(t,U)}\right)$ ,  $T \neq U$ .

Résolution : On peut voir ce quotient de zéro-coupon comme le produit de  $B(t, T)$  avec  $\frac{1}{B(t,U)}$ . Dans un premier temps, on va donc calculer la dynamique de  $\frac{1}{B(t,U)}$ .

Pour cela, on va utiliser la formule d'Itô pour la fonction  $(x \mapsto \frac{1}{x})$ . Cette fonction est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or,

$$\forall t \in [0, U] : B(t, U) \in \mathbb{R}_+^*. \quad (2.50)$$

Ainsi,

$$d\left(\frac{1}{B(t, U)}\right) = \frac{-1}{B(t, U)^2} d[B(t, U)] + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{B(t, U)^3} \right] \langle dB(\cdot, U), dB(\cdot, U) \rangle_t. \quad (2.51)$$

Soit

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{B(t, U)}\right) &= \frac{-1}{B(t, U)^2} [B(t, U) (r_t dt + \Gamma(t, U) dW_t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{B(t, U)^3} \right] B(t, U)^2 \Gamma(t, U)^2 dt. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ou encore

$$d\left(\frac{1}{B(t, U)}\right) = \frac{1}{B(t, U)} [(-r_t + \Gamma(t, U)^2) dt - \Gamma(t, U) dW_t]. \quad (2.53)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d\left[B(t, T) \cdot \frac{1}{B(t, U)}\right] &= B(t, T) d\left[\frac{1}{B(t, U)}\right] + \frac{1}{B(t, U)} dB(t, T) + d\langle B(\cdot, T); \frac{1}{B(\cdot, U)} \rangle_t \\ &= \frac{B(t, T)}{B(t, U)} [(-r_t + \Gamma(t, U)^2) dt - \Gamma(t, U) dW_t] \\ &\quad + \frac{B(t, T)}{B(t, U)} (r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t) \\ &\quad + B(t, T) \Gamma(t, T) \times \left(-\Gamma(t, U) \frac{1}{B(t, U)}\right) dt. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ainsi,

$$d \left[ \frac{B(t, T)}{B(t, U)} \right] = \frac{B(t, T)}{B(t, U)} \left[ (\Gamma(t, U)^2 - \Gamma(t, T) \Gamma(t, U)) dt + (\Gamma(t, T) - \Gamma(t, U)) dW_t \right]. \quad (2.55)$$

Conclusion : la volatilité lognormale d'un quotient de zéro-coupon est très simple : on fait la différence de la volatilité lognormale du numérateur et de celle du dénominateur. La notion de volatilité lognormale s'adapte très bien aux quotients de zéro-coupon.



# Chapitre 3

## Produits de taux classiques

Pour rappel travaillons toujours avec le cadre suivant :  $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$  est un espace de probabilité filtré et  $(W_t)$  est un mouvement brownien qui engendre la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . L'horizon temporel est fini :  $\hat{\tau} > 0$ .

### 3.1 Sous-jacents des produits vanilles

On appelle "produit vanille" un produit **coté** sur le marché des options. Ces produits servent donc de **référence pour calibrer les modèles**. Pour comprendre ces produits dans le domaine des taux, on va étudier leurs sous-jacents (taux forward et taux swap) puis les produits eux-mêmes (caps/caplets et swaptions).

#### 3.1.1 Taux forward :

Le taux forward est le taux d'un prêt démarrant dans le futur (forward).

Exemple : le 1er décembre 2018, on envisage un prêt de trois mois, entre deux banques, dans un an. Ce prêt se fera au taux interbancaire Euribor 3M du 1er décembre 2019. Le processus (stochastique) évalue donc la valeur de ce taux entre les 1er décembre 2018 et 2019. Il dépend de trois variables, la date de pricing, la date de début du prêt et la date de fin du prêt.

Soit un échéancier  $(T_j)_{0 \leq j \leq n}$ , tel que

$$0 \leq T_0 < T_1 \dots < T_n \leq \hat{\tau}. \quad (3.1)$$

Pour  $j = 0 \dots n - 1$ , pour  $t \leq T_j$ ,  $F(t, T_j, T_{j+1})$  est la valeur, vue en  $t$ , du taux forward qui fixe en  $T_j$  et paye en  $T_{j+1}$ . Elle est définie par

$$1 + (T_{j+1} - T_j) F(t, T_j, T_{j+1}) = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})}. \quad (3.2)$$

ou encore

$$F(t, T_j, T_{j+1}) = \frac{B(t, T_j) - B(t, T_{j+1})}{(T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1})} \quad (3.3)$$

Le taux forward  $F(0, T_j, T_{j+1})$  est le taux aujourd'hui pour un prêt entre  $T_j$  et  $T_{j+1}$ .

On notera  $F_j(t)$  souvent au lieu de  $F(t, T_j, T_{j+1})$ , lorsque l'échéancier est bien spécifié.

### Lien avec les taux forward instantanés

Si l'on fait tendre  $T_{j+1} - T_j$  vers 0, on a

$$\lim_{T_{j+1} \rightarrow T_j} F(t, T_j, T_{j+1}) = \lim_{T_{j+1} \rightarrow T_j} \frac{1}{B(t, T_{j+1})} \frac{B(t, T_j) - B(t, T_{j+1})}{T_{j+1} - T_j} \quad (3.4)$$

$$= -\frac{1}{B(t, T_j)} \frac{\partial B(t, T_j)}{\partial T_j} = f(t, T_j). \quad (3.5)$$

## 3.1.2 Swap

Le swap (standard) est un produit financier permettant à deux contreparties d'échanger, selon un échéancier, les flux correspondants à un taux fixe et à un taux variable (taux forward pour ce qui nous concerne, en général l'EURIBOR 3M).

En 2005, le marché des swaps est le deuxième plus grand marché de taux d'intérêt de la zone euro, où se traitent des maturités pouvant aller jusqu'à 50 ans.

Dans le cas standard,

- $T_0$  est la date de début du swap mais il n'y a pas d'échange de flux en  $T_0$ .
- On suppose que  $(T_j)_{1 \leq j \leq n}$  est l'échéancier des branches fixe et variable (on peut considérer deux échéanciers différents en pratique).

$K$  est le taux fixe, à multiplier par sa période d'intérêt.

#### Rappel : Pricing en AOA

Si  $G$  est un flux distribué à date  $U$ , alors il existe un portefeuille  $(V_t)$  permettant la réplication de ce flux (marché complet). On a donc  $V_U = G$ . Ce portefeuille actualisé est une  $\mathbb{Q}$ -martingale ( $\mathbb{Q}$  existe car on est en AOA). On a donc

$$\text{Pour } t \leq U, \quad \tilde{V}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \tilde{V}_U \mid \mathcal{F}_t \right] \text{ soit } e^{-\int_0^t r_s ds} V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^U r_s ds} V_U \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$\text{ou encore } V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^U r_s ds} G \mid \mathcal{F}_t \right] \text{ car } e^{-\int_0^t r_s ds} \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.}$$

La borne  $U$  de l'intégrale indique que le flux est distribué en  $U$ .

### Calcul de la branche fixe

A la date  $T_1$ , on donne le flux fixe  $(T_1 - T_0) K$ .

La valorisation, en  $t$ , du flux distribué en  $T_1$  est donc :  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} (T_1 - T_0) K \mid \mathcal{F}_t \right]$ .

On en déduit la formule générale pour la branche fixe, à la date  $t \leq T_0$

$$BF(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{j=1}^n e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) K \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (3.6)$$

On continue le calcul

$$\begin{aligned} BF(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{j=1}^n e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) K \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j). \end{aligned} \quad (3.7)$$

### Calcul de la branche variable

Le taux payé en  $T_j$  sera le taux forward dont la date de paiement est  $T_j$ . Sa date de fixing est donc  $T_{j-1}$  et c'est le taux  $F(\cdot, T_{j-1}, T_j)$ . Or la date de fixing correspond à la date à laquelle on valorise le taux distribué (il s'agit du début du prêt). On donne donc  $F(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j) = F_{j-1}(T_{j-1})$ .

Dans ces exemples, le taux distribué en  $T_j$  est fixé "in advance", à la date précédente  $T_{j-1}$ .

La **branche variable** aura pour valeur, à la date  $t \leq T_0$

$$BV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} F_{j-1}(T_{j-1}) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.8)$$

### Double conditionnement :

On peut dire que, si  $X$  est  $\mathcal{F}_{T_j}$ -mesurable alors

$$\boxed{\text{pour } t \leq T_{j-1} < T_j, \quad \pi_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_t \right].} \quad (3.9)$$

Important : ceci est justifié par le fait que  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{T_{j-1}}$ .

— Le double conditionnement est utilisé lorsque l'on constate un décalage entre la date de fixing et la date de paiement.

— **Suite du calcul** : on conditionne chacun des termes de la somme selon  $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$ , soit

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) F_{j-1}(T_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}} \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.10)$$

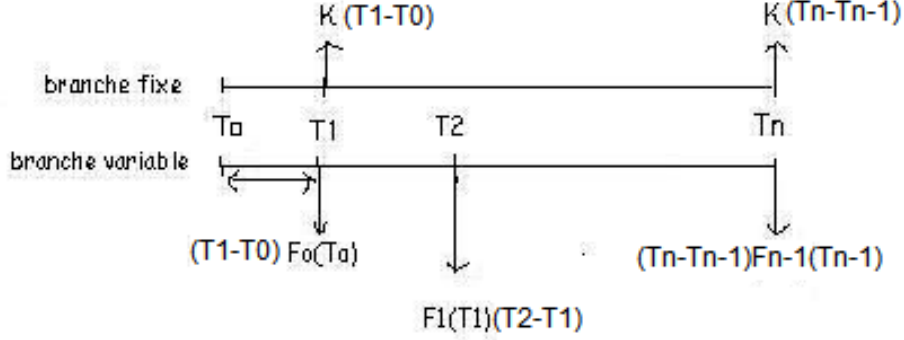


FIGURE 3.1 – Illustration swap. Crédits : S. Hénon.

Or,  $e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} F_{j-1}(T_{j-1})$  est  $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$ -mesurable donc elle peut sortir de l'espérance conditionnelle sachant  $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$ .

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) F_{j-1}(T_{j-1}) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_s ds} | \mathcal{F}_{T_{j-1}} \right) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.11)$$

Comme  $B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right)$ , on a

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) B(T_{j-1}, T_j) F_{j-1}(T_{j-1}) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.12)$$

On a aussi

$$F_{j-1}(T_{j-1}) = \frac{B(T_{j-1}, T_{j-1}) - B(T_{j-1}, T_j)}{(T_j - T_{j-1}) B(T_{j-1}, T_j)}. \quad (3.13)$$

Donc

$$\begin{aligned} BV(t) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) B(T_{j-1}, T_j) \left( \frac{B(T_{j-1}, T_{j-1}) - B(T_{j-1}, T_j)}{(T_j - T_{j-1}) B(T_{j-1}, T_j)} \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} (B(T_{j-1}, T_{j-1}) - B(T_{j-1}, T_j)) | \mathcal{F}_t \right] \text{ et } B(T_{j-1}, T_{j-1}) = 1. \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} B(T_{j-1}, T_j) | \mathcal{F}_t \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ B(t, T_{j-1}) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} B(T_{j-1}, T_j) | \mathcal{F}_t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sous  $\mathbb{Q}$ , les zéro-coupon actualisés sont des martingales. On rappelle que la définition d'une martingale  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  permet d'écrire que

$$\forall t \leq T : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [M_T | \mathcal{F}_t] = M_t \quad (3.15)$$

Ici, si  $M_t = e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T_j)$ , alors

$$\forall t \leq T \leq T_j : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T r_s ds} B(T, T_j) | \mathcal{F}_t \right] = e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T_j),$$

soit  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} B(T, T_j) | \mathcal{F}_t \right] = B(t, T_j)$  car  $\left( e^{-\int_0^t r_s ds} \right)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

ce qui permet de conclure que

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n [B(t, T_{j-1}) - B(t, T_j)] = B(t, T_0) - B(t, T_n). \quad (3.16)$$

### 3.1.3 Taux swap

Définition du taux swap à la date de valorisation  $t \leq T_0$

C'est le **taux fixe** qu'il faudrait choisir pour obtenir l'égalité entre les branches fixe et variable, valorisées à la date  $t$ . On le note  $S_t$ .

**Remarque 8**  $(S_t)$  est un processus.

Il est défini grâce à l'égalité suivante

$$S_t \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j) = B(t, T_0) - B(t, T_n). \quad (3.17)$$

i.e.

$$S_t = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j)}. \quad (3.18)$$

**Remarque 9** Les valeurs initiales des taux de swaps sont des données de marché alors que les zéro-coupon et les taux « forward » sont construits implicitement à partir des données de marché.

## 3.2 Changement de numéraire et applications

Les taux forward et les taux swap ont une forme de quotient de ZC. On aimerait les rendre martingales, en changeant de probabilité.

