Guillaume VIGERAL
11 rue Friant
75014 Paris, France

Tel. : +336 24 63 62 73
E-mail : guillaumevigeral@gmail.com
vigeral@ceremade.dauphine.fr
https ://www.ceremade.dauphine.fr/ vigeral/

Né le 28/08/81
Français
Marié, 3 enfants

Positions

2010–	**Maître de Conférences (Assistant Professor)** Université Paris Dauphine, CEREMADE
2009–2010	**Postdoctorate** INRIA Saclay, CMAP
2008–2009	**ATER (temporary teaching and research position)** Université Paris Dauphine, CEREMADE
2005–2008	**Allocataire-moniteur** à l'Université Paris VI au sein de Équipe Combinatoire et Optimisation
2000–2004	**Élève normalien** à l'École Normale Supérieure de Lyon

Cursus académique

2017	**Habilitation à diriger des recherches** *à l' Université Paris Dauphine :* Problèmes asymptotiques pour les jeux répétés à somme nulle ; structure des ensembles d'équilibres de Nash de jeux finis. Soutenue le 12/2/17.
2005–2009	**Thèse de mathématiques** *sous la direction de Sylvain Sorin à l' Université Paris VI :* Propriétés asymptotiques des jeux répétés à somme nulle. Soutenue le 19/11/09, mention très honorable.
2004–2005	**Master2 "Optimisation, jeux et modélisation en économie"** Université Paris VI
2002–2003	**Agrégation de Mathématiques**
2001–2002	**Maîtrise de mathématiques** ENS Lyon
2000–2001	**Licence de Mathématiques** ENS Lyon
2000	**Admission à l'École Normale Supérieure de Lyon**

Enseignement

2018 –	**Cours de Mathématiques** *L2* CPES (License PSL)
2017 –	**Cours de Mathématiques** *M2* Université Paris Saclay
2015 –	**Oraux blancs de concours GEI/Casting** *L3* Université Paris Dauphine
2012 – 2017	**Cours de Mathématiques** *M2* Université Paris Dauphine
2011 – 2012	**Cours de Mathématiques** *L3* Institut Tunis Dauphine
2010 –	**Cours et TDs de Mathématiques** *L3/M1* Université Paris Dauphine
2013 – 2016	**Cours d'optimisation dynamique** *2ème année* de l'ENSAE
2009 – 2013	**TDs d'optimisation dynamique** *2ème année* de l'ENSAE
2008 – 2009	**TDs de Mathématiques** *Licence* Université Paris Dauphine
2005 – 2008	**TDs de Mathématiques** *Licence* Université Paris VI
2002 – 2003	**Colles de mathématiques** *MP** Lycée du Parc, Lyon

Responsabilités administratives et electives

2020 –	**Elu au conseil de la formation et de la vie étudiante** Université Paris-Dauphine
2019 –	**Membre élu du comité de Liaison** Groupe MODE, SMAI
2017 –	**Coordinateur des mathématiques au CPES** PSL
2014 –	**Responsable pédagogique du CPES3 Mathématiques** PSL

Encadrements de thèse et stages de recherche

Sept 2019	**Thomas Ragel** thèse de doctorat, encadrant principal
Sept 2019	**Lucas Baudin** thèse de doctorat, encadrant secondaire
Avril-Juin 2018	**Thomas Ragel** M2 Probabilités de l'UPMC
Janvier–Juin 2015	**Amina Bouchafaa** L3 MIDO
Janvier–Juin 2016	**Auguste Lehuger** L3 MIDO
Janvier–Juin 2017	**Victor Rambaud** L3 MIDO
Septembre 2016–Avril 2017	**Tom Monnier** Mines de Paris, 2e année
Janvier–Juin 2018	**Laura Soueidan** CPES2
Janvier–Juin 2019	**Kamil Benjelloun** L3 MIDO
Janvier–Juin 2020	**Louis Morel** L3 MIDO
Janvier–Juin 2020	**Mathis Ouali, Gabriel Bouresche, Quentin Gyselinck** M1 MIDO
Janvier–Juin 2021	**Juba Aouragh** L3 MIDO
Janvier–Juin 2021	**Valentin Autié, Lucas Bugeaud, Bastien Ibanez-Landry** M1 MIDO

Publications

- Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces. *ESAIM : COCV* 16 (2010) 809-832 .
- Asymptotic properties of optimal trajectories in dynamic programming (avec S. Sorin et X. Venel). *Shankya* , 72-A (2010) 237-245.
- A maximin characterisation of the escape rate of non-expansive mappings in metrically convex spaces (avec S.Gaubert). *Mathematical Proceedings* 152-2 (2012) 341-363
- A uniform Tauberian theorem in optimal control (avec M. Oliu-Barton). *Annals of the International Society of Dynamic Games vol 12 : Advances in Dynamic Games* (2013) 199-215 .
- Existence of the limit value of two person zero-sum discounted repeated games via comparison theorems (avec S. Sorin). *JOTA* 157-2 (2013) 564-576
- A zero-sum stochastic game with compact action sets and no asymptotic value. *Dynamic Games and Applications* 3-2 (2013) 172-186
- Definable zero-sum stochastic games (avec J. Bolte et S. Gaubert). *Mathematics of Operations Research* 40-1 (2015) 171-191.
- A minmax theorem for concave-convex mappings with no regularity assumptions (avec V. Perchet). *Journal of Convex Analysis* 22-2 (2015) 537-540.

