Gestion de risques et construction de portefeuille

Plan du cours	Cours	1 & 2 :	gestion de portef. "classique"
		3 & 4 :	produits dérivés
			proba risque neutre : prix Arrow-Debreu
	Cours	5 – 10 :	proba risque neutre
			Δ hedging pour options
			trading de volatilité
			assurance de portefeuille (CPPI, stop-loss)
			... (pb de Merton, arrêt optimal, options américaines, régimes, etc.)

<u>Rappels</u> proba risque-neutre : c'est une mesure de proba telle que le(s) produit(s) risqué(s) ds le numéraire "actif ss risque" soit une martingale. (pareil pour le prix de tout produit dérivé).

<u>Cas discret</u> (# fini d'états du monde) Arrow-Debreu : la proba risque-neutre liée aux prix de certains produits dérivés (payoff fonctions indicatrices des états du monde).

Lorsque le # d'états du monde n'est pas fini cette procédure (de construction de la proba risque neutre) peut toujours se faire sous certaines conditions. Il y a des situations où la proba risque neutre n'est pas <u>unique</u> ou <u>n'existe pas</u>. Pour nous il y aura existence et unicité de la proba r-n.

A) Cas des produits négociables : S_t = actif négociable.

Rq Il $\exists$ des quantités non-négociables : tx d'intérêt "r".
volatilité "σ".

(mais il $\exists$ de produits financiers négociables qui en dépendent
obligations, options, ...)

Supposons la dynamique risque-neutre $\boxed{dS_t = a(t, S_t)\,dt + b(t, S_t)\,dW_t^*}$

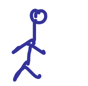
mvt Brownien pr à la mesure risque-neutre

NOUS SUPPOSONS $r = cst$ (tx d'intérêt ss risque)
$r = r(t, \omega)$: tx const.

Comme il s'agit de la proba risque-neutre, $\underline{e^{-rt} S_t}$ est une martingale.

e^{rt} = prix d'un produit ss risque.

$$\underbrace{e^{-rt} S_t}_{\substack{\text{prix ds}\\ \text{le numéraire}\\ \text{produit ss}\\ \text{risque.}}} = \mathbb{E}^{P^*}\left(e^{-rT} S_T \mid \mathcal{F}_t\right)$$



Par ailleurs toute martingale s'écrit comme $\int_0 b^*(t, S_t)\,dW_t^*$.
(thm de représentation).

Donc $d(e^{-rt} S_t) = b^*(t, S_t)\,dW_t^*$

Calcul de $d(e^{-rt} S_t)$ par formule d'Itô.

$f(t, x) = e^{-rt} x$ $\quad d\,f(t, S_t) \overset{\text{Itô}}{=} (-r)\,e^{-rt} S_t\,dt + e^{-rt}\,dS_t + 0\left(\text{car } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\right)$

$= -r e^{-rt} S_t\,dt + e^{-rt}(a\,dt + b\,dW_t^*)$

Par ailleurs $d(e^{-rt} S_t) = b^*(t, S_t)\,dW_t^*$ donc

$$\begin{cases} -r\,\cancel{e^{-rt}} S_t + \cancel{e^{-rt}}\,a(t, S_t) = 0 \Rightarrow a(t, S_t) = r S_t. \\ e^{-rt}\,b(t, S_t) = b^*(t, S_t) \end{cases}$$

Donc équation de S_t ds la proba risque-neutre

$$\boxed{dS_t = r S_t\, dt + \sigma(t, S_t)\, dW_t^*}$$

Peut-on utiliser e.g., un modèle de VASICEK pour S_t ?

VASICEK : $dS_t = (\alpha - \beta S_t)\,dt + \gamma\, dW_t^*$

CIR : $dS_t = (\alpha - \beta S_t)\,dt + \gamma \sqrt{S_t}\, dW_t^*$

NON pour actifs négociables.