### 3.2.1 But de l'opération

Pour qu'un processus  $(N_t)$  puisse être choisi comme nouveau numéraire, il faut que

1. La valeur actualisée de  $(N_t)$  soit une  $\mathbb{Q}$ -martingale (i.e.  $(N_t)$  est un actif de référence)
2.  $(N_t)$  soit à valeurs strictement positives.

On supposera ces deux conditions comme remplies par le processus noté  $(N_t)$  dans ce paragraphe.

**Théorème 3.2.1** *Changer de numéraire permet de définir une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}^*$ , associée à ce numéraire. Quel que soit l'actif de référence  $(Y_t)$ , (i.e. la valeur actualisée de  $(Y_t)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale),  $\left(\frac{Y_t}{N_t}\right)$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}^*$ .*

Autrement dit, le changement de numéraire est une technique qui permet de manipuler des **quotients** en tant que martingales.

**Exemple :**

- la valeur actualisée de  $(B(t, T))$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.
- un zéro-coupon est à valeurs strictement positives.

Donc un zéro-coupon peut servir de numéraire.

Ainsi, tous les quotients du type  $\left(\frac{B(t, U)}{B(t, T)}\right)$  sont des martingales sous la probabilité associée à  $(B(t, T))$ . On la note  $\mathbb{Q}^T$ .

#### Densité de probabilité sur $[0, T]$

On admet que les probabilités  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}^*$  sont équivalentes, donc il existe une densité de probabilité  $L_T$  entre elles et plus généralement, un processus densité. On veut déterminer

$$L_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L_T | \mathcal{F}_t) = \frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t}. \quad (3.19)$$

Soit  $(Y_t)$  un actif de référence. On va étudier une condition suffisante pour que  $\left(\frac{Y_t}{N_t}\right)$  soit une  $\mathbb{Q}^*$ -martingale. C'est bien un processus adapté (on admet que  $\forall t \leq T : \frac{Y_t}{N_t}$  est intégrable sous  $\mathbb{Q}^*$ ).

$$\forall u \leq T : \forall t \leq u : \frac{Y_t}{N_t} = E_{\mathbb{Q}^*} \left( \frac{Y_u}{N_u} \Big| \mathcal{F}_t \right). \quad (3.20)$$

On rappelle la formule de changement de probabilité (passage de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{Q}^*$ ) pour les espérances conditionnelles et pour  $X$  de carré intégrable,  $\mathcal{F}_u$ -mesurable,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(X|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X L_u|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L_u|\mathcal{F}_t)}. \quad (3.21)$$

Donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\left(\frac{Y_u}{N_u}|\mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{L_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y_u}{N_u} L_u|\mathcal{F}_t\right). \quad (3.22)$$

L'égalité devient

$$\forall u \leq T : \forall t \leq u : \frac{Y_t}{N_t} L_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y_u}{N_u} L_u|\mathcal{F}_t\right). \quad (3.23)$$

Il suffit donc que  $\left(\frac{Y_t}{N_t} L_t\right)$  soit une  $\mathbb{Q}$ -martingale. Comme  $\left(e^{-\int_0^t r_s ds} Y_t\right)$  est aussi une  $\mathbb{Q}$ -martingale, il suffit (et c'est même une CNS dès que le marché est complet), que ces deux processus soient égaux, à une constante multiplicative près

$$\frac{Y_t}{N_t} L_t = C \cdot e^{-\int_0^t r_s ds} Y_t \text{ où } C \text{ est une constante.} \quad (3.24)$$

$L_t$  ne dépend pas du  $Y$  choisi, ce qui est plutôt logique !

$$L_t = C e^{-\int_0^t r_s ds} N_t. \quad (3.25)$$

En particulier,  $L_0 = C N_0$  ou encore  $C = \frac{L_0}{N_0}$ .

De plus, comme  $(L_t)$  est une densité de probabilité alors  $L_0 = 1$ .

En effet, le processus densité est une  $\mathbb{Q}$ -martingale donc  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L_T) = L_0$  (espérance constante).

De plus, par définition d'une densité,

$$1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(\mathbf{1}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L_T \times \mathbf{1}). \quad (3.26)$$

En conclusion,

$$\boxed{L_t = \frac{e^{-\int_0^t r_s ds} N_t}{N_0}.} \quad (3.27)$$

**Remarque 10** Grâce à la formule de changement de probabilité pour les espérances conditionnelles, on sait que

$$L_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X L_T|\mathcal{F}_t)$$

ou encore 
$$\frac{e^{-\int_0^t r_s ds} N_t}{N_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(X \frac{e^{-\int_0^T r_s ds} N_T}{N_0}|\mathcal{F}_t\right).$$

En conclusion, on a, pour tout actif  $X$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable,

$$\boxed{N_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} X N_T|\mathcal{F}_t\right).} \quad (3.28)$$

## A propos du théorème de Girsanov

**Remarque 11** *la volatilité lognormale d'un actif reste la même, qu'il soit actualisé ou non. Autrement dit, les volatilités lognormales de  $(X_t)$  et de  $(e^{-\int_0^t r_s ds} X_t)$  sont les mêmes.*

**Preuve** (exercice) : si l'on note  $(\sigma_t)$  la volatilité lognormale de  $(X_t)$ , on a

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\dots) dt + \sigma_t dW_t. \quad (3.29)$$

On rappelle que

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds}\right) = -e^{-\int_0^t r_s ds} r_t dt. \quad (3.30)$$

En utilisant la formule du produit, on a

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} X_t\right) &= X_t d\left(e^{-\int_0^t r_s ds}\right) + e^{-\int_0^t r_s ds} dX_t + d\langle \dots \rangle \\ &= -X_t e^{-\int_0^t r_s ds} r_t dt + e^{-\int_0^t r_s ds} X_t [(\dots) dt + \sigma_t dW_t] + (\dots) dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

En conclusion,

$$\frac{d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} X_t\right)}{\left(e^{-\int_0^t r_s ds} X_t\right)} = (\dots) dt + \sigma_t dW_t \quad (3.32)$$

i.e.  $(\sigma_t)$  est bien la volatilité lognormale de  $(e^{-\int_0^t r_s ds} X_t)$ .

**Remarque 12** *Si on change de probabilité, la volatilité ne change pas.*

Comme  $(e^{-\int_0^t r_s ds} N_t)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale, sa dynamique admet un drift nul (et une partie en  $dW_t$ , d'après le th de représentation des martingales browniennes) :

$$\frac{d\tilde{N}_t}{\tilde{N}_t} = \sigma_t dW_t. \quad (3.33)$$

ou encore

$$\tilde{N}_t = N_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds\right). \quad (3.34)$$

Ainsi,

$$L_T = \exp\left(\int_0^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds\right). \quad (3.35)$$

Avec Girsanov, dès que  $(L_t)$  est une vraie martingale,  $(W_t^*)$ , défini par

$$dW_t^* = dW_t - \sigma_t dt, \text{ est un mouvement brownien sous } \mathbb{Q}^*. \quad (3.36)$$



## Récapitulatif

	Sous $\mathbb{Q}$	Sous la probabilité $(N_t)$ associée au numéraire $(N_t)$
martingale	$(Y_t)$ actualisé	$(Y_t / N_t)$
mouvement brownien	$(W_t)$	$(W_t^*)$ où $dW_t^* = dW_t - \sigma_t dt$ et $\sigma_t$ volatilité lognormale de $(N_t)$

(3.37)

### 3.2.2 Choix d'un zéro-coupon comme numéraire.

Un zéro-coupon peut servir de numéraire. On note la probabilité  $\mathbb{Q}^T$  associée au numéraire  $B(t, T)$ . Le taux forward

$$F_{j-1}(t) = \frac{1}{T_j - T_{j-1}} \frac{B(t, T_{j-1}) - B(t, T_j)}{B(t, T_j)} \quad (3.38)$$

est une martingale sous  $\mathbb{Q}^{T_j}$ . C'est pourquoi  $\mathbb{Q}^{T_j}$  est appelée probabilité forward (neutre).

On sait que  $(\Gamma(t, T))$  est la volatilité lognormale du numéraire  $(B(t, T))$ .

**Proposition 3.2.2** *Si le processus  $(W_t)$  est un brownien sous  $\mathbb{Q}$ , alors  $(W_t^{\mathbb{Q}^T})$ , défini par*

$$dW_t^{\mathbb{Q}^T} = dW_t - \Gamma(t, T) dt, \quad (3.39)$$

*est un brownien sous  $\mathbb{Q}^T$ .*

**Exercice :** montrer que le taux forward instantané  $(f(t, T))_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale locale sous  $\mathbb{Q}^T$ .

### 3.2.3 Choix d'une combinaison linéaire de zéro-coupon

On pose

$$V(t) = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j). \quad (3.40)$$

Sa valeur actualisée est une  $\mathbb{Q}$ -martingale. De plus, les coefficients de la combinaison linéaire sont tous strictement positifs donc  $V$  ne prend que des valeurs strictement positives. On peut donc l'utiliser comme numéraire.

Sous la probabilité associée à  $V$  et notée  $\mathbb{Q}^S$ , le taux swap  $(S_t)$ , défini par

$$S_t = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{V(t)}, \text{ est une martingale.} \quad (3.41)$$

On parle alors d'une **probabilité swap neutre** (appelée aussi level probability).

**Exercice** : calculer la volatilité lognormale de  $(V_t)$  pour définir un brownien sous  $\mathbb{Q}^S$ .

$$\frac{dV_t}{V_t} = \dots dt + \frac{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) \Gamma(t, T_j) B(t, T_j)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j)} dW_t. \quad (3.42)$$

**Conclusion** : on note

$$\sigma(t) = \frac{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) \Gamma(t, T_j) B(t, T_j)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j)}. \quad (3.43)$$

Si  $(W_t)$  est un brownien sous  $\mathbb{Q}$ , alors  $(W_t^{\mathbb{Q}^S})$ , défini par

$$dW_t^{\mathbb{Q}^S} = dW_t - \sigma(t) dt \quad (3.44)$$

est un brownien sous  $\mathbb{Q}^S$ .

### 3.3 Produits vanilles

**Rappel** : les caps et les swaptions sont les produits cotés sur le marché des taux. Ces produits servent donc de référence pour calibrer les modèles.

#### 3.3.1 Les caps

Un cap ou « option de taux plafond » est une combinaison linéaire de caplets et un caplet est tout simplement un call sur taux forward.

L'acheteur d'un « cap » utilise ce produit pour se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt, par exemple pour couvrir un prêt à taux variable consenti par une banque. Si l'investisseur doit verser le taux variable  $F$  et s'il achète un caplet de strike  $K$ , il verse, à maturité  $T$ ,

$$F - (F - K)_+ = F \text{ si } F \leq K \text{ et à } K \text{ sinon.} \quad (3.45)$$

Le caplet lui permet de plafonner ses versements au taux fixe  $K$ , d'où le nom du produit.

On se restreint généralement à l'étude des caplets, en décomposant (striping) les caps en caplets. Les problèmes théoriques liés à cette décomposition ne sont pas abordés (répartition de la volatilité implicite sur les caplets).

Un floor, ou « option de taux plancher » est un contrat conditionnel, donnant à son acheteur le droit de placer à un taux d'intérêt plancher (le taux d'exercice). Il se décompose en floorlet, qui sont des puts sur taux forward.

### 3.3.2 Les caplets

On note  $T$  sa maturité,  $U > T$  la date de paiement du flux (ou de livraison, "settlement date") et  $K$  le strike. Le sous-jacent est le taux forward qui fixe en  $T$  et paye en  $U$ , on le note  $F$  (avec les notations utilisées dans la définition, ce serait  $F(., T, U)$ ).

En AOA, le prix du caplet, à la date  $t$ , est

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^U r_s ds} (U - T) (F(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.46)$$

La date de paiement apparaît dans l'actualisation et la maturité correspond à la date d'évaluation du sous-jacent.

Dans le domaine des taux, on caractérise les produits en donnant leur terme et leur maturité. Le terme du caplet est ici  $U - T$ .

On rappelle qu'il est courant d'utiliser un double conditionnement lorsque l'on constate un décalage entre la date de fixing et la date de paiement. Ici, on va préconditionner par  $\mathcal{F}_T$ .  $T$  est une date intermédiaire entre  $t$  et  $U$ .

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ e^{-\int_t^U r_s ds} (U - T) (F(T) - K)_+ | \mathcal{F}_T \right\} | \mathcal{F}_t \right] \\ \pi_t &= (U - T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (F(T) - K)_+ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ e^{-\int_T^U r_s ds} | \mathcal{F}_T \right\} | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Or, on sait que  $B(T, U) = E_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_T^U r_s ds} | \mathcal{F}_T \right)$  donc

$$\pi_t = (U - T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (F(T) - K)_+ B(T, U) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.48)$$

### 3.3.3 Les swaptions

Une **swaption** est une option sur swap, à savoir que l'on choisit ou non de rentrer dans un swap à la maturité  $T$  de l'option. Une swaption (ou un swap) est dite payeuse si l'investisseur a choisi de payer le taux fixe lorsqu'il rentrera (éventuellement) dans le swap. On se restreint au cas où  $T \leq T_0$ .

