

## Algèbre Linéaire 2

*Une attention particulière doit être apportée à la lisibilité de la copie, à la rédaction des réponses afin d'obtenir la totalité des points. Sauf mention du contraire, il faut justifier vos réponses.*

### Questions de cours 1 : (4 points)

1. Donner la définition de la somme directe de 3 sous-espaces vectoriels. (1 point)
2. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  pour  $n \geq 1$ . Que veut dire la phrase «  $A$  est semblable à  $B$  »? (1 point)
3. Donner la dimension de  $M_n(\mathbb{R})$  et en donner une base ( $n \geq 1$ ). (1 point, on ne justifiera pas que la famille proposée est une base.)
4. Montrer que, pour deux matrices  $A, B$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$  on a  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . (1 point)

**Correction 1 (Question de cours 1)**      1. On dit que  $F, G, H$  trois sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel  $E$  sont en somme directe si « Quelque soit  $(x, y, z) \in F \times G \times H$ , l'égalité  $x + y + z = 0$  implique  $x = y = z = 0$ . »

2. Pour  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , «  $A$  est semblable à  $B$  » si il existe une matrice inversible  $P \in M_n(\mathbb{K})$  telle que

$$A = PBP^{-1}. \quad (1)$$

3. La dimension de  $M_n(\mathbb{R})$  est  $n^2$  et la famille de matrices  $(A_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ , où  $A_{ij}$  est définie par ses coefficients  $A_{ij}(k, l) = 1$  si  $k = i$  et  $l = j$  et 0 sinon, en est une base.
4. Pour deux matrices  $A, B$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$  on a  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  car

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

*Dans les formules précédentes, on a échangé le signe somme, ce qui est licite car la somme porte sur un nombre fini de nombres.*

**Exercice 1 (1 point)** On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  et l'application  $c : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  définie par  $c(x, y) = (x, -y)$ . En notation complexe, on a donc  $c(z) = \bar{z}$ , avec  $\bar{z} = x - iy$  le conjugué de  $z = x + iy$ .

1. L'application  $c$  est-elle linéaire sur le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ ? (0,5 point)

2. Sur le  $\mathbb{C}$  espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , l'application  $c(z) = \bar{z}$  est-elle linéaire ? (0,5 point)

**Correction 2 (Exercice 1)** 1. L'application  $c$  est bien linéaire sur le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . En effet, quelques soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(z, w) \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $c(x + \lambda z, y + \lambda w) = (x + \lambda z, -y - \lambda w) = c(x, y) + \lambda c(z, w)$ .

2. L'application  $c(z) = \bar{z}$  n'est pas linéaire sur  $\mathbb{C}$ . En effet, pour  $\lambda = i$ , on a  $c(i \times 1) = -i$  et par ailleurs,  $i \times c(1) = i$ . On a donc  $c(i \times 1) \neq i \times c(1)$ , ce qui contredit la  $\mathbb{C}$  linéarité de  $c$ .

**Exercice 2 (4,5 points)** Sur  $\mathbb{R}^3$ , on considère la base canonique, qu'on notera  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Soient  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 0, 0)$  et  $v_3 = (3, 1, 0)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  et en déduire que c'est une base. (1 point)

2. Écrire les coordonnées de  $w = (3, 2, 1)$  dans la base  $\mathcal{C}$ . (1,5 points)

3. On définit l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  par  $f(e_1) = v_1$ ,  $f(e_2) = v_2$  et  $f(e_3) = v_3$ . Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$  (c'est-à-dire écrire  $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)$ ). On détaillera le raisonnement. (2 points)

**Correction 3** 1. Comme  $\mathbb{R}^3$  est de dimension 3 (d'après le cours) et le cardinal de la famille est 3, il suffit de démontrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i = 0. \quad (2)$$

En coordonnées, on a donc les trois équations suivantes

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

De la dernière équation, on remonte le système pour obtenir  $\lambda_3 = 0$  et  $\lambda_2 = 0$ , ce qui prouve que la famille est libre.

2. La famille est une base, elle est en particulier génératrice. On résout le système

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i = (3, 2, 1). \quad (4)$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

On obtient, en remontant le système,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$  et  $\lambda_2 = -1/2$ .

3. Par définition, la matrice de  $f$  dans la base canonique est la matrice de passage  $P_{BC}$ . C'est-à-dire  $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = P_{BC}$ . On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = P_{CB} \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) P_{CB} = P_{CB} P_{BC} P_{BC} = P_{BC}. \quad (6)$$

La première égalité est donnée dans le cours et la troisième égalité vient du fait que  $P_{CB} P_{BC} = \text{Id}$ .