B) Fonds avec dividendes réinvestis

Soit X_t un produit négociable qui verse des dividendes au taux δ proportionnel à la valeur de l'actif, c'est à dire dividendes versés (par 1 actif risqué X_t) entre t et $t+\Delta t$ $= \delta X_t \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

Soit Y_t un fonds constitué par un actif X_0 à l'instant 0 et en re-investissant les dividendes au fur et à mesure (dès qu'ils sont perçus).

Quelle est la valeur de Y_t p/r à X_t ?

Capitalisation des dividendes : le fonds détient Z_t actifs risqués de prix X_t à l'instant t, avec $Z_0 = 1$.

Valeur du fonds : $Y_t = Z_t \cdot X_t$.

Trouvons Z_t.

Soit Δt très petit et $t_n = n \cdot \Delta t$. Trouvons $Z_{t_{n+1}}$ en fonction de Z_{t_n}.

Dividendes versés à l'instant t_n pour la période $[t_n, t_{n+1}]$:

$o(\Delta t) + \delta \cdot X_{t_n} \cdot \Delta t$ par unité de produit risqué.

En tout $\left[\begin{array}{l} \delta \cdot X_{t_n} \cdot Z_{t_n} \cdot \Delta t \\ + o(\Delta t) \end{array}\right]$ Cette somme sert à acheter des titres nouveaux au prix X_{t_n}, plus précisement $\frac{\delta X_{t_n} Z_{t_n} \Delta t + o(\Delta t)}{X_{t_n}}$

$= \delta Z_{t_n} \Delta t + o(\Delta t)$.

Donc $Z_{t_{n+1}} = Z_{t_n} + \delta Z_{t_n} \Delta t + o(\Delta t)$.

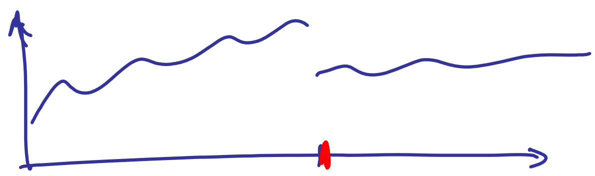
$$\frac{Z_{t_{n+1}} - Z_{t_n}}{\Delta t} = \delta Z_{t_n} + o(1) \xRightarrow{\Delta t \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Z_{t_n + \Delta t} - Z_{t_n}}{\Delta t} = \delta Z_{t_n}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d Z_{t_n}}{dt} = \delta \cdot Z_{t_n} & \forall t \\ Z_0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Z_t = e^{\delta t} \quad \forall t \geq 0.}$$

Valeur du fonds $Y_t = e^{\delta t} X_t \quad \forall t \geq 0$.

<u>Remarque</u> X_t n'est pas directement négociable comme un <u>produit "classique"</u> mais Y_t l'est.

↳ il faut préciser les modalités de versement des dividendes. Ceci influence le prix de X_t.



Equation risque neutre de Y_t : $\boxed{dY_t = r Y_t dt + \sigma_y(t, Y_t) dW^*_t}$

Equation risque-neutre de X_t : $Y_t = e^{\delta t} X_t \quad X_t = e^{-\delta t} Y_t$.

$$d X_t \underset{f(t,y) = e^{-\delta t} y}{\overset{\text{Itô pour}}{=\!=\!=}} -\delta e^{-\delta t} Y_t dt + e^{-\delta t} dY_t =$$

$$-\delta X_t dt + r Y_t e^{-\delta t} dt + \sigma_y(t, Y_t) e^{-\delta t} dW^*_t$$

Donc $\boxed{dX_t = (r-\delta) X_t\, dt + e^{-\delta t} b_y(t, e^{\delta t} X_t)\, dW_t^*}$

c. Application au marché FOREX. Paradoxe de Siegel

Quelle devrait être l'équation risque neutre d'une action p/r à une devise étrangère ? Ou l'équation d'une devise p/r à une autre ?