Il est intéressant de rentrer dans un swap si sa valeur est positive. En reprenant les notations de la définition, il faut que, pour un swap payeur,  $BV(T) - BF(T) \geq 0$ .

Le prix de la swaption payeuse, à la date  $t \leq T$ , est donc

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (BV(T) - BF(T))_+ | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.49)$$

**Définition 3.3.1** *Le terme d'une swaption est défini par la durée du swap sous-jacent, c'est-à-dire  $T_n - T_0$ , avec les notations actuelles. Une option sur swap 3 ans dans 5 ans donne le droit mais pas l'obligation d'entrer, dans 5 ans, dans un swap d'une durée de 3 ans. Elle est notée 5x3.*

Le travail précédent sur les swaps permet d'écrire

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \left( \begin{array}{c} B(T, T_0) - B(T, T_n) \\ -K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) \end{array} \right)_+ | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.50)$$

## 3.4 Volatilité implicite

### 3.4.1 Un outil : la formule de Black

Il permet de calculer des espérances ou des volatilités implicites.

On note  $\Phi$  la fonction de répartition d'une variable gaussienne, centrée, réduite.

**Théorème 3.4.1** *Sous une probabilité  $R$ ,*

- 1.  $(X_t)$  est une martingale (sa dynamique n'admet donc pas de drift) et sa volatilité lognormale :
- 2. est déterministe
- 3. ne s'annule pas
- 4. et appartient à  $L^2([0; \hat{\tau}])$ .

$$\text{Sous } R, \quad \frac{dX_t}{X_t} = \sigma_t^X dW_t. \quad (3.51)$$

Pour  $T \leq \hat{\tau}$  et  $t \in [0; T]$ , la **formule de Black** permet de calculer  $\mathbb{E}_R [(X_T - K)_+ | \mathcal{F}_t]$  :

$$\mathbb{E}_R [(X_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] = \text{Black}^{call}(X_t, K, T - t, \sigma) \quad (3.52)$$

où

$$Black^{call}(x, K, T-t, \sigma) = x \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{x}{K} \right) + \frac{1}{2} \sigma_B^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - K \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{x}{K} \right) - \frac{1}{2} \sigma_B^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \quad (3.53)$$

et

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\sigma_s^X)^2 ds. \quad (3.54)$$

On dispose du même type de formule pour les puts, notée  $Black^{put}$

$$Black^{put}(x, K, T-t, \sigma_B) = K \Phi \left( -\frac{\ln \left( \frac{x}{K} \right) - \frac{1}{2} \sigma_B^2 (T-t)}{\sigma_B \sqrt{T-t}} \right) - x \Phi \left( -\frac{\ln \left( \frac{x}{K} \right) + \frac{1}{2} \sigma_B^2 (T-t)}{\sigma_B \sqrt{T-t}} \right) \quad (3.55)$$

et

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\sigma_s^X)^2 ds. \quad (3.56)$$

**Remarque 13** Pour  $X_0, K, T$  fixés, la fonction  $(\sigma \rightarrow Black^{call}(X_0, K, T, \sigma))$  est bijective. Il y a donc une correspondance entre le prix et le paramètre de volatilité.

### 3.4.2 Volatilité implicite d'un caplet

#### Définition

Le prix du caplet est donné par

$$\pi_t = (U - T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (F(T) - K)_+ B(T, U) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.57)$$

On choisit de travailler sous la probabilité  $\mathbb{Q}^U$  qui rend le sous-jacent du caplet,  $(F_t)$  martingale. On va utiliser le zéro-coupon  $(B(t, U))$  comme numéraire. On a

$$E_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} X N_T \mid \mathcal{F}_t \right) = N_t E_{\mathbb{Q}^*} (X \mid \mathcal{F}_t). \quad (3.58)$$

Dans notre situation,  $N_t = B(t, U)$  et  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^U$ . Donc

$$\pi_t = (U - T) B(t, U) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^U} [(F(T) - K)_+ \mid \mathcal{F}_t]. \quad (3.59)$$

A la date  $t = 0$ , on a donc

$$\pi_0 = (U - T) B(0, U) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^U} [(F(T) - K)_+]. \quad (3.60)$$

La volatilité implicite du caplet est définie comme l'unique valeur  $\sigma_B$  telle que

$$\frac{\pi_0}{(U - T) B(0, U)} = \text{Black}^{\text{call}}(F(0), K, T, \sigma_B). \quad (3.61)$$

**Remarque 14** *Ce calcul est une convention car on ne vérifie pas les hypothèses de la formule de Black.*

**Remarque 15** *C'est la principale référence sur les marchés de taux : les cotations sont données sous forme de volatilités implicites. Quand on parle de calibration de modèle, on recherche en fait la volatilité implicite des vanilles plutôt que le prix. La calibration est une minimisation entre les volatilités implicites du modèle et celles cotées sur le marché.*

En pratique, dans la grande majorité des modèles, le calcul de la volatilité implicite se fait donc en deux temps, calcul du prix puis résolution de l'équation précédente.

Seule exception, les modèles dits de marché.

### Modèle de marché (pour les caplets)

Supposons que l'on modélise un taux forward ( $F_t$ ), sous-jacent d'un caplet. Sous la probabilité forward associée à ( $F_t$ ), on manipule donc une dynamique du type

$$\frac{dF_t}{F_t} = \gamma_t dW_t. \quad (3.62)$$

Si, de plus,  $(\gamma_t)$  vérifie les trois hypothèses de la formule de Black :

1. déterministe
2. ne s'annule pas
3. et appartient à  $L^2([0; \hat{\tau}])$ .

Alors on peut calculer directement la volatilité implicite. "Directement" fait référence à l'inutilité de calculer le prix. Dans ce (seul) cas de figure, le paramètre  $\sigma_B$  recherché se calcule par

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_s)^2 ds. \quad (3.63)$$

### A bien comprendre

Rappelons que notre but est d'évaluer les volatilités implicites des caplets pour calibrer le modèle. En effet, les caplets sont des produits cotés. On parle de **modèle de marché** (pour les caplets) lorsque l'on récupère la volatilité implicite des caplets directement.

Tableau récapitulatif :

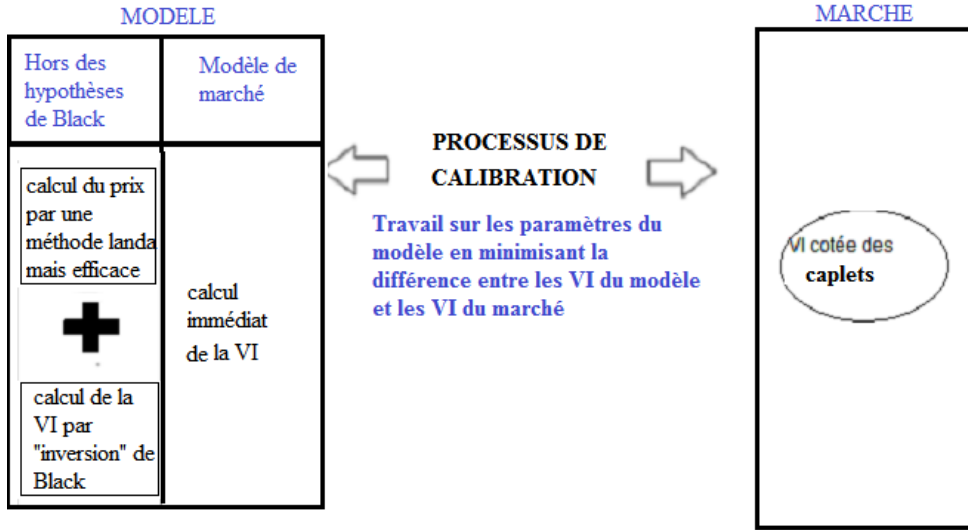


FIGURE 3.2 – Crédits : S. Hénon.

### 3.4.3 Volatilité implicite d'une swaption

Le prix d'une swaption payeuse est donné par

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \left( \begin{array}{c} B(T, T_0) - B(T, T_n) \\ -K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) \end{array} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.64)$$

$\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) > 0$ , on peut le factoriser comme suit,

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) \left( \frac{B(T, T_0) - B(T, T_n)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j)} - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) (S_T - K)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

On utilise alors

$$N_t E_{\mathbb{Q}^*} (X | \mathcal{F}_t) = E_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} N_T X | \mathcal{F}_t \right). \quad (3.66)$$

Sous la probabilité swap neutre  $\mathbb{Q}^S$ , le prix devient

$$\pi_t = \left[ \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j) \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} [(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t]. \quad (3.67)$$

A la date  $t = 0$ , on a donc

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(0, T_j) \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} [(S_T - K)_+] \quad (3.68)$$

La volatilité implicite d'une swaption payeuse est définie comme l'unique valeur  $\sigma_B$  telle que

$$\frac{\pi_0}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(0, T_j)} = Black^{call}(S_0, K, T, \sigma_B). \quad (3.69)$$

**Remarque 16** *La volatilité implicite d'une swaption receveuse est le nombre  $\sigma_B$  vérifiant l'égalité*

$$\frac{\pi_0}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(0, T_j)} = Black^{Put}(S_0, K, T, \sigma_B). \quad (3.70)$$

Comme pour les caplets, dans la grande majorité des modèles, on résout l'équation

Parcontre, dans les **modèle de marché** pour les swaptions, on modélise un taux swap  $(S_t)$ , sous-jacent d'une swaption (payeuse ou receveuse). Sous la probabilité swap neutre associée à  $(S_t)$ , on manipule donc une dynamique du type

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha_t dW_t. \quad (3.71)$$

Si, de plus,  $(\alpha_t)$  vérifie les trois hypothèses de la formule de Black alors on peut calculer directement la volatilité implicite par

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha_s)^2 ds. \quad (3.72)$$

### 3.4.4 Courbes de volatilités implicites

On dit qu'un call est à la monnaie lorsque le strike est égal à la valeur initiale du sous-jacent. On parlera de call ATM, qui signifie "At The Money".

On appelle **courbe de volatilité implicite** (ou **smile**) la représentation graphique de la fonction  $(K \rightarrow \sigma_B(X_0, K, T))$ , pour  $X_0$  et  $T$  fixés. On parle de *smile* car la fonction  $(K \rightarrow \sigma_B(X_0, K, T))$  est généralement convexe.

On parle souvent de *skew* pour désigner une asymétrie dans la courbe, qui se caractérise par une tangente décroissante à la monnaie.

Voir Figure 3.3 pour une illustration.



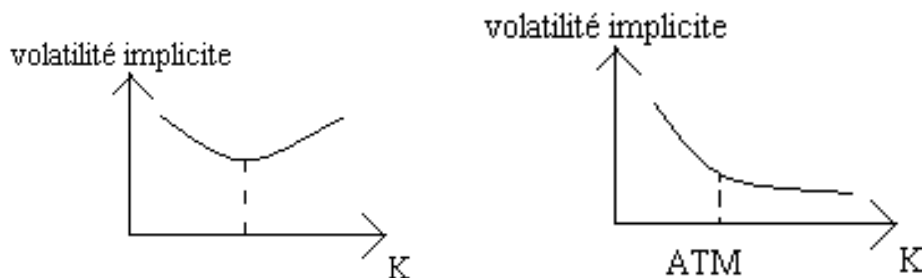


FIGURE 3.3 – Courbes de volatilité implicite : à gauche un smile symétrique, à droite un smile avec skew. Crédits : S. Hénon.

## 3.5 A propos des modèles

### 3.5.1 Utilisation d'un modèle de taux

On s'intéresse à un produit exotique. Il faut calculer son prix et élaborer des stratégies de couverture (grâce aux valeurs des grecques). On appelle grecques les dérivées du prix par rapport à divers facteurs, comme le prix initial du sous-jacent (delta), le niveau de volatilité (vega) etc...

Pour cela,

1. On décide d'un modèle
2. On calibre ce modèle : le modèle doit donner les mêmes volatilités implicites que le marché pour un ensemble d'options vanille (le modèle doit être capable de reproduire la diversité des smiles du marché).

Pour mettre en oeuvre cette calibration, il est important de pouvoir calculer les volatilités implicites des options vanilles facilement (dans une procédure de minimisation, elles sont calculées des centaines de fois). Seuls les modèles fournissant un calcul efficace de ces volatilités implicites sont donc envisageables.

3. Pour calculer les prix du produit exotique, on utilise, en général, des méthodes numériques (Monte-Carlo, EDP...) et on simule les valeurs grâce au modèle calibré.

Un modèle projette le produit exotique dans le monde des vanilles.