- Reversibility and oscillations in zero-sum discounted stochastic games (avec S. Sorin). *Journal of Dynamics and Games* 2-1 (2015) 103-115.
- Operator approach to values of stochastic games with varying stage duration (avec S. Sorin). *International Journal of Game Theory* 45 (2016) 389-410.
- Semi-algebraic sets and equilibria of binary games (avec Y. Viossat). *Operation Research Letters* 44 (2016) 19-24.
- Limit optimal trajectories in zero-sum stochastic games (avec S. Sorin). *Dynamic Games and Applications* 10 (2020) 555-572.

Préprints et travaux en cours.

- Iterated monotonic nonexpansive operators and asymptotic properties of zero-sum stochastic games. Preprint
- A characterisation of sets of equilibrium payoffs of finite games with at least 3 players. Preprint
- Zero-sum stochastic games with signals and varying duration (avec S. Sorin). Work in progress
- Finite zero-sum stochastic games with intermittent observation (avec B. Ziliotto). Work in progress
- A geometric characterization of subgame perfect equilibrium payoffs of games with perfect information. Work in progress

Exposés oraux

- Exposés dans des congrès, colloques ou workshops.
  Workshop "Jeux répétés, jeux différentiels" 2012 (Foljuif), Mathematical International Conference on Game Theory 2012 (Stony Brook), Workshop ≪ Jeux répétés, temps discret, temps continu ≫ 2013 (Roscoff), Workshop : Stochastic Dynamic Games 2013 (Bonn), ADGO'2013 (Playa Blanca, Chile), Workshop on Stochastic Methods in Game Theory 2013 (Erice), SIAM CT 13 (San Diego), SMAI 2013 (Seignosse), MAGTA 2014 (Roscoff), Advances in dynamic interations 2014 (Paris), PGMO 2014 (Palaiseau), MTNS2014 (Groningen) , PGMO 2015 (Palaiseau), Stochastic Methods in Game theory 2015 (Singapour), SIAM CT15 (Paris), Workshop In Honor of Abraham Neyman's 66th Birthday 2015 (Stony Brook), GEL 2016 (Luchon), ADGO'2016 (Santiago), MODE 2016 (Toulouse), World Congress of the Game Theory Society 2016 (Maastricht), "Modern problems in mathematics and its applications" (Ekaterinburg, 2019) , Colloque Inter'Actions 2019 (Bordeaux), Workshop ≪ Jeux répétés, temps discret, temps continu ≫ 2019 (Fréjus), IWOTA19 (Lisbon), MODE2020 (online), ...
- Exposés dans des séminaires à Hebrew University of Jerusalem (2013), Tel Aviv University (2013), University of Kent (2015), Institut Henri Poincaré (2015, 2019), Maastricht University (2013), Université Paris Dauphine (2015, 2017, 2021)...

Activités éditoriales, de referee et expertise

- *Jury de thèse de Tristan Garrec (Toulouse School of Economics)*
- *Associate editor of Dynamic Games and Applications*

- *Referee for*
  - — *Communication on Pure and Applied Analysis*
  - — *Journal of Dynamic Games*
  - — *Games and Economic Behavior*
  - — *International Journal of Game Theory*
  - — *Mathematics of Operation Research*
  - — *Journal of Mathematical Analysis and Applications*
  - — *Mathematical Programming*
  - — *Acta Applicandae Mathematicae*
  - — *SIAM Journal of Control and Optimization*
  - — *Proceedings of IEEE CDC*
- *Rapporteur pour des projets ANR*
- *Reviewer pour Mathscinet*
- *5 participations à des comités de selection, 4 en interne et 1 en temps qu'extérieur (à l'UPMC)*