Ex EURUSD = # de \$ qui peuvent être achetés avec 1 €.
aussi noté EUR/USD = valeur d'1 € en \$. Ex 1.3 \$ = 1 €
EURUSD = 1.3 \$
USDEUR = valeur d'1 \$ en €.

Ex EURUSD = 1.3 \$ ⇒ USDEUR = $\frac{1}{1.3}$ €

Remarque écrire juste 1.3 ss numéraire n'a pas de sens !

Equation de EURUSD $= F_t$ (notation)

$dF_t = r F_t\, dt + (\ )\, dW_t^*$? Non car mécanisme suivant :

→ achat de 1.3 M \$ avec 1 M €.

	$t=0$	$t = 1$ an
Portefeuille	+ 1.3 M \$ − 1 M €	1.3 M \$ · $(1+r_{USD})$ − 1 M € · $(1+r_{EUR})$
Valeur	ϕ	hyp : tx de change cst. 1.3 M \$ $(1+r_{USD})$ − 1 M € $(1+r_{EUR})$ $\underset{=}{\text{hyp}}$ 1 M € $(r_{USD} - r_{EUR})$

VALEUR ≠ 0 avec investissement initial nul.
Déterministe si F_t = cst !
Arbitrage dit "CARRY-TRADE".

Il s'agit donc d'un produit "non-classique". En fait c'est un exemple de dividende continu à tx fixé : si on achète des \$ la monnaie est l'€ avec son tx d'intérêt r_{EUR} et dividendes r_{USD}.

Equation risque-neutre $\boxed{dF_t = (r_{USD} - r_{EUR}) F_t \, dt + \beta \, dW_t^*}$.

(on achète des € avec des \$) Ici $D = r_{EUR}$.

Calculons équation risque-neutre de USDEUR $= \frac{1}{F_t} \overset{\text{notation}}{=} G_t$.

$$dG_t = d\left(\frac{1}{F_t}\right) \underset{f(t,x) = \frac{1}{x}}{\overset{\text{Itô}}{=\!=}} -\frac{1}{F_t^2} dF_t + \frac{1}{F_t^3} d\langle F \rangle_t$$

$$d\langle F \rangle_t = \beta^2 dt$$

$$= -G_t^2 \, dF_t + G_t^3 \beta^2 dt = \underbrace{\left[-G_t^2 F_t (r_{USD} - r_{EUR})\right]}_{= (r_{EUR} - r_{USD}) G_t} dt - G_t^2 \beta \, dW_t^* + \beta^2 G_t^3 dt$$

Donc
$$dG_t = \underbrace{(r_{EUR} - r_{USD}) G_t \, dt - \beta G_t^2 \, dW_t^*}_{\text{OK}} + \underbrace{\beta^2 G_t^3 \, dt}_{?}$$

terme contradictoire avec le raisonnent initial (avec dividendes) ← paradoxe de Siegel.

Explication : en fait G_t n'a pas de sens

$$G_t = \frac{1}{F_t} = \frac{1}{1.3 \,\$} = \frac{1}{1.3} \underbrace{\frac{1}{\$}}_{?}$$ pas une monnaie.

Nous pouvons considérer $\frac{1}{1.3}$ qui sera la valeur d'1 \$ exprimé en €. Donc le vrai $G_t = \frac{1}{\text{valeur de } F_t}$ €.

En fait ceci apparaît chaque fois qu'on calcule la proba risque neutre ds une monnaie étrangère.

Ex action Microsoft (cotée en \$) exprimée en proba risque-neutre €. Il faut faire les corrections dites de convexité : "ajustement de convexité" ou "ajustement quanto".

Ingrédients : équation risque neutre Microsoft en \$
équation R-N EUR/USD } $\xrightarrow{\text{ajustement de convexité}}$

équation R-neutre de Microsoft en EUR. (cf. HULL).