### 3.5.2 Quel modèle ?

On étudie différentes modélisations de l'ensemble de la courbe des taux :

- le modèle BGM (Brace, Gatarek, Musiela) est dit "de marché" car il permet de calculer directement les volatilités implicites des caplets. En effet, dans sa version simple, les quatres hypothèses de Black sont vérifiées pour les taux forward.
- Les modèles LGM (Linear Gauss Markov) utilisent les zéro-coupon. Ces modèles sont plus simples.
- Les modèles à volatilité stochastique procurent une plus grande diversité de smiles. Mais le marché devient incomplet et il est généralement difficile d'établir un pricing efficace pour les vanilles. Deux exceptions notables
  - SABR : un modèle de marché comportant une approximation intéressante de la volatilité implicite (formule fermée)
  - Heston : ce modèle n'est pas de marché. La méthode de pricing repose sur les transformées de Fourier.

# Chapitre 4

## Le modèle LGM

- C'est un modèle de l'ensemble de la courbe de taux (mais on pourrait presque le voir comme un modèle de taux court généralisé : il est apparenté au modèle généralisé de Hull and White). On l'appelle aussi Gaussian term structure model.
- Ce n'est pas un modèle de marché. On calculera les volatilités implicites en deux étapes : prix du produit vanille puis inversion de la formule de Black.
- Ce modèle s'appuie sur les zéro-coupon. Et justement, grâce à la formule dite de reconstruction, on calcule facilement le prix de tous les zéro-coupon.

### 4.1 Présentation du modèle à un facteur

Un facteur signifie que le brownien utilisé est unidimensionnel.

**Remarque 17** *Dans les modèles à un facteur, tous les taux sont totalement corrélés. On les choisit pour leur simplicité.*

On pose :

$$\sigma(t, T) = \sigma_t e^{-\lambda(T-t)}. \quad (4.1)$$

Dans le deuxième chapitre, on a montré que dans tout modèle HJM (assez régulier), on a

$$df(t, T) = -\sigma(t, T) \Gamma(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t, \text{ où } \Gamma(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, u) du. \quad (4.2)$$

Ici, on a

$$\Gamma(t, T) = -\sigma_t \int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du = -\sigma_t \left[ \frac{e^{-\lambda(u-t)}}{-\lambda} \right]_t^T = -\sigma_t \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}. \quad (4.3)$$

Ainsi,

$$df(t, T) = -\sigma_t e^{-\lambda(T-t)} \left[ -\sigma_t \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \right] dt + \sigma_t e^{-\lambda(T-t)} dW_t \quad (4.4)$$

$$= \sigma_t^2 e^{-\lambda(T-t)} \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} dt + \sigma_t e^{-\lambda(T-t)} dW_t. \quad (4.5)$$

**Exemple 4.1.1** Le modèles de Ho et Lee est une simplification de LGM dans laquelle  $\sigma(t, T) = \sigma$ .

#### Interprétation des paramètres

- $\sigma_t$  est la structure à terme de la volatilité (fonction déterministe et même constante par morceaux en pratique).
- $\lambda$  est le coefficient de retour à la moyenne ("mean-reversion"). En effet, si l'on note

$$X_t = r_t - f(0, t), \quad (4.6)$$

alors  $(X_t)$  admet une dynamique avec retour vers la moyenne (admis)

$$dX_t = (\phi_t - \lambda X_t) dt + \sigma_t dW_t \quad \text{avec } \phi_t = \int_0^t \sigma(s, t)^2 ds. \quad (4.7)$$

**Remarque :**  $X_t$  est une gaussienne.

Exercice : dans le modèle de Ho et Lee, calculer  $dX_t$ .

On note

$$df(t, T) = \sigma^2 (T - t) dt + \sigma dW_t \quad (4.8)$$

On a donc

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 \int_0^t T ds - \sigma^2 \int_0^t s ds + \sigma W_t = f(0, T) + \sigma^2 t \left( T - \frac{t}{2} \right) + \sigma W_t. \quad (4.9)$$

Soit :

$$X_t = f(t, T) - f(0, T) = \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \sigma W_t, \quad \text{où } X_t \text{ est une fonction de } t \text{ et de } W_t. \quad (4.10)$$

Ainsi :

$$dX_t = \sigma^2 t dt + \sigma dW_t, \quad \text{avec } \phi_t = \sigma^2 t. \quad (4.11)$$

## 4.2 Pricing des caplets

On reprend la formule (3.48)

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (U - T) (F(T) - K)_+ B(T, U) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.12)$$

On utilise la définition des taux forward dans (3.46)

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (U - T) \left( \frac{B(T, T) - B(T, U)}{(U - T) B(T, U)} - K \right)_+ B(T, U) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.13)$$

Comme  $(U - T) B(T, U)$  est strictement positif, on peut le distribuer dans la partie positive,

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} ([B(T, T) - B(T, U)] - K (U - T) B(T, U))_+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} [1 - (1 + (U - T) K) B(T, U)]_+ \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

On pose  $\delta = 1 + (U - T) K$  pour alléger les notations

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} [1 - \delta B(T, U)]_+ \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.15)$$

On s'intéresse à la probabilité forward de numéraire  $B(t, T)$ , et on utilise (3.28). On sait que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} X \mid \mathcal{F}_t \right) = B(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} (X \mid \mathcal{F}_t). \quad (4.16)$$

Soit

$$\begin{aligned} \pi_t &= B(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} [(1 - \delta B(T, U))_+ \mid \mathcal{F}_t] \\ \pi_t &= \delta B(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left[ \left( \frac{1}{\delta} - B(T, U) \right)_+ \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi, pour  $t = 0$ , comme  $B(T, T) = 1$ ,

$$\pi_0 = \delta B(0, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left[ \left( \frac{1}{\delta} - \frac{B(T, U)}{B(T, T)} \right)_+ \right] \quad (4.18)$$

On peut considérer comme sous-jacent  $\left( \frac{B(t, U)}{B(t, T)} \right)$  qui est une  $\mathbb{Q}^T$ -martingale. Calculons sa volatilité lognormale. Elle est égale à

$$\Gamma(t, U) - \Gamma(t, T) = \sigma_t \frac{e^{-\lambda(U-t)} - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}, \quad (4.19)$$

qui est non nulle, déterministe et de carré intégrable sur  $[0, \widehat{\tau}]$ . Les hypothèses d'application de la formule de Black sont vérifiées. Ainsi, le prix d'un caplet est obtenu par une formule de Black :

$$\pi_0 = \delta B(0, T) \text{ Black}^{put} \left( \frac{B(0, U)}{B(0, T)}; \frac{1}{\delta}; T; \bar{\sigma} \right) \text{ où } \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\Gamma(s; U) - \Gamma(s; T))^2 ds. \quad (4.20)$$

**Attention** : le paramètre  $\bar{\sigma}^2$  qui apparaît dans la formule n'a rien à voir avec la volatilité implicite du caplet. On rappelle que la volatilité implicite est définie par convention comme l'unique  $\sigma_B$  tel que :

$$\frac{\pi_0}{(U - T) B(0, U)} = \text{Black}^{call}(F(0), K, T, \sigma_B). \quad (4.21)$$

## 4.3 Formule de reconstruction

### 4.3.1 Modèle markovien

La formule de reconstruction permet d'exprimer les prix des zéro-coupon en fonction d'un système markovien de variables d'état.

Ici, l'unique variable d'état est  $X_t$ .  $(X_t)$  est markovien au vu de sa dynamique. Pour s'en convaincre, on remarque que le drift et la volatilité sont des fonctions déterministes de  $t$  et de  $X_t$  lui-même. Ces coefficients ne dépendent donc ni d'un autre processus, ni de la trajectoire suivie par le processus  $X$  jusqu'en  $t$  mais seulement de sa valeur actuelle. On peut utiliser un schéma d'Euler pour approcher  $X_t$ .

### 4.3.2 La formule

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[ -\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} X_t - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \right)^2 \phi_t \right]. \quad (4.22)$$

Montrons que, lorsque  $\lambda$  tend vers 0 et  $\sigma_t$  est une constante, on a

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[ -(T - t) X_t - \frac{1}{2} (T - t)^2 \phi_t \right]. \quad (4.23)$$

**Preuve dans le cas du modèle de Ho et Lee (bien plus simple)**

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left( T - \frac{t}{2} \right) + \sigma W_t \text{ et } X_t - \sigma^2 \frac{t^2}{2} = \sigma W_t \quad (4.24)$$

$$\text{donc } f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t T - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + X_t - \sigma^2 \frac{t^2}{2} \quad (4.25)$$

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t (T - t) + X_t \quad (4.26)$$

$$f(t, T) = f(0, T) + \phi_t (T - t) + X_t \text{ car } \phi_t = \sigma^2 t. \quad (4.27)$$

**Remarque 18** *Le modèle est dit "linéaire" car les taux forward instantanés sont des fonctions linéaires (plus exactement affines) de la variable d'état  $X_t$ . On parle de modèles quadratiques lorsque l'on utilise des fonctions quadratiques des variables d'état. De plus,  $(X_t)$  est un processus gaussien et markovien. D'où le nom de LGM.*

Comme  $B(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, u) du)$ , on a

$$B(t, T) = \exp(-\int_t^T f(0, u) du) \exp\left(-\int_t^T e^{-\lambda(u-t)} X_t du - \int_t^T (u-t) \phi_t du\right) \quad (4.28)$$

Calcul des valeurs initiales :  $B(0, T) = \exp(-\int_0^T f(0, u) du)$  donc

$$\exp(-\int_t^T f(0, u) du) = \frac{\exp(-\int_0^T f(0, u) du)}{\exp(-\int_0^t f(0, u) du)} = \frac{B(0, T)}{B(0, t)}. \quad (4.29)$$

**Preuve.** Soit

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left(-\left[(T-t) X_t - \phi_t \left[\frac{1}{2} (u-t)^2\right]_t\right]^T\right) \quad (4.30)$$

$$= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left[-(T-t) X_t - \frac{1}{2} (T-t)^2 \phi_t\right]. \quad (4.31)$$

■

## 4.4 Pricing des swaptions (receveuses)

### 4.4.1 Formule

On suppose que  $\boxed{T = T_0}$ . Pour une swaption **receveuse**, on a

$$\begin{aligned}\pi_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (BF(T) - BV(T))_+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \left( K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) + B(T, T_n) - B(T, T_0) \right)_+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \left( \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) - 1 \right)_+ | \mathcal{F}_t \right],\end{aligned}$$

$$\text{avec } c_j = K(T_j - T_{j-1}) \text{ pour } j = 1 \dots n-1 \text{ et } c_n = 1 + K(T_n - T_{n-1}). \quad (4.32)$$

On veut considérer la probabilité forward de numéraire  $B(t, T)$ .

On a  $B(T, T) = N_T = 1$  et

$$N_t E_{\mathbb{Q}^*} (X | \mathcal{F}_t) = E_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} N_T X | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.33)$$

Ainsi

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \left( \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) - 1 \right)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (4.34)$$

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} B(T, T) \left( \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) - 1 \right)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (4.35)$$

c'est-à-dire

$$\pi_t = B(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left[ \left( \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) - 1 \right)_+ | \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.36)$$

### 4.4.2 Astuce de pricing

Si l'on pose

$$Z_t = \frac{\sum_{j=1}^n c_j B(t, T_j)}{B(t, T)} = \sum_{j=1}^n c_j \frac{B(t, T_j)}{B(t, T)}, \quad (4.37)$$

à  $t = 0$ , on a

$$\frac{\pi_0}{B(0, T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} [(Z_T - 1)_+]. \quad (4.38)$$

$(Z_t)$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}^T$ . Par contre, sa volatilité lognormale est égale à  $\frac{\sum_{j=1}^n c_j \Gamma(t, T_j) B(t, T_j)}{\sum_{j=1}^n c_j B(t, T_j)} - \Gamma(t, T)$ . Dès que  $n \geq 2$ , elle n'est pas déterministe



et on ne peut pas utiliser la formule de Black directement pour évaluer le prix de la swaption.

En fait, on dispose d'une formule quasi-fermée pour le pricing des swaptions.

En effet, la formule de reconstruction permet d'écrire

$$B(t, T) = \Psi_{t, T}(X_t), \quad (4.39)$$

où  $(x \rightarrow \Psi_{t, T}(x))$  est une fonction bijective (strictement décroissante), définie par

$$\Psi_{t, T}(x) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[ -\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} x - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \right)^2 \phi(t) \right]. \quad (4.40)$$

L'argument principal est simple : comme les coefficients  $(c_j)$  sont strictement positifs, la fonction  $(x \rightarrow \sum_{j=1}^n c_j \Psi_{T, T_j}(x))$  est aussi bijective (strictement décroissante). Par conséquent, il existe une **seule** valeur  $x_0$  telle que  $\sum_{j=1}^n c_j \Psi_{T, T_j}(x_0) = 1$ . On note  $K_j = \Psi_{T, T_j}(x_0)$  pour  $1 \leq j \leq n$ .