Organisation de conférences, séminaires et ateliers

- Organisateur du séminaire Parisien de théorie des jeux (Institut Henri Poincaré) entre 2011 et 2019
- Organisation du séminaire parisien des thésards en théorie des jeux (Institut Henri Poincaré) entre 2008 et 2010
- Membre du comité d'organisation de la conference internationale "Games and Strategy in Paris" du 11 au 13 juin 2012.
- Membre du comité d'organisation du workshop "Jeux répétés, jeux différentiels" du 10 au 12 octobre 2012 a Foljuif.
- Membre du comité d'organisation et du comité scientifique de l' "Ecole d'été pluridisciplinaire de Théorie des Jeux" du 7 au 12 Septembre 2014 dans le centre CNRS d'Aussois.
- Organisateur de plusieures sessions invitées dans des conférences (PGMO 2015 et PGMO 2016, SIAM CT 2013 et SIAM CT 2015, SMAI 2013)
- Organisateur de l'atelier "Jeux dynamiques" à Fréjus du 17 au 19 octobre 2017
- Organisateur du "French symposium on game theory" du 11 au 15 juin 2018 à Paris
- Membre de International Program Committee, ISDG Symposium Grenoble July 9-12, 2018

Contrats de recherche

- Membre de l'ANR JCJC "GAGA" (2013-2017)
- Membre du GDR 2932 Jeux et du GDR 3273 MOA (2012-)
- Membre du projet PEPS HUMAIN "INCOLORE" (2014-2016)
- Porteur de plusieurs projets PGMO (2014-2021)

Autres activités

3 Fev- 9 Fev 2019	**invité à l'université fédérale de l'Oural (Iekaterinburg, Russie)**
30 Nov- 6 Déc 2015	**Membre invité au programme de recherche "Stochastic Methods in Game Theory", Singapour**
20-22 novembre 2013	**invité à la School of Business and Economics** (Maastricht)
16–21 juin 2013	**Membre invité au programme de recherche "Stochastic Dynamics in Economics and Finance" , Bonn**
27 avril-4 mai 2013	**invité au School of Mathematical Sciences** (Tel Aviv University)
20-27 avril 2013	**invité au Center for the Study of Rationality** (Hebrew University of Jerusalem)
Printemps 2006	**3 mois au Centro de Modelamiento Matematico** Santiago, Chile
Juillet 1998	**39éme International Mathematical Olympiads** *Médaille de bronze*
Juin 1998	**Concours Général de Mathématiques** *Second Accessit*

Présentation des travaux de recherche

Les articles joints au dossier sont [3, 7, 26, 27, 28, 31, 35]

1 Jeux répétés à somme nulle

1.1 Introduction

Je m'intéresse dans une grande partie de mes travaux à la répétition (principalement en temps discret) de jeux à deux joueurs et à somme nulle (c'est à dire une interaction dans laquelle les deux adversaires ont des intérêts opposés).
Le caractère répété n'a d'intérêt que lorsqu'un paramètre du jeu évolue au cours du temps : on étudie donc des modèles dynamiques dans lesquels les actions jouées par chaque joueur n'influent pas uniquement sur le paiement d'étape. Les modèles classiques sont :

- Les jeux stochastiques introduits par Shapley [21]: l'état de la nature à l'étape $n+1$ et le paiement à l'étape n dépendent des actions jouées par chaque joueur à l'étape n ainsi que de l'état de la nature à l'étape n. Les joueurs doivent donc jouer de manière à optimiser le paiement courant tout en s'assurant un bon état futur.

- Les jeux à information incomplète d'Aumann et Maschler [1] : l'état de la nature est fixé une fois pour toute au début de la partie, et les joueurs en ont une information partielle et asymétrique. Dans ce cas le dilemme est d'optimiser le paiement sans révéler trop de son information privée au joueur adverse .

- Il est également possible de combiner les deux aspects : l'état de la nature évolue selon les actions des joueurs, et les joueurs n'en ont qu'une vision partielle.

Ce cadre est intéressant de part sa richesse théorique ainsi que pour ses applications à d'autre domaines. Citons en particulier la théorie des jeux combinatoires (comme le backgammon), l'économie (compétition avec un horizon de planification long, développement durable), l'informatique (vérification et analyse statique), la biologie (problèmes de minimisation de croissance en dynamique de populations) ainsi que les mathématiques financières (problèmes sensibles au risque).
Pour tout jeu répété Γ et tout entier n, on définit $v_n(\cdot)$ comme la valeur du jeu en horizon n, dans lequel le joueur 1 (resp. le joueur 2) maximise (resp. minimise) l'espérance de la moyenne de Césaro des paiements des n premières étapes. On définit d'une manière analogue, pour tout taux d'escompte $\lambda \in]0,1]$, $v_\lambda(\cdot)$ la valeur du jeu λ-escompté, dans lequel les joueurs maximisent ou minimisent l'espérance de la moyenne $\lambda-$escomptée des paiements d'étapes. v_n et v_λ sont des fonctions à valeurs réelles définie sur un ensemble de paramètres (l'état initial d'un jeu stochastique, les croyances initiales des joueurs d'un jeu à information incomplète, ...).
Un problème important dans ce cadre est celui de l'étude de ces valeurs lorsque n tend vers $+\infty$ et λ vers 0 : il s'agit d'étudier le comportement d'un jeu répété quand le poids relatif de chaque étape devient négligeable, soit parce que l'horizon fini est lointain (n est grand), soit parce que les joueurs sont très patients (λ est proche de 0). Les questions principales sont l'existence de $\lim v_n(\cdot)$ et $\lim v_\lambda(\cdot)$, leur égalité, ainsi que la caractérisation et le calcul de la limite. on dira que le jeu a une "valeur asymptotique" lorsque v_n et v_λ convergent vers la même fonction limite.
Ces questions ont été résolues pour certaines classes de jeux ([1, 2, 6, 8, 14] et bien d'autres), mais avec des preuves très spécifiques à chaque classe. D'autre part de nombreux problèmes restent ouverts.