**Exercice 3 (7,5 points)** On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit la matrice réelle  $A \in M_2(\mathbb{R})$  donnée par  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer le rang de  $A$ . (1 point)
2. Montrer que l'endomorphisme  $\Psi$  de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associée à  $A$  (c'est-à-dire l'endomorphisme  $\Psi(X) = AX$  pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ) est un projecteur. (1 point)
3. Soient  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et calculer  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  et  $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  les matrices de passage associées. (2 points)
4. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . (1,5 points)
5. Calculer  $A^n$  pour  $n \geq 2$ . (1,5 points)
6. La matrice  $B$  est-elle semblable à  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? (0,5 point)

**Correction 4** 1. La matrice  $A$  est non nulle donc son rang est supérieur ou égal à 1. De plus, ses deux vecteurs colonnes sont égaux donc colinéaires, ce qui implique que son rang est inférieur strictement à 2. En conclusion, on a donc  $\text{rg}(A) = 1$ .

2. D'après le cours, il suffit de vérifier que  $\Psi \circ \Psi = \Psi$ . En choisissant la base canonique pour représenter l'endomorphisme  $\Psi$ , il suffit de voir que  $A^2 = A$ . En effet, on a :

$$A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A. \quad (7)$$

3. On montre que  $v_1, v_2$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  en montrant que cette famille est génératrice (car elle est de cardinal 2 et  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2). On note  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . On a

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ e_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2). \end{cases} \quad (8)$$

La famille  $(v_1, v_2)$  est donc génératrice car elle engendre la base canonique. Pour les matrices de passage, l'énoncé donne les vecteurs de la base  $\mathcal{C}$  dans la base canonique. On en déduit donc  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . En utilisant les formules (8), on a  $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

4. On a  $Av_1 = v_1$  et  $Av_2 = 0$  donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \quad (9)$$

La matrice  $A$  est donc semblable à  $B$ .

5. La matrice  $A$  vérifie  $A^2 = A$ , on a donc par récurrence immédiate  $A^n = A$  quelque soit  $n \geq 1$ .

6. La matrice  $A$  n'est pas semblable à la matrice  $C$  car  $1 = \text{tr}(A) \neq \text{tr}(C) = 2$ . (En effet d'après le cours, si  $A$  et  $B$  sont équivalentes alors  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ ).

**Exercice 4 (3 points)** Soit  $A = \{1, \dots, n\}$  avec  $n \geq 2$  un entier. On considère l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  des fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ . On rappelle les lois de composition interne et externe associées à cet espace vectoriel :  $(\lambda f + g)(i) = \lambda f(i) + g(i)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  deux éléments de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ .

1. Soit la famille  $\mathcal{B} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  définie par  $f_i(i) = 1$  et  $f_i(j) = 0$  pour  $j \neq i$ . Montrer que cette famille est une base de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  et en déduire la dimension de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ . (1 point)
2. On définit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  par les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  par  $\varphi : \varphi(f_i) = f_{i+1}$  pour  $i \leq n-1$  et  $\varphi(f_n) = 0$ .  
Écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ . (C'est-à-dire écrire  $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)$ ) (1 point)
3. On définit  $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$ . Montrer que  $\varphi^n = 0$ . (1 point)

**Correction 5** 1. On ne connaît pas a priori la dimension de l'espace  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ . Il faut donc montrer que la famille est libre et génératrice.

Montrons d'abord la liberté. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0_{\mathcal{F}(A, \mathbb{R})}, \quad (10)$$

ce qui implique quelque soit  $j \in [1, n]$  on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(j) = 0. \quad (11)$$

D'après les propriétés de l'énoncé, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(j) = \lambda_j, \quad (12)$$

ce qui donne donc  $\lambda_j = 0$ . La famille est donc libre.

On montre maintenant que la famille est génératrice. Soit  $g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ , comme pour la base duale d'un espace vectoriel, on a

$$g = \sum_{i=1}^n g(i) f_i. \quad (13)$$

En effet, on a quelque soit  $j \in [1, n]$ ,

$$\sum_{i=1}^n g(i) f_i(j) = g(j)$$

donc les deux fonctions sont égales. La dimension est le cardinal d'une base et donc la dimension de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  est  $n$ .

2. Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

C'est-à-dire des 1 juste au dessous de la diagonale et des 0 ailleurs.

---

3. Il suffit de prouver par récurrence  $(f_i, \dots, f_n) \in \text{Ker}(\varphi^{n-i+1})$  ceci pour  $i \in [1, n]$ . Cette propriété est vraie pour  $i = 1$  d'après l'énoncé. Supposons la propriété vraie au rang  $i$  et montrons la au rang  $i + 1$ . On a donc  $\varphi^{n+1-i}(f_j) = 0$  pour  $j \in [i, n]$ , on a donc, en composant cette égalité par  $\varphi$ ,

$$\varphi(\varphi^{n+1-i}(f_j)) = \varphi(0) = 0. \quad (15)$$

On a de plus

$$\varphi^{n+2-i}(f_{i-1}) = \varphi^{n+1-i}(\varphi(f_{i-1})) = \varphi^{n+1-i}(f_i).$$

Or, on a par hypothèse,  $\varphi^{n+1-i}(f_i) = 0$ . Ce qui montre la propriété voulue.

Pour conclure, il suffit de voir que la propriété au rang  $n$  donne le résultat, puisque  $(f_1, \dots, f_n) \in \text{Ker}(\varphi^n)$ . Ce qui signifie  $\varphi^n = 0$ .