De plus, on peut exprimer le domaine d'exercice de la swaption de différentes façons

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) \geq 1 \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \Psi_{T, T_j}(X_T) \geq \sum_{j=1}^n c_j \Psi_{T, T_j}(x_0) \right\} = \{X_T \leq x_0\} \\ &= \{ \Psi_{T, T_j}(X_T) \geq \Psi_{T, T_j}(x_0) \} = \{B(T, T_j) \geq K_j\} \text{ pour tout } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le prix de la swaption s'écrit

$$\frac{\pi_0}{B(0, T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left[ \left( \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) - 1 \right)_+ \right] \quad (4.42)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left[ \left( \sum_{j=1}^n c_j B(T, T_j) - \sum_{j=1}^n c_j K_j \right) \mathbf{1}_D \right] \quad (4.43)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left( [B(T, T_j) - K_j] \mathbf{1}_{\{B(T, T_j) \geq K_j\}} \right). \quad (4.44)$$

En adaptant la définition de  $D$  pour chaque  $j$ . Ainsi,

$$\frac{\pi_0}{B(0, T)} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T} \left[ (B(T, T_j) - K_j)_+ \right]. \quad (4.45)$$

Chaque terme ne dépend plus que d'un seul zéro-coupon, on peut maintenant utiliser la formule de Black pour chacun d'entre eux.

$$\frac{\pi_0}{B(0, T)} = \sum_{j=1}^n c_j \text{Black} \left( \frac{B(0, T_j)}{B(0, T)}, K_j, T, \bar{\sigma}^{(j)} \right) \quad (4.46)$$

$$\text{avec } \bar{\sigma}^{(j)} = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\Gamma(s, T_j) - \Gamma(s, T))^2 ds \right]^{1/2}.$$

Comme la recherche de  $x_0$  est numérique, la formule n'est que semi-fermée, en pratique.

## 4.5 Calibration

Tout d'abord, on choisit quels paramètres interviendront dans la calibration et quelle valeur on donnera aux autres. Il est préférable de pas inclure le coefficient  $\lambda$  de retour à la moyenne dans la calibration car le calcul des grecques (dérivées du prix) devient instable.

L'une des méthodes pour déterminer  $\lambda$  est la suivante : on utilise un "back-testing" sur des produits exotiques dont le prix est influencé par  $\lambda$  (option bermudéenne par exemple, c'est-à-dire une option proche d'une option européenne mais qui comporte plusieurs dates possibles d'exercice). On teste plusieurs valeurs de  $\lambda$  en simulant une gestion de portefeuille et on compare, a posteriori, avec les résultats obtenus en réalité.

Dans ce qui suit, on calibre sur les valeurs de  $\sigma_t$ , fonction constante par morceaux, en supposant  $\lambda$  fixé. On utilise des swaptions de maturités respectives  $U_1, \dots, U_N$  (une subdivision adaptée à  $\sigma_t$ ).

$$\sigma_t = \sigma_{k+1} \text{ pour } t \in [U_k; U_{k+1}[ , k = 0 \dots N - 1 \text{ et } U_0 = 0. \quad (4.47)$$

Pour cette étude, on considère les prix à la date  $t = 0$ , plutôt que les volatilités implicites (plus clair).

La volatilité implicite

$VI_1^{\text{modèle}}(\sigma_1)$  de la swaption de maturité  $U_1$  ne dépend que de  $\sigma_1$ . En effet, le prix se calcule avec une intégrale

$$\int_0^{U_1} \sigma_s^2 (\dots) ds = \sigma_1^2 \int_0^{U_1} (\dots) ds. \quad (4.48)$$

Si l'on note  $VI_1^{\text{marché}}$  la volatilité implicite cotée de la swaption de maturité  $U_1$ , on peut obtenir la valeur de  $\sigma_1$ , en exploitant l'égalité

$$VI_1^{\text{modèle}}(\sigma_1) = VI_1^{\text{marché}}. \quad (4.49)$$

Par des méthodes numériques très simples, les résultats obtenus seront précis et rapides car on ne recherche qu'**une valeur**.

A la deuxième étape, on utilise le fait que la volatilité implicite  $VI_2^{\text{modèle}}(\sigma_1, \sigma_2)$  du produit de maturité  $U_2$  ne dépend que de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$  car on calcule

$$\int_0^{U_2} \sigma_s^2 (\dots) ds = \sigma_1^2 \int_0^{U_1} (\dots)^2 ds + \sigma_2^2 \int_{U_1}^{U_2} (\dots)^2 ds \quad (4.50)$$

Sachant que l'on a trouvé la valeur de  $\sigma_1$  lors de l'étape précédente, il reste à déterminer  $\sigma_2$  grâce à l'égalité suivante

$$VI_2^{\text{modèle}}(\sigma_1, \sigma_2) = VI_2^{\text{marché}}. \quad (4.51)$$

Et ainsi de suite. A chaque étape, on ne détermine donc qu'une valeur (technique de bootstrapping).

**Remarque 19** *Il est tout de même très important d'utiliser des valeurs initiales bien choisies. Les praticiens disposent de plusieurs méthodes à ce propos. C'est un problème non négligeable de la calibration.*

En bref, on peut considérer la calibration du modèle LGM un facteur comme quasiment exacte, lorsque  $\lambda$  est fixé.

## 4.6 Conclusion

Il ne permet pas de prendre en compte les corrélations entre les taux de différentes maturités. Les modèles multifactoriels sont plus lourds à manipuler et sont peu utilisés.

# Chapitre 5

## Le modèle BGM

### 5.1 Présentation

En 1997, **B**race, **G**atarek et **M**usiela ont présenté un modèle pour les taux forward, nommé LMM (Libor Market Model), LFM (Lognormal Forward Model) ou encore BGM. Dans ce modèle, les volatilités lognormales des taux forward sont déterministes et on calcule directement la volatilité implicite des caplets.

Dans le même ordre d'idée, Jamishidian a présenté un modèle pour les taux swap, la même année SMM (Swap Market Model) ou LSM (Lognormal Swap Model). Dans ce modèle, on obtient directement la volatilité implicite d'une swaption.

Ces approches ne sont pas compatibles car on ne peut pas supposer simultanément que les volatilités des taux swap et des taux forward sont déterministes. C'est pourquoi, dans BGM, on utilise une méthode d'approximation pour la volatilité implicite des swaptions.

On suppose que l'on a choisi un échéancier.

$$0 \leq T_0 < T_1 \dots < T_n \leq \hat{\tau}. \quad (5.1)$$

$\{F\}$  désigne l'ensemble des taux forward définis le long de cet échéancier ( $n$  taux forward donc), voir figure 5.1 pour une illustration.

On pose  $a_j = T_{j+1} - T_j$ , ainsi  $F_j(t)$  vérifie

$$1 + a_j F_j(t) = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})}. \quad (5.2)$$

On doit modéliser  $n$  taux forward qui forment un système de rang  $d \leq n$ , selon les corrélations entre ces taux forward. On considère un brownien  $\left(\vec{Z}_t\right)$ ,

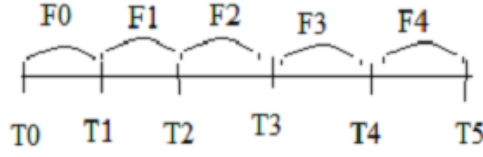


FIGURE 5.1 – Illustration de l'échéancier et des taux forward. Crédits : S. Hénon.

de dimension  $d$  et on pose

$$\text{sous } \mathbb{Q}, \frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \mu_j(\{F\}, t)dt + \gamma(t, T_j) \vec{\beta}_j \cdot d\vec{Z}_t$$

$$\text{avec } \vec{\beta}_j \cdot \vec{\beta}_j = 1 \text{ et } \vec{\beta}_j \cdot \vec{\beta}_k = \rho_{jk}$$

où  $\rho_{kj}$  est la corrélation instantanée entre le  $j$ ème et le  $k$ ème forward.

- Le point est un produit scalaire.
- $\gamma$  est déterministe, ne s'annule pas et  $\gamma$  est de carré intégrable.
- $\vec{\beta}_j$  est un vecteur de dimension  $d$ .
- La matrice de corrélation est  $[\rho_{jk}]_{j,k \in \{0 \dots n-1\}}$ .

**Remarque 20** *Il est courant de choisir  $d = 3$  (on parle de modèles 3 facteurs). En effet, la technique de l'ACP indique que le nombre 3 est un bon compromis entre la précision et l'efficacité du modèle. Trop de facteurs compliquent les calculs, peu de facteurs ne permettent pas de rendre compte de la réalité des marchés.*

**A propos des caplets :** on considère un caplet de maturité  $T_j$ , de date de paiement  $T_{j+1}$  et de strike  $K$ .  $F_j$  est le sous-jacent. Le modèle BGM est bien un modèle de marché pour les caplets. En effet, sous  $\mathbb{Q}^{T_{j+1}}$ ,  $(F_j)$  est une martingale, de volatilité lognormale  $\gamma(t, T_j) \vec{\beta}_j$ . Elle est déterministe, ne s'annule pas et de carré intégrable sur  $[0, \hat{\tau}]$  donc on peut calculer **directement** la volatilité implicite du caplet.

On rappelle que la maturité est  $T_j$  :

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \left\| \gamma(s, T_j) \vec{\beta}_j \right\|^2 ds = \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \gamma(s, T_j)^2 (\vec{\beta}_j \cdot \vec{\beta}_j) ds = \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \gamma(s, T_j)^2 ds. \quad (5.3)$$

## 5.2 Calcul du drift d'un taux forward sous une probabilité forward

Pour plus de lisibilité, on suppose que l'on travaille en **dimension d=1** (chaque  $\beta_j$  est égal à 1).

On veut calculer  $\frac{dF_j(t)}{F_j(t)}$  sous  $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ .

Sachant que  $F_j$  est une  $\mathbb{Q}^{T_{j+1}}$ -martingale, on a

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \gamma(t, T_j) dZ^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}}. \quad (5.4)$$

**Exercice :**

1. Exprimer le brownien  $Z^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}}$  en fonction de  $Z$ , brownien sous  $\mathbb{Q}$ . La probabilité forward  $\mathbb{Q}^{T_{j+1}}$  est associée au numéraire  $B(t, T_{j+1})$ , de volatilité  $\Gamma(t, T_{j+1})$  donc

$$Z_t^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}} = Z_t - \int_0^t \Gamma(s, T_{j+1}) ds. \quad (5.5)$$

2. Exprimer le brownien  $Z^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}}$  en fonction de  $Z_t^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}}$ , brownien sous  $\mathbb{Q}^{T_{j+1}}$ . La probabilité forward  $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$  est associée au numéraire  $B(t, T_{k+1})$ , de volatilité  $\Gamma(t, T_{k+1})$  donc

$$Z_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} = Z_t - \int_0^t \Gamma(s, T_{k+1}) ds. \quad (5.6)$$

En combinant les deux égalités, on obtient

$$Z_t^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}} = Z_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} + \int_0^t (\Gamma(s, T_{k+1}) - \Gamma(s, T_{j+1})) ds. \quad (5.7)$$

3. En déduire la dynamique de  $F_j(t)$  sous  $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ .

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \gamma(t, T_j) (\Gamma(t, T_{k+1}) - \Gamma(t, T_{j+1})) dt + \gamma(t, T_j) dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} \quad (5.8)$$

Dans la suite, on va exprimer  $\Gamma(t, T_j)$  en fonction de  $F_j$  et  $\gamma$ .