1.2 Exemples de jeux n'ayant pas de valeur asymptotique

Jusqu'à présent la littérature existante démontrait la convergence de la valeur asymptotique (c'est à dire la convergence de $v_n(\cdot)$ et $v_\lambda(\cdot)$ vers une valeur commune) pour de nombreuses classes de jeux répétés. Durant les dernières années j'ai réussi à construire des exemples explicites de jeux dont les paramètres sont "réguliers" mais n'ayant pas de valeur asymptotique. On est donc en présence d'un comportement très surprenant où, par exemple, pour un horizon n grand le Joueur 1 gagnera 1 par unité de temps lorsque $n = 2^{2k}$ alors qu'il perdra 1 par unité de temps lorsque $n = 2^{2k+1}$.

Article [31]

Dans cet article je m'intéresse au cadre particulier de "jeux compacts", jeux stochastiques à somme nulle avec un nombre fini d'états, des ensembles compacts d'actions pour chaque joueur, et des fonctions de paiement et de transition continues. Cette classe de jeux est naturelle car dans de nombreux cadres il est plus aisé de modéliser les ensembles d'actions par un intervalle que par un ensemble fini (on peut penser au prix d'un bien, à une quantité d'effort fournie, etc...) D'autre part elle semble très régulière.
Dans ce cadre l'existence de v_n et v_λ pour n ou λ fixé ne pose pas de problèmes (elle découle de généralisations du théorème du minimax dans un cadre compact) ; l'existence d'une limite était démontrée dans de nombreux cas particuliers (en particulier lorsque tous les ensembles sont finis par des arguments de semi-algébricité [2] mais aussi dans d'autres cas[20]). Le cadre semblant très régulier l'existence de la valeur asymptotique a été conjecturée en général dans [22]. Je montre dans cet article que cette conjecture est fausse en construisant explicitement un exemple où les fonctions v_n et v_λ convergent. Pour cela je commence, à l'aide en particulier du travail précédent [25] (voir dans la sous-section approche opératorielle ci-dessous) par considérer une classe de jeux à 4 états (dont deux absorbants et deux nonabsorbants w_1 et w_2) qui est en quelque sorte la classe minimale de jeux pour lesquels les méthodes existantes ne permettent pas de démontrer la convergence de v_λ.
Étant données certaines hypothèses de régularité sur une fonction $f_\lambda(\cdot)$ (qui sont nécessaires pour que cette fonction puissent être la fonction valeur d'un jeu compact), je construis, en fonction de $f_\lambda(\cdot)$, un jeu compact appartenant à la classe étudiée et qui a pour fonction valeur $v_\lambda(\cdot) = f_\lambda(\cdot)$. Les hypothèses de régularité nécessaires n'entraînant pas nécessairement la convergence de v_λ (on a juste besoin de $\frac{df_\lambda(\omega)}{d\lambda} = O(1/\lambda)$ pour chaque état ω), on peut construire un contre exemple recherché. Par exemple on construit explicitement un jeu compact tel que $v_\lambda(\omega_1) = \sin \ln \lambda + \sqrt{\lambda}$ et $v_\lambda(\omega_2) = \sin \ln \lambda - \sqrt{\lambda}$. Il est à noter que dans un tel contre exemple les ensembles d'actions sont simples (ce sont des intervalles) ainsi que les fonctions de paiement (elles ne dépendent que de l'état courant) mais que les fonctions de transition sont très irrégulières : bien que continues (voir même C^∞ si on veut) elles font intervenir des fonctions ayant un nombre dénombrable de zéro telles que $x \sin \ln x$ par exemple.
On montre enfin qu'en faisant des hypothèses techniques supplémentaires on peut assurer que la fonction $v_n(\cdot)$ diverge elle aussi quand n tend vers l'infini. On peut alors construire un exemple pour lequel v_n et v_λ divergent tous deux.
Cet exemple est surprenant et soulève de nombreuses questions, en particulier celle de trouver une classe de jeux suffisamment souple pour permettre de modéliser facilement de nombreux problèmes, et suffisamment rigide pour assurer la convergence des valeurs. Une réponse possible est donnée dans [3] (voir dans la sous-section approche opératorielle ci-dessous)

Article [26]

Dans un travail en collaboration avec Sylvain Sorin (UPMC) nous nous intéressons à d'autres classes de jeux pour lesquelles il est possible de construire des contre exemples. Nous considérons des jeux composés de deux "demi-jeux" Γ et Γ' communiquant entre eux, chacun des deux demi-jeux étant controllé par un joueur. Dans ce cadre la convergence de v_λ dépend du comportement asymptotique du rapport entre Q_λ et Q'_λ, ces deux quantités désignant le temps espéré de sortie de chaque demi-jeu (pour entrer dans l'autre) lorsque les joueurs jouent de manière optimale. Pour construire des contre exemples il suffit alors de construire des "demi-jeux" irréguliers, c'est à dire tels que Q_λ soit de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$ mais $\frac{Q_\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ ne converge pas, et de les raccorder à un "demi jeu" régulier, c'est à dire tel que $Q'_\lambda \sim \sqrt{\lambda}$. Ceci est inspiré par (et généralise) à la fois l'article [31] ci dessus et un contre exemple de B. Ziliotto qui construit [37] un jeu fini avec signaux publics et sans valeur asymptotique. De plus, cela permet de mieux comprendre les raisons de la non convergence des valeurs pour ces récents contre exemples, et en particulier pourquoi ces oscillations, impossibles dans des problèmes d'optimisation, peuvent apparaître dès qu'il y a un deuxième joueur.

1.3 Approche opératorielle des jeux répétés

Pour tout jeu répété il existe un opérateur Ψ, appelé opérateur de Shapley du jeu (similaire à l'opérateur de Bellman en programmation dynamique et généralisant celui-ci), tel que les valeurs en horizon fini satisfont la relation de récurrence

$$nv_n = \Psi((n-1)v_{n-1}) \tag{1}$$

et les valeurs escomptées vérifient des équations de point fixe

$$v_\lambda = \lambda \Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda\right). \tag{2}$$

L'idée de l'"Operator approach", ou approche opératorielle, est de démontrer la convergence de v_n et v_λ via l'étude des propriétés vérifiées par l'opérateur Ψ. En particulier un opérateur de Shapley est toujours 1-Lipschitzien pour la norme infinie ; en utilisant cela Rosenberg et Sorin ont donné dans [20, 23] des conditions suffisantes sur l'opérateur pour que les valeurs convergent, ce qui leur a permis de trouver de nouvelles démonstration de convergence dans le cas des jeux absorbants et des jeux à information incomplète. Cette approche a également permis de prouver la convergence dans le cas des jeux absorbants à information incomplète d'un côté[19]. Je m'étais déjà intéressé dans ma thèse à cette approche opératorielle, en particulier en considérant les propriétés de l'opérateur de Shapley des jeux dans lesquels les transitions sont contrôlées par un unique joueur, et les conséquences en terme de convergence de v_n et v_λ. Je m'en tiens ci-après à mes recherches des 5 derniers semestres.

Article [33](Preprint)

Dans [33], je poursuis cette approche opératorielle. Dans un premier temps je montre qu'à certaines propriétés d'un jeu répété à somme nulle (transitions contrôlées par un seul joueur, borne sur les paiements) correspondent des propriétés (convexité, récession) de son opérateur de Shapley. Dans un second temps j'utilise ces propriétés pour donner des conditions suffisantes pour déterminer le comportement asymptotique des valeurs de jeux répétés (en horizon fini ou escomptés). En particulier on montre que dans le cas de jeux avec des transitions contrôlées par un seul joueur, la suite v_n (respectivement la famille v_λ) possède au plus une valeur d'adhérence et converge donc sous une hypothèse de compacité. La nouveauté par rapport à [20, 23] est d'étudier non pas l'opérateur de Shapley Ψ mais son itéré Ψ^m pour un m bien choisi (ce qui revient à considérer un jeu joué par blocs de m étapes) permettant ainsi de régulariser l'opérateur.