4. Redonner la dynamique de  $\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})}$  sous  $\mathbb{Q}^{T_{j+1}}$ .

$$d\left(\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})}\right) = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} (\Gamma(t, T_j) - \Gamma(t, T_{j+1})) dZ^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}}. \quad (5.9)$$

On reprend la définition des taux forward,

$$1 + a_j F_j(t) = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})}. \quad (5.10)$$

(5.9) devient

$$\begin{aligned} d(1 + a_j F_j(t)) &= (1 + a_j F_j(t)) (\Gamma(t, T_j) - \Gamma(t, T_{j+1})) dZ^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}} \\ a_j dF_j(t) &= (1 + a_j F_j(t)) (\Gamma(t, T_j) - \Gamma(t, T_{j+1})) dZ^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ou encore

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \frac{1 + a_j F_j(t)}{a_j F_j(t)} (\Gamma(t, T_j) - \Gamma(t, T_{j+1})) dZ^{\mathbb{Q}^{T_{j+1}}}. \quad (5.12)$$

En comparant avec (5.4), on obtient

$$\gamma(t, T_j) = \frac{1 + a_j F_j(t)}{a_j F_j(t)} (\Gamma(t, T_j) - \Gamma(t, T_{j+1})) \quad (5.13)$$

ou encore

$$\Gamma(t, T_j) - \Gamma(t, T_{j+1}) = \frac{a_j F_j(t) \gamma(t, T_j)}{1 + a_j F_j(t)}. \quad (5.14)$$

5. Si  $j > k$ , on peut transformer

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \gamma(t, T_j) (\Gamma(t, T_{k+1}) - \Gamma(t, T_{j+1})) dt + \gamma(t, T_j) dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} \quad (5.15)$$

en

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \gamma(t, T_j) \sum_{i=k+1}^j [\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_{i+1})] dt + \gamma(t, T_j) dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} \quad (5.16)$$

6. Et d'après la conclusion qui précède, on a

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \left( \gamma(t, T_j) \sum_{i=k+1}^j \frac{a_i F_i(t) \gamma(t, T_i)}{1 + a_i F_i(t)} \right) dt + \gamma(t, T_j) dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}}. \quad (5.17)$$

7. De même, si  $j < k$ ,

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \left( -\gamma(t, T_j) \sum_{i=j+1}^k \frac{a_i F_i(t) \gamma(t, T_i)}{1 + a_i F_i(t)} \right) dt + \gamma(t, T_j) dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_n}}. \quad (5.18)$$

**On peut donc calculer le drift d'un taux forward, sous n'importe quelle probabilité forward.**

Dans un modèle à plusieurs facteurs, le coefficient de corrélation apparaît

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \left( \sum_{i=k+1}^j \frac{a_i F_i(t) \rho_{ij} \gamma(t, T_i) \gamma(t, T_j)}{1 + a_i F_i(t)} \right) dt + \gamma(t, T_j) \vec{\beta}_j \cdot d\vec{Z}_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}}. \quad (5.19)$$

**Remarque 21** *On ne connaît pas explicitement la solution de l'EDS définissant  $F_j$  sous une autre probabilité forward que la sienne. De plus, le processus  $F_j$  n'est pas markovien. On peut toujours faire l'approximation d'un drift gelé ( $t = 0$  dans les coefficients) et dans ce cas, on peut calculer chaque  $F_j$  par une formule fermée et le modèle devient markovien. Il existe des techniques plus élaborées d'approximation du drift (ex : "predictor-corrector").*

## 5.3 Mise en place du modèle

### 5.3.1 Volatilités instantanées

Pour éviter un problème de la surparamétrisation, on adopte en général une structure **paramétrique** (i.e. fonctionnelle). Par exemple, en considérant que la volatilité ne dépend que du time to maturity  $T - t$  au lieu des deux variables de temps la maturité  $T$  et l'instant de pricing  $t$ , on a

$$\gamma(t, T_k) = \psi_k [(a(T_k - t) + d) e^{-b(T_k - t)} + c] \quad (5.20)$$

- $\psi_k$  est la structure à terme de la volatilité.
- Les paramètres sont  $a, b, c, d$  et les  $(\psi_k)$  pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

### 5.3.2 Structure de corrélation

**Pourquoi a-t'on besoin de corrélation ?**

- Les taux sont naturellement corrélés (mais pas totalement). En exemple, les corrélations entre taux interbancaires.
- Dès que l'on manipule plusieurs sous-jacents, il faut travailler sous une même probabilité. Or, dans ce cas, le modèle BGM fait apparaître des corrélations dans les drifts des  $F_j(t)$ . On rappelle que

$$\text{si } j > k \text{ alors } \frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \left( \sum_{i=k+1}^j \frac{a_i F_i(t) \rho_{ij} \gamma(t, T_i) \gamma(t, T_j)}{1 + a_i F_i(t)} \right) dt + \gamma(t, T_j) \vec{\beta}_j \cdot d\vec{Z}_t^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} \quad (5.21)$$

Ainsi, le drift de  $F_j$  dépend des corrélations entre  $F_j$  et d'autres forward.



## Matrice de corrélation et Analyse en Composantes Principales

On adopte aussi une forme paramétrique (une fonction comportant des paramètres) et on effectue une réduction de rang. Comme une matrice de corrélation est symétrique (donc diagonalisable), on ne conserve que ses trois valeurs propres les plus grandes (on explique plus de 95 % de la matrice d'après l'ACP). Deux approches : Carol Alexander ou Coffey et Schoenmakers.

### 5.3.3 Volatilité implicite des swaptions

Dans le modèle BGM standard, on peut calculer directement les volatilités implicites des caplets. Pour les swaptions, on cherche une formule d'approximation de leur volatilité implicite .

On considère donc une swaption de maturité  $T$  et  $(S_t)$  le taux swap correspondant. Pour que le calcul direct de la volatilité implicite soit possible, il faut que  $(S_t)$  ait une volatilité lognormale déterministe. C'est à cette situation que l'on va se ramener, grâce à des approximations.

A  $t$  fixé, on exprime  $S_t$  comme une combinaison linéaire de taux forward avec des coefficients simples, dépendants des ZC.

$$S_t = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{j=1}^n a_{j-1} B(t, T_j)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_{j-1} B(t, T_j)} \sum_{k=1}^n (B(t, T_{k-1}) - B(t, T_k)). \quad (5.22)$$

Comme

$$F_{k-1}(t) = \frac{B(t, T_{k-1}) - B(t, T_k)}{a_{k-1} B(t, T_k)}, \quad (5.23)$$

$$S_t = \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_{j-1} B(t, T_j)} \sum_{k=1}^n a_{k-1} B(t, T_k) F_{k-1}(t). \quad (5.24)$$

Autrement dit,

$$S_t = \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(t) F_{k-1}(t) \text{ avec } \omega_{k-1}(t) = \frac{a_{k-1} B(t, T_k)}{\sum_{j=1}^n a_{j-1} B(t, T_j)}. \quad (5.25)$$

On peut alors faire l'**approximation 1** (en "gelant" les coefficients)

$$S_t \simeq \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(0) F_{k-1}(t) \quad (5.26)$$

dans laquelle le taux swap devient une combinaison linéaire de taux forward. On veut rendre déterministe la volatilité lognormale de  $S_t$ . Sous  $\mathbb{Q}^S$ ,  $(S_t)$  est une martingale, donc on ne considère que la partie brownienne :

$$dS_t \simeq \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(0) \gamma(t, T_{k-1}) F_{k-1}(t) dZ^{\mathbb{Q}^S}. \quad (5.27)$$

En version lognormale,

$$\frac{dS_t}{S_t} \simeq \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(0) \gamma(t, T_{k-1}) \frac{F_{k-1}(t)}{S_t} dZ^{\mathbb{Q}^S} \quad (5.28)$$

### Approximation 2.

Les volatilités lognormales intervenant dans la dynamique de  $S_t$  doivent être déterministes, c'est pourquoi on va geler les coefficients stochastiques.

$$\frac{dS_t}{S_t} \simeq \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(0) \gamma(t, T_{k-1}) \frac{F_{k-1}(0)}{S_0} dZ^{\mathbb{Q}^S} \quad (5.29)$$

Les volatilités lognormales sont bien de carré intégrable. La volatilité implicite  $v_I$  de la swaption de maturité  $T$  se calcule par

$$v_I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(0) \gamma(s, T_{k-1}) \frac{F_{k-1}(0)}{S_0} \right]^2 ds \quad (5.30)$$

Ce qui peut se développer ainsi

$$v_I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=1}^n \omega_{k-1}(0) \gamma(s, T_{k-1}) \frac{F_{k-1}(0)}{S_0} * \sum_{j=1}^n \omega_{j-1}(0) \gamma(s, T_{j-1}) \frac{F_{j-1}(0)}{S_0} \right] ds, \quad (5.31)$$

soit

$$v_I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j,k=1}^n \omega_{k-1}(0) \omega_{j-1}(0) \frac{F_{k-1}(0) F_{j-1}(0)}{S_0^2} \gamma(s, T_{k-1}) \gamma(s, T_{j-1}) ds. \quad (5.32)$$

Ainsi, la formule suivante, dite de Rebonato, permet d'approcher la volatilité implicite d'une swaption

$$v_I^2 = \frac{1}{T} \sum_{j,k=1}^n \omega_{k-1}(0) \omega_{j-1}(0) \frac{F_{k-1}(0) F_{j-1}(0)}{S_0^2} \int_0^T \gamma(s, T_{k-1}) \gamma(s, T_{j-1}) ds. \quad (5.33)$$

### Conclusion

- Dans un cadre multidimensionnel, on doit rajouter le coefficient de corrélation  $\rho_{j-1k-1}$  dans l'intégrale. Les swaptions sont très sensibles à la valeurs de ce coefficient.

- L'approximation obtenue est satisfaisante. En effet, cette formule repose sur l'idée que les taux swap suivent une dynamique proche de la lognormalité. On peut vérifier que cette hypothèse est cohérente avec la réalité.
- Deux autres formules, un peu plus précises, font partie des classiques : Hull & White (adaptée aux maturités moyennes et longues) et Andersen & Andreasen (adaptée aux maturités courtes). En fait, on a du mal à trouver une formule pour l'ensemble de la matrice des swaptions.
- Plus généralement, il est dommage de faire des approximations dès le calcul du prix des swaptions (au niveau de la calibration et avant le pricing des exotiques).

### 5.3.4 Calibration

On commence par donner une valeur initiale à chaque paramètre, souvent grâce à des techniques spécifiques à chaque établissement (approximations en simplifiant les modèles à l'extrême par exemple).

Calibration en boucle :

- les paramètres de volatilité  $a, b, c, d$  sur les caps ATM du set.
  - les paramètres de corrélation sur les swaptions du set.
  - la structure à terme de la volatilité ( $\psi_k$  pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ), par bootstrap sur les caps et les swaptions ATM.
- etc...

### 5.3.5 Conclusion

L'utilisation rigoureuse de BGM mène à des calculs très complexes et il est souvent nécessaire de recourir à des approximations pour conserver un temps de calcul raisonnable. Par contre, il permet de modéliser la corrélation entre les taux.

# Chapitre 6

## Modèle SABR

SABR est un acronyme de l'anglais "Stochastic Alpha Beta Rho", un modèle introduit par Hagan et ses collaborateurs dans un article de recherche en 2001.

### 6.1 Définition d'un modèle à volatilité stochastique

Dans le domaine des actions, on dispose du modèle de Black and Scholes dans lequel la volatilité  $\sigma$  est une constante. Pour pouvoir reproduire les smiles du marché, il a fallu complexifier  $\sigma$ , en le voyant comme une fonction déterministe du temps et du sous-jacent  $\sigma(t, S_t)$ . Ce sont les modèles à volatilité locale (ou de Dupire). Dans ce cas, la volatilité n'est plus déterministe mais elle est totalement corrélée au sous-jacent. *En observant les trajectoires de volatilité, on comprend que ce processus n'est pas totalement corrélé avec le sous-jacent et que donc cela a un sens de modéliser la volatilité comme un processus stochastique à part entière, sans se limiter à des fonctions déterministes de sous-jacent.*

En pratique, on réserve le terme de "volatilité stochastique" aux modèles dans lesquels la volatilité admet sa propre dynamique, dirigée par un autre brownien, non totalement corrélé avec celui qui est utilisé pour définir le sous-jacent.

Dans ce cas, le marché est **incomplet**, c'est-à-dire que l'on ne peut pas couvrir tous les risques de marché en proposant une couverture basée uniquement sur la vente et l'achat de sous-jacent. On a rajouté un risque dit de volatilité.

**Remarque 22** *Lorsque le marché est incomplet, il existe une infinité de*

probabilités martingales ! Sans rentrer dans les détails théoriques, on choisit, grâce à la calibration, une de ces probabilités pour être la probabilité de pricing  $\mathbb{Q}$  et on se ramène à un cadre proche d'un marché complet. Les probabilités forward sont obtenues à partir de la probabilité martingale  $\mathbb{Q}$ . De plus, on adopte une couverture en delta neutre, complétée par une option européenne, laquelle permet de gérer le risque de volatilité.

Dans ce type de modèle, il est souvent difficile de donner rapidement un prix précis aux options vanilles (pour une calibration efficace). La grande force de SABR est de fournir une formule **fermée** très simple donnant la volatilité implicite (approchée) d'une option européenne. De même, Heston fut le premier à proposer une méthode de pricing efficace, basée sur les transformées de Fourier.

## 6.2 Présentation de SABR

C'est un modèle de marché : on modélise un sous-jacent unique, noté  $F$ , taux forward ou taux swap sous la probabilité qui le rend martingale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_t}{F_t} = \alpha_t F_t^{\beta-1} dW_t \quad , \quad F_0 \text{ donné} \\ \frac{d\alpha_t}{\alpha_t} = \nu dB_t \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \alpha \end{array} \right.$$

- \*  $d \langle W, B \rangle_t = \rho dt$  avec  $\rho \in ]-1; 1[$
- \*  $\beta \in [0; 1]$  et  $\nu > 0$

- $(\alpha_t)$  suit un modèle lognormal.
- $\rho \neq 1$  et  $\rho \neq -1$  pour que les deux browniens  $(W_t)$  et  $(B_t)$  ne soient pas totalement corrélés.
- Si  $\beta = 0$ , la dynamique de  $F$  est normale et si  $\beta = 1$ , la dynamique de  $F$  est lognormale.

## 6.3 Résultat de pricing

Le grand intérêt de ce modèle est de fournir une formule fermée, mais approchée, pour la **volatilité implicite** d'un call sur le sous-jacent  $F$ . On note  $T$  sa maturité,  $K$  son strike et  $\sigma_B(F_0, K)$  la volatilité implicite associée à ce call.