Article [25]

Dans cet article en collaboration avec Sylvain Sorin (UPMC) nous nous intéressons à la convergence de v_λ pour plusieurs classes de jeux avec ensembles d'actions compactes : les jeux absorbants, récursifs et à information incomplète. L'existence d'une valeur asymptotique était déjà connue dans ces trois cadres mais les preuves originales étaient spécifiques à chaque cadre. Ici, nous utilisons une méthode à base de théorèmes de comparaison pour redémontrer cette convergence.
L'idée est de supposer que la fonction à deux points d'accumulation $v(\cdot)$ et $v'(\cdot)$, avec (sans perte de généralité) $\max\{v(\cdot) - v'(\cdot)\} > 0$. On considère alors l'ensemble Ω_0 des états sur lequel la différence $v(\cdot) - v'(\cdot)$ est maximale. On montre alors qu'asymptotiquement, si les joueurs jouent de façon optimale alors nécessairement l'état ne sort jamais de Ω_0 une fois qu'il y est entré. Cela entraîne que $v(\cdot) \leq v'(\cdot)$ sur l'ensemble Ω_0 et permet d'arriver à une contradiction. L'intérêt de cette méthode, outre qu'elle unifie des démonstrations très différentes dans les différents cadres, est qu'elle permet de démontrer facilement des caractérisations de la limite (déjà connues dans le cadre des jeux récursifs ou à information incomplète, et nouvelle dans le cas des jeux absorbants).
De plus, elle permet d'identifier une classe de jeux "minimale" pour laquelle notre méthode ne s'applique pas, et c'est cette classe que j'ai ensuite considérée [31] (voir la sous section "Exemples de jeux n'ayant pas de valeur asymptotique" ci dessus) pour construire un jeu compact dans lequel v_n et v_λ ne convergent pas.

Article [3]

Dans cet article en collaboration avec Jérôme Bolte (Toulouse School of Economics) et Stéphane Gaubert (INRIA Saclay et CMAP Ecole Polytechnique) nous nous intéressons aux jeux compacts dont les ensembles d'actions et les fonctions de paiement et de transition satisfont une hypothèse supplémentaire de *définissabilité dans une structure o-minimale*.
Rappelons que les structures o-minimales (voir [5]) peuvent être vues comme une abstraction de la géométrie semi-algébrique via une axiomatisation de ses propriétés essentielles. Une structure o-minimale consiste en une collection d'ensembles de dimension finie, appelés ensemble définissables (dans cette structure o-minimale). Cette collection doit satisfaire un certain nombre d'axiomes, en particulier elle doit être stable par les projections linéaires, et les ensembles définissables de dimension 1 doivent être exactement les unions finies d'intervalles. Les ensembles définissables satisfont certaines propriétés qualitatives des ensembles semi-algébriques comme le nombre fini de composantes connexes par exemple. L'utilisation des structures o-minimales est apparue récemment dans de nombreux domaines (dans le cadre des EDP ou de l'optimisation continue par exemple) afin d'éviter des phénomènes d'oscillation.
Les structures o-minimales nous permettent de travailler dans un cadre suffisamment souple pour modéliser de nombreux problèmes (par exemple tous ceux ne faisant intervenir que des fonctions analytiques définies sur des compacts) tout en étant suffisamment rigide pour interdire l'utilisation de fonctions continues "monstrueuses" telles que $x \sin \ln x$ apparaissant dans mon exemple [31]. Nous cherchons alors à démontrer la convergence de v_λ et v_n dans ce cadre. Dans l'esprit de l'approche opératorielle originelle, nous adoptons une approche opératorielle "géométrique" (et non analytique) :

- d'une part nous cherchons à déterminer si des hypothéses de définissabilité sur le paramètre du jeu entraînent que l'opérateur de Shapley est lui même définissable.
- d'autre part nous cherchons à déterminer si un jeu ayant un opérateur de Shapley définissable a nécessairement une valeur asymptotique.

Il s'avère que la réponse à la seconde question est oui (en utilisant des techniques classiques dans le cadre des structures o-minimales telles que le lemme de monotonie), et qu'on a même une propriété plus forte dite de valeur uniforme. La première question est nettement plus difficile. Tout d'abord, nous donnons un exemple simple de jeu semi algébrique pour lequel l'opérateur de

Shapley n'est pas semi-algébrique. Un jeu définissable dans une structure o-minimale n'a donc pas forcément son opérateur de Shapley définissable dans la même structure. Nous parvenons toutefois à démontrer que c'est le cas dans les deux cadres suivants :

- Si un des deux joueurs a un ensemble fini d'actions
- Si le jeu est "with switching controls" : dans chaque état la fonction de transition n'est contrôlée que par un seul des deux joueurs (pouvant dépendre de l'état ; et l'autre joueur pouvant avoir une influence sur le paiement courant)

Nous parvenons également à démontrer que, si les hypothèses de définissabilité sont importantes en ce qui concerne la fonction de transition (à cause du contre exemple [31]), il n'est pas nécessaire que les fonctions de paiement soit définissables dès qu'elles sont continues.
Le cas général reste ouvert : en particulier il serait très intéressant de réussir à démontrer que tout jeu définissable dans une certaine structure a son opérateur de Shapley définissable dans une structure o-minimale *plus grande*. Mais ceci semble difficile à établir.
D'autre part, notre article à des applications en dehors du cadre des jeux stochastiques : nous donnons des applications dans le cadre du contrôle sensible au risque ainsi qu'en théorie non linéaire de Perron-Frobenius (qui apparaît dans des problèmes de minimisation de croissance en dynamiques des populations).

Article [17]

Il est prouvé dans [13] que dans le cadre de la programmation dynamique la convergence uniforme des v_n sur l'espace d'état entraîne la convergence uniforme des v_λ vers la même limite, et vice-versa. Avec Miquel Oliu-Barton (Université Paris Dauphine) nous montrons dans [17] un résultat similaire, toujours dans le cas d'un seul joueur, mais dans le cadre du contrôle optimal en temps continu. Nous démontrons, sans hypothèse d'ergodicité, que la convergence uniforme de l'une ou l'autre des familles de valeurs entraîne la convergence uniforme de l'autre famille vers la même limite. Cela fait apparaître de manière claire des liens entre processus en temps discret et temps continu. Nous montrons également que l'hypothèse de convergence uniforme est essentielle en construisant un problème de contrôle optimal ou v_n et v_λ converge simplement mais pas uniformément, et où pour un certain état initial les limites sont différentes.

Article [7]

Dans cet article en collaboration avec Stéphane Gaubert (INRIA Saclay et CMAP Ecole Polytechnique) nous nous intéressons à des opérateurs non dilatants définis sur un espace X dit "hémimétriquement étoilé". Une hémimétrique d est une métrique sans l'hypothèse de symétrie. Un espace X munie d'une hémimétrique d est hémimétriquement étoilé s'il existe un point de base, et une famille de géodésiques reliant ce point de base à chaque autre point, tels qu'une certaine condition de convexité soit vérifiée entre 2 géodésiques quelconques de cette famille. Il s'agit d'une forme faible de courbure négative de l'espace (en particulier elle n'implique pas l'unicité des géodésiques).
Nous montrons alors que pour tout opérateur $T : X \to X$ non dilatant pour d, il y a égalité entre deux quantités :

- Le "taux de fuite" $\rho(T) := \lim_{k\to\infty} \frac{d(x,T^k(x))}{k}$ (nécessairement indépendant de x).
- $\inf_{y\in X} d(y, T(y))$.

Cette égalité se démontre grâce à une caractérisation au moyen d'horofonctions, qui sont certaines fonctions 1-Lipschitziennes qui apparaissent quand on compactifie l'espace (X, d).

Dans le cas particulier d'un opérateur de Shapley d'un jeu stochastique, cette égalité démontre qu'il existe nécessairement deux états initiaux pour lesquels v_n converge. Plus précisément, il existe un état initial qui est asymptotiquement le meilleur état de départ possible pour le joueur 1, et un état initial qui est asymptotiquement le meilleur état initial pour le joueur 2. On généralise ainsi un résultat[10] du à Kohlberg et Neyman.
D'autre part, en spécialisant notre théorème au cas d'opérateurs croissants définis sur le cône positif, nous généralisons une formule classique de Collatz-Wielandt.

1.4 Lien discret/continu dans les jeux répétés

Il est naturel de chercher un lien entre les jeux répétés en temps discret et les jeux répétés en temps continu. Sorin[22] propose par exemple de voir un jeu en n étapes (resp. λ escompté) comme un jeu joué sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ ou les joueurs ne jouent qu'aux instants $\frac{k}{n}$ (resp. λ, $\lambda + \lambda(1-\lambda)$, $\cdots$). Un jeu finiment répété ou λ-escompté pourrait donc être interprété comme une discrétisation d'un hypothétique "Jeu asymptotique" ou "Jeu limite" joué lui en temps continu. Ceci a été fait explicitement (section 5.3.2 de [22]) dans le cas spécifique d'un jeu absorbant appelé "Big Match", mais reste une heuristique dans le cas général.

Article [24] et [28]