Cette formule a été élaborée à l'aide d'un travail sur les EDP (Feynman-KAC). On notera que la formule n'est valable que pour des options qui ne

sont pas trop hors-la-monnaie. En particulier, les strikes faibles (fréquents en cette période où les taux sont bas) conduisent à des "densités" négatives.

Voici la formule de pricing pour le modèle SABR, à la date  $t = 0$ . Pour  $F_0 \neq K$ , la volatilité implicite associée au call de maturité  $T$ , de strike  $K$ , est approchée, à l'ordre 2 en  $\alpha$ , par :

$$\sigma_B(F_0, K) \approx \frac{\alpha}{\sqrt{F_0 K}^{(1-\beta)}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2 \ln(\frac{F_0}{K})^2}{24} + \frac{(1-\beta)^4 \ln(\frac{F_0}{K})^4}{1920} + \dots}$$

$$\times \frac{y}{\ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho y + y^2} - \rho + y}{1-\rho}\right)} \left[ 1 + \alpha^2 \left[ \left( \frac{(\beta-1)^2}{24\sqrt{F_0 K}^{(2-2\beta)}} + \frac{\rho\nu\beta}{4\alpha\sqrt{F_0 K}^{1-\beta}} \right) T \right] \right] \quad (6.4)$$

$$\text{avec } y = \frac{\nu}{\alpha} (F_0 K)^{(1-\beta)/2} \ln(F_0/K) \quad (6.5)$$

A la monnaie, on utilise :

$$\sigma_{ATM} \approx \frac{\alpha}{F_0^{1-\beta}} \left( 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{F_0^{2-2\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\nu\alpha\beta}{F_0^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T \right). \quad (6.6)$$

## 6.4 Rôles des paramètres

On étudie les impacts des paramètres sur la courbe de volatilités implicites pour définir un processus de calibration efficace.

On considère un caplet sur taux Euribor 6 mois, de maturité 7 ans (de sous-jacent  $F(t, 7, 7.5)$  noté  $F$ ). La valeur initiale du taux est  $F_0 = 5.83\%$ . Dans la suite, les valeurs par défaut sont

$$\alpha = 0.04, \nu = 0.5, \rho = -0.015, \beta = 0.5. \quad (6.7)$$

On représente en figure 6.1 le smile, c'est-à-dire la fonction ( $K \rightarrow \sigma_B(F_0, K)$ ). On trouve le strike en abscisse et la volatilité implicite donnée en %, en ordonnée.

Dans les courbes distribuées, on identifie trois rôles distincts pour  $\alpha$ ,  $\rho$  et  $\nu$ . Quant au **coefficient**  $\beta$ , il est une des causes du skew.

## 6.5 Tests de calibration

### 6.5.1 Choix des paramètres de calibration

$\beta$  et  $\rho$  ont le même impact sur la courbe des volatilités. Ils risquent de se concurrencer lors de la minimisation, on parle de modèle **surparamétré** pour

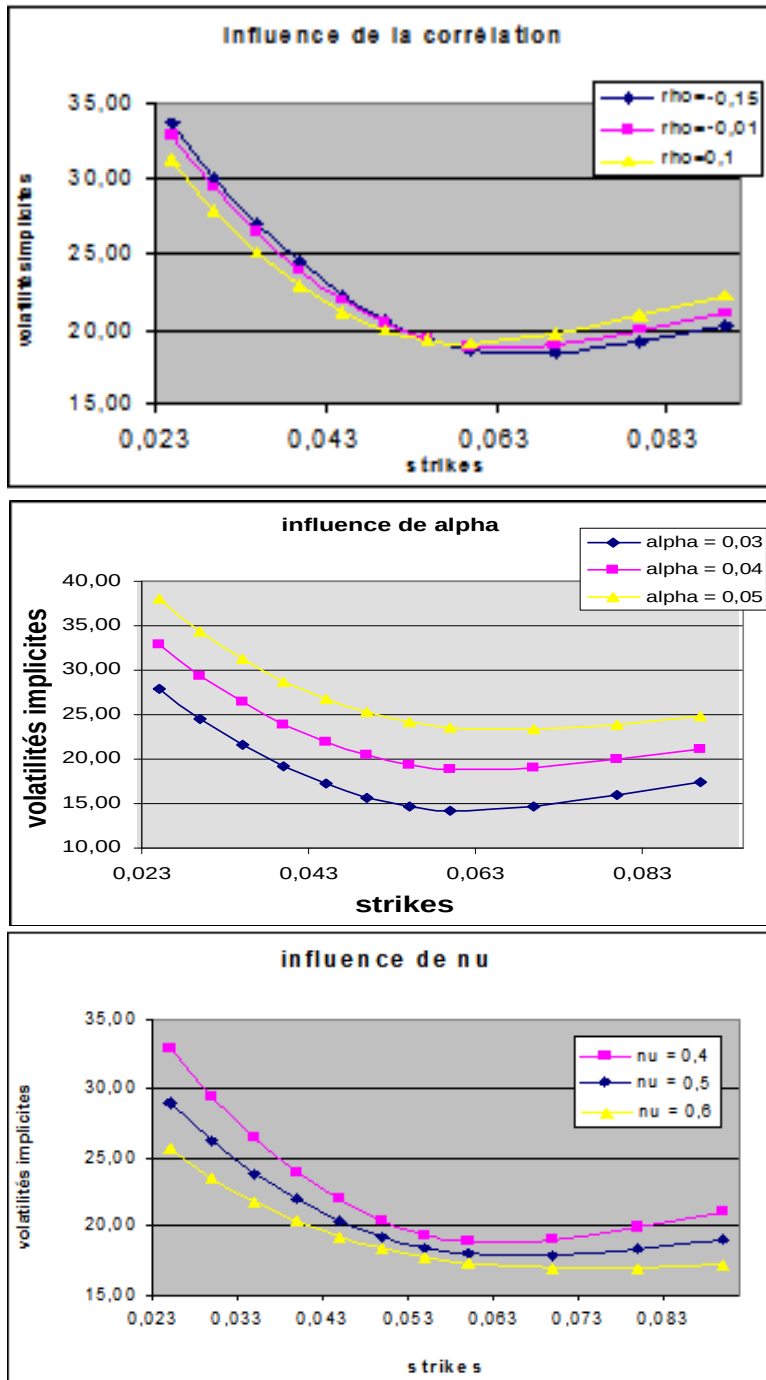


FIGURE 6.1 – Modèle SABR : influence des paramètres :  $\rho$  a un impact sur le skew,  $\alpha$  influe sur la valeur de la volatilité ATM, i.e., sur le niveau de la courbe ;  $\nu$  détermine le degré de convexité (et influence légèrement le niveau de la courbe). Crédits : S. Hénon.

qualifier cette situation. Pour l'éviter, on élimine  $\beta$  de la calibration. Ainsi, comme chaque paramètre  $(\alpha, \rho, \nu)$  joue un rôle précis, les valeurs déterminées par calage seront stables.

Pour choisir la valeur de  $\beta$ , on considère trois valeurs différentes et pour chacune de ces valeurs, on calibre le modèle en ne modifiant que  $\alpha, \rho$  et  $\nu$ . On compare alors la qualité des calibrations pour décider de la valeur de  $\beta$  la plus appropriée. D'un point de vue qualitatif, on s'inspire de l'idée a priori que l'on a sur l'évolution de l'actif. Suit-il un modèle normal ( $\beta = 0$ ), lognormal ( $\beta = 1$ ), etc... ? Une autre méthode est d'utiliser les quelques cotations de produits CMS.

## 6.5.2 Processus de calibration

Le sous-jacent considéré est un taux Euribor 6 mois (taux forward). A maturité fixée, sur le marché, on connaît la valeur des volatilités implicites pour  $N$  caplets, sur ce sous-jacent, de strikes différents  $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$ . Ici, les 11 valeurs des strikes varient de 2,5% à 9%.

**Le processus de calibration consiste à minimiser la fonction**

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (VI^{modèle}(K_i, \alpha, \rho, \nu) - VI^{marché}(K_i))^2, \quad (6.8)$$

**en jouant sur les valeurs des paramètres  $\alpha, \rho$  et  $\nu$ .**

$\lambda_i$  correspond à une pondération particulière, qui permet d'ajuster plus précisément les valeurs autour de la monnaie. Par exemple, à la monnaie, on prend  $\lambda_i = 20$  et pour les deux dates autour de la monnaie, on prend  $\lambda_i = 10$ .

### Conclusion

- La précision d'ajustement est bonne (on peut générer la plupart des formes de smile observées sur le marché), sauf pour les maturités très courtes.
- Grâce à cette précision, le modèle SABR fournit un **outil d'interpolation du smile**. En effet, si l'on dispose de deux valeurs de volatilités, on aimerait pouvoir calculer n'importe quelle valeur située entre ces deux références, ce que permet de faire SABR. Le résultat est une courbe possédant d'excellentes propriétés de régularité. Il est facile de rajouter les outils SABR à un modèle déjà implémenté.
- Pour chaque sous-jacent, on définit un modèle SABR, par la donnée de quatre paramètres  $\alpha, \beta, \rho$  et  $\nu$ . Grâce à la formule de pricing SABR, on peut calculer la volatilité implicite associée à n'importe quel call sur ce sous-jacent. Ainsi, on agrège les risques au niveau des strikes : pour un sous-jacent donné, on peut résumer toutes les données des volatilités



implicites (à strikes différents donc), à l'aide de quatre paramètres uniquement.

- Par contre, en tant que modèle de taux, SABR présente beaucoup de défauts : difficulté pour changer de probabilité, propriétés du sous-jacent limitées (par exemple, ce n'est pas toujours une vraie martingale), densité négative (!)...Mais la recherche continue.

# Chapitre 7

## Modèle d'Heston

S'applique pour différents sous-jacents. C'est le premier modèle vraiment pertinent à volatilité stochastique et il est encore largement utilisé aujourd'hui. Un problème important dans les modèles à volatilité stochastique est de trouver une formule de pricing pour les vanilles. En 1993, Heston propose de calculer une fonction caractéristique, associée au modèle puis d'en déduire le prix d'un call, en utilisant des transformées de Fourier inverses. Cette méthode de calcul a été généralisée pour les modèles dits affines et permet de déterminer toutes sortes d'espérances. Le smile généré est considéré comme satisfaisant par les praticiens.

### 7.1 Présentation

On se place dans cadre simple, avec comme sous-jacent une action dont le prix est donné par  $S_t$ . Dans ce cadre, l'actualisation entre la date 0 et la date  $t$  correspond à multiplier l'actif par  $e^{-rt}$ . On note  $v_t$  la variance (à une constante près).

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \gamma\sqrt{v_t}dW_t. \quad (7.1)$$

$(v_t)$  suit un modèle CIR.

$$dv_t = (a - bv_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t. \quad (7.2)$$

Les constantes  $\gamma$  et  $\sigma$  sont strictement positives.  $W$  et  $B$  sont des browniens de coefficient de corrélation  $\rho \in ]-1, 1[$ .

On pose  $X_t = \ln \tilde{S}_t$  car cette modélisation permet de manipuler un modèle affine.