Dans ces articles nous nous intéressons à des propriétés qualitatives des trajectoires optimales de jeux.
Dans [24] nous nous sommes intéressé avec Sylvain Sorin (UPMC) et Xavier Venel (Paris 1) à la question suivante : pour tout $t \in [0, 1]$, que peut on dire du comportement asymptotique (quand n tend vers $+\infty$) du paiement moyen accumulé lors des premières tn étapes lorsque les joueurs jouent optimalement dans le jeu en n étapes.
Nous considérons tout d'abord le cas de la programmation dynamique : il n'y a qu'un seul joueur. Nous montrons que dans ce cas, si les valeurs convergent uniformément (sur l'espace d'états), alors la propriété suivante est vérifiée : asymptotiquement le paiement moyen accumulé le long de trajectoires optimales est constant. Autrement dit, lorsque le joueur joue de manière optimale dans un jeu en n étapes, le gain accumulé au bout des premières tn étapes représente approximativement une fraction t du gain accumulé à la fin des n étapes. Ce résultat est étendu au cas d'un processus se déroulant en temps continu (contrôle optimal), ainsi que dans le cadre escompté, et est toujours vrai pour les jeux à deux joueurs dès qu'un des joueurs contrôle la dynamique.
Dans une deuxième partie on montre que ce résultat ne s'étend pas au cadre de jeux à deux joueurs et à somme nulle. Nous construisons notamment un jeu "régulier" (les valeurs convergent uniformément) avec un ensemble d'état infini présentant la caractéristique suivante : pour un certain état initial et pour tout entier n les joueurs peuvent jouer de façon optimale dans le jeu en $2n$ étapes d'une façon qui donne un paiement d'étape de 1 pendant les n premières étapes et de -1 pendant les n dernières étapes. Ainsi le gain moyen est de 1 pendant la première moitié du jeu alors que la valeur est de 0.
Dans [28] avec Sylvain Sorin nous nous intéressons à une généralisation de l'article précédent pour certains jeux à deux joueurs et somme nulle avec un ensemble fini d'états. Nous étudions an particulier le cas des jeux absorbants. Lorsque les joueurs ont un nombre fini d'actions, on montre que cette propriété de paiement constant le long des trajectoires optimale est vérifiée. Nous démontrons également des propriétés qualitatives de la mesure d'occupation des états au cours du temps lorsque les joueurs jouent de manière optimale : la probabilité d'être toujours dans l'état initial après une fraction t du jeu est égale à $(1-t)^\gamma$ pour un certain paramètre γ dépendant du jeu. Pour des jeux absorbants avec un nombre infini d'actions par joueurs, il existe également

des trajectoires optimales le long desquelles le paiement est constant, mais il peut également y avoir d'autres trajectoires optimales pour lesquelles ce n'est pas le cas.

Articles [30] et [27]

L'idée de départ de [30] est de considérer les analogues en temps continu des équations de définition de v_n et v_λ. Rappelons que

$$v_n = \Phi\left(\frac{1}{n}, v_{n-1}\right) \tag{3}$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda) = \Phi^\infty(\lambda, 0). \tag{4}$$

où l'on a noté $\Phi(\alpha, f) = \alpha\Psi\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} f\right)$. En étudiant des processus en temps continu on démontre que le comportement de v_n quand n tend vers $+\infty$ est le même que celui de la solution de l'équation d'évolution

$$u(t) + u'(t) = \Phi\left(\frac{1}{t}, u(t)\right) \tag{5}$$

lorsque t tend vers $+\infty$. De même, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, le comportement asymptotique de v_λ quand λ tend vers 0 est le même que celui de la solution de

$$u(t) + u'(t) = \Phi\left(t^{-\alpha}, u(t)\right) \tag{6}$$

lorsque t tend vers l'infini.
Ces résultats d'équivalence asymptotique sont intéressants pour plusieurs raisons. Premièrement, les démonstrations font intervenir des opérateurs maximaux monotones dans des espaces de Banach, et on généralise ainsi des résultats classiques originellement démontrés dans des espaces de Hilbert. Deuxièmement, dans le cas particulier où Ψ est l'opérateur de Shapley d'un jeu ces équivalences font apparaitre des liens entre des jeux en temps discret et en temps continu, qui sont explicités dans [27] et que je décris maintenant. Etant donné un jeu en temps discret, de durée d'étape constante égale à 1, Neyman [16] définit le jeu avec durée d'étape variable de la manière suivante : les joueurs jouent aux instants h_1, $h_1 + h_2$, $h_1 + h_2 + h_3$, $\cdots$, et pendant chaque intervalle de temps de longueur h_t le paiement d'étape et la probabilité de changer d'état sont tous deux proportionnels à h_t. Lorsque chaque h_t tends vers 0 le jeu est donc une approximation de plus en plus fine d'un jeu joué en temps continu. Les équivalences asymptotiques mentionnées plus haut montre alors que

- D'une part la valeur d'un jeu à durée variable et à horizon fixé converge vers la valeur d'un jeu en temps continu lorsque les durées d'étapes tendent toutes vers 0.
- D'autre part, que le comportement asymptotique, lorsque l'horizon tend vers $+\infty$, de la valeur d'un jeu à durée d'étape variable ne dépend pas de la durée spécifique de chaque étape. En particulier le jeu "de base" de durée d'étape constante égale à 1, et le jeu en temps continu ont même comportement asymptotique.

1.5 Perspectives

En ce qui concerne les jeux définissables dans des structures o-minimales, nos résultats ne concluent pas sur la question de la convergence en général. On sait construire des exemples de jeux semi algébriques pour lesquels ni l'opérateur