**Exercice** : calculer la dynamique de  $(X_t)$ . On rappelle que

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left( \int_0^t \gamma \sqrt{v_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2 v_s ds \right). \quad (7.3)$$

Donc

$$X_t = \ln S_0 + \int_0^t \gamma \sqrt{v_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2 v_s ds \quad (7.4)$$

$$\text{ou encore } dX_t = \gamma \sqrt{v_t} dW_t - \frac{1}{2} \gamma^2 v_t dt. \quad (7.5)$$

Sous  $\mathbb{Q}$ , on a

$$dX_t = (\alpha - \beta v_t) dt + \gamma \sqrt{v_t} dW_t \text{ avec } \alpha = 0 \text{ et } \beta = \frac{\gamma^2}{2}. \quad (7.6)$$

En résumé, on manipule le système suivant

$$\begin{cases} dX_t = (\alpha - \beta v_t) dt + \gamma \sqrt{v_t} dW_t \\ dv_t = (a - bv_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_t \end{cases}. \quad (7.7)$$

## 7.2 Calcul du prix d'une européenne

### 7.2.1 Fonction caractéristique

Une fonction caractéristique associée au modèle est définie par

$$f(x, v, t, T; \phi) = \mathbb{E} [e^{i\phi X_T} | X_t = x, v_t = v] \quad (7.8)$$

Plus exactement, on peut montrer que

$$\mathbb{E} [e^{i\phi X_T} | \mathcal{F}_t] = u(t, X_t, v_t) \text{ et on évalue } u(t, x, v) = f(x, v, t, T; \phi). \quad (7.9)$$

*Remarque* : on a la condition terminale

$$f(x, v, T, T; \phi) = \mathbb{E} [e^{i\phi X_T} | X_T = x, v_t = v] = e^{i\phi x}. \quad (7.10)$$

Le résultat issu de la théorie des modèles affines est le suivant : on peut écrire  $f$  comme une exponentielle de fonctions déterministes

$$f(x, v, t, T; \phi) = e^{C(\phi, T-t) + D(\phi, T-t)v + E(\phi, T-t)x} = u(t, x, v) \quad (*) \quad (7.11)$$

La condition terminale devient

$$e^{C(\phi, 0) + D(\phi, 0)v + E(\phi, 0)x} = e^{i\phi x}. \quad (7.12)$$

Soit

$$C(\phi, 0) = 0, \quad D(\phi, 0) = 0 \quad \text{et} \quad E(\phi, 0) = i\phi. \quad (7.13)$$

Pour la calculer, on va s'intéresser aux ODE (équations différentielles ordinaires) vérifiées par un processus de la forme

$$u(t, X_t, v_t), \quad \text{à } \phi \text{ fixé.} \quad (7.14)$$

On va utiliser la formule de Feynman-Kac pour déterminer ces ODE. Il faut donc calculer le drift de  $u$  avec la formule d'Itô :

$$d[u(t, X_t, v_t)] = \left( \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha - \beta v) \frac{\partial u}{\partial x} + (a - bv) \frac{\partial u}{\partial v} \\ + \frac{1}{2} (\gamma^2 v) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\rho\gamma\sigma v) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} (\sigma^2 v) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \end{array} \right) (t, X_t, v_t) dt + (\dots) dB_t + (\dots) dW_t. \quad (7.15)$$

$(\mathbb{E}[e^{i\phi X_T} | \mathcal{F}_t])_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale (l'intégrabilité est obtenue car les f.c. existent toujours) donc ce drift est nul. On a donc

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha - \beta v) \frac{\partial u}{\partial x} + (a - bv) \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\gamma\sigma v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \right) (t, x, v) = 0. \quad (7.16)$$

En utilisant la forme (\*), on peut déduire les ODE vérifiées par les fonctions  $C, D$  et  $E$ . Par exemple, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, v) = E(\phi, T-t) \cdot e^{C(\phi, T-t) + D(\phi, T-t)v + E(\phi, T-t)x}. \quad (7.17)$$

On obtient donc

$$(-C' - \nu D' - xE')f + (\alpha - \beta v)Ef + (a - bv)Df + \frac{1}{2}\gamma^2 v E^2 f + \rho\gamma\sigma v DEf + \frac{1}{2}\sigma^2 v D^2 f = 0 \quad (7.18)$$

où  $E'$  correspond à la dérivée de  $(s \rightarrow E(\phi, s))$ .

On simplifie par  $f$  et on sépare les termes en trois groupes, selon s'ils comptent  $x, v$  ou une constante en facteur.

$$[-C' + \alpha E + aD] + \nu \left[ -D' + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - bD + \rho\gamma\sigma DE - \beta E + \frac{1}{2}\gamma^2 E^2 \right] + x[-E'] = 0. \quad (7.19)$$

Si l'on suppose que  $x = v = 0$ , on obtient que

$$-C' + aD + \alpha E = 0. \quad (7.20)$$

Avec cette information, l'égalité devient

$$\nu \left[ -D' + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - bD + \rho\gamma\sigma DE - \beta E + \frac{1}{2}\gamma^2 E^2 \right] + x[-E'] = 0. \quad (7.21)$$

Dans cette égalité,

— si l'on suppose que  $\nu = 0$  et  $x = 1$ , on obtient que

$$-E' = 0. \quad (7.22)$$

Comme  $E(\phi, 0) = i\phi$ , on a donc

$$E(\phi, T - t) = i\phi. \quad (7.23)$$

— si l'on suppose que  $\nu = 1$  et  $x = 0$ , on obtient que

$$-D' + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - bD + \rho\gamma\sigma DE - \beta E + \frac{1}{2}\gamma^2 E^2. \quad (7.24)$$

En conclusion,

$$D' = \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + D[i\phi\rho\gamma\sigma - b] - i\beta\phi - \frac{1}{2}\gamma^2\phi^2 \text{ et } D(\phi, 0) = 0$$

$$C' = aD + E \text{ et } C(\phi, 0) = 0$$

L'équation vérifiée par  $D$  est une équation de Riccati à coefficients constants du type

$$D' = \lambda D^2 + \mu D + \varepsilon. \quad (7.25)$$

Elle se résout en notant  $\delta$  une racine (éventuellement complexe) du polynôme  $\lambda X^2 + \mu X + \varepsilon$ . On pose alors  $G = 1/(D - \delta)$ .  $G$  est solution d'une ODE de la forme  $G' = \tilde{a}G + \tilde{b}$  que l'on sait résoudre. Il est facile de trouver  $C$  quand on connaît  $D$ , à partir de

$$C' = aD + i\phi \text{ et } C(\phi, 0) = 0. \quad (7.26)$$

**Résultats :**

$$C(\phi, T - t) = \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b - i\phi\rho\gamma\sigma + d)(T - t) - 2 \ln \left( \frac{1 - ge^{d(T-t)}}{1 - g} \right) \right] \quad (7.27)$$

$$D(\phi, T - t) = \frac{b - i\phi\rho\gamma\sigma + d}{\sigma^2} \left( \frac{1 - ge^{d(T-t)}}{1 - e^{d(T-t)}} \right) \quad (7.28)$$

$$\text{avec } g = \frac{b - i\phi\rho\gamma\sigma + d}{b - i\phi\rho\gamma\sigma - d} \text{ et } d^2 = (i\phi\rho\gamma\sigma - b)^2 + \sigma^2 (2i\beta\phi + \gamma^2\phi^2) \quad (7.29)$$

## 7.2.2 Prix de l'option

On note  $\pi_t$  le prix d'un call européen sur  $S$ , de strike  $K$  et de maturité  $T$ , à la date  $t$ . On a

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t \right]. \quad (7.30)$$

On a

$$\begin{aligned} X_t &= \ln(e^{-rt} S_t) = \ln S_t - rt. \text{ Soit } S_t = e^{X_t + rt}. \\ \text{Et } \{e^{X_T + rT} \geq K\} &= \{X_T \geq \ln K - rT\} \end{aligned}$$

On note  $y = \ln K - rT$ .

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-r(T-t)} S_T \mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t \right) - K e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( \mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t \right). \quad (7.31)$$

On va évaluer le premier terme grâce à un changement de numéraire.  $(e^{-rt} S_t) = (\tilde{S}_t)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale (c'est une martingale locale d'après sa dynamique  $\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \gamma \sqrt{v_t} dW_t$  et on admet que c'est une vraie martingale, ce qui n'est pas si évident). De plus, elle est à valeurs strictement positives :

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left( \int_0^t \gamma \sqrt{v_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2 v_s ds \right). \quad (7.32)$$

$(\tilde{S}_t)$  peut donc servir de numéraire et on note  $\mathbb{Q}^*$  la nouvelle probabilité.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-r(T-t)} S_T \mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t \right) = S_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left( \mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t \right), \quad (7.33)$$

d'après la formule générale

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} X_N | \mathcal{F}_t \right) = N_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} (X | \mathcal{F}_t). \quad (7.34)$$

De plus,  $(W_t^*)$  défini par

$$dW_t^* = dW_t - \gamma \sqrt{v_t} dt \quad (7.35)$$

est un brownien sous  $\mathbb{Q}^*$ .

Pour obtenir la dynamique de  $\nu$  sous  $\mathbb{Q}^*$ , on doit "décorréliser"  $W$  et  $B$ . Sous  $\mathbb{Q}$ , il existe un brownien  $(Z_t)$ , indépendant de  $(W_t)$ , tel que

$$dB_t = \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t. \quad (7.36)$$

On peut faire l'hypothèse que le brownien  $(Z_t)$  n'est pas concerné par le changement de numéraire car il est indépendant de  $(W_t)$ . On définit  $(B_t^*)$ , un brownien sous  $\mathbb{Q}^*$ , par

$$dB_t^* = \rho dW_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t. \quad (7.37)$$

Ainsi,

$$dB_t^* = \rho (dW_t - \gamma \sqrt{v_t} dt) + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t = dB_t - \rho \gamma \sqrt{v_t} dt. \quad (7.38)$$

$$\text{et } dv_t = (a - bv_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} [dB_t^* + \rho \gamma \sqrt{v_t} dt] \quad (7.39)$$

Sous  $\mathbb{Q}^*$ , on manipule donc les dynamiques suivantes

$$\begin{cases} dX_t = (\alpha - \beta v_t) dt + \gamma \sqrt{v_t} [dW_t^* + \gamma \sqrt{v_t} dt] \\ dv_t = (a - bv_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} [dB_t^* + \rho \gamma \sqrt{v_t} dt] \end{cases}. \quad (7.40)$$

Soit

$$\begin{cases} dX_t = [\alpha - (\beta - \gamma^2) v_t] dt + \gamma \sqrt{v_t} dW_t^* \\ dv_t = [a - (b - \rho \gamma \sigma) v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_t^* \end{cases}. \quad (7.41)$$

Comme  $(X_t, v_t)$  suivent des dynamiques de même nature sous  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}^*$  (il suffit d'ajuster les constantes), les fonctions caractéristiques se calculent par la même procédure informatique, en modifiant simplement les valeurs des paramètres constants.

En conclusion,

$$\pi_t = S_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} (\mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t) - K e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t). \quad (7.42)$$

Dans la suite, on évalue  $P_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} (\mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t)$  et  $P_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathbf{1}_{\{X_T \geq y\}} | \mathcal{F}_t)$  grâce aux fonctions caractéristiques  $f_1$  et  $f_0$ , en posant (technique d'inversion de Fourier)

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(x, v, t, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (7.43)$$

### 7.2.3 Dernières précisions

L'évaluation numérique de l'intégrale intervenant dans  $P_1$  n'est pas facile. La "Fast Fourier Transform" peut tout de même être employée pour ce modèle mais implique un choix de coefficient qui peut être gênant lors d'une calibration. D'autres techniques ont été récemment développées comme celle de Albrecher, Mayer, Schoutens et Tistaert en 2006, dans leur article "The Little Heston Trap".

Les recherches concernant les modèles du type d'Heston sont foisonnantes. On s'intéresse au comportement asymptotique du sous-jacent, à l'amélioration numérique (calcul de  $P_1...$ ), etc. Par exemple, on a envisagé un modèle Bi-Heston, modèle deux facteurs de taux. La nouveauté est de travailler dans un environnement de volatilité stochastique, avec toute la diversité de courbes que cela suppose.



# Bibliographie

- [1] Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz. An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(3) :301–329, 1982.
- [2] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1) :77–105, 1992.
- [3] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Ellipses Marketing, Paris, 3e édition edition, February 2012.
- [4] Lionel Martellini, Philippe Priaulet, and Stéphane Priaulet. *Fixed–Income Securities : Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*. John Wiley & Sons, Chichester, England; Hoboken, N.J, May 2003.
- [5] Marek Musiela Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 2004.
- [6] Imen Ben Tahar, José Trashorras, and Gabriel Turinici. *Éléments de Calcul Stochastique pour l'Évaluation et la Couverture des Actifs Dérivés avec Exercices Corrigés Travaux Pratiques et Études de Cas*. Ellipses Marketing, Paris, March 2016. pdf : [www.ceremade.dauphine.fr/~turinici](http://www.ceremade.dauphine.fr/~turinici).

# Bibliographie

- [1] **Les taux d'intérêt, modèle LGM** : Damiano Brigo and Fabio Mercurio (2006) *Interest Rate Models – Theory and Practice*, 2nd édition, Springer.
- [2] **Modèle LGM** : F. Jamishidian (1989) An exact Bond Formula, *Journal of Finance*, *v44, n1 :205-09*.
- [3] **Modèle BGM** : A. Brace, D. Gatarek and M. Musiela (1996) The Market Model of Interest Rates Dynamics, *Mathematical Finance*, *7*, 127-154.
- [4] **Modèle BGM** : F. De Jong, J. Driessen and A. Pelsser (2000) Libor and swap market models for pricing interest rate derivatives : An empirical analysis, *Tilburg University Working Paper*.
- [5] **Modèle BGM** : Alexander, Carol (2002) Common Correlation Structures for Calibrating the LIBOR Model. *ISMA Centre Finance Discussion Paper No. 2002-18*. Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=316540>
- [6] **Modèle BGM** : Schoenmakers, J. and Coffey, B. (2003) Systematic generation of parametric correlation structures for the LIBOR market model. *J. of Theoretical and Applied Finance*
- [7] **Modèle BGM** : Rebonato R. (1999). On the simultaneous calibration of multifactor log-normal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix. *Journal of Computational Finance*.
- [8] **Modèle BGM** : F. Jamishidian (1997) LIBOR and Swap Market Models and Measures, *Finance and Stochastic*, *vol 1, 4, September 1997, 292-330*.
- [9] **Modèle SABR** : P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski and D. Woodward (2001) Managing Smile Risk, *WILMOTT Magazine*, September, 84-108.
- [10] **Modèle d'Heston** : S.L. Heston (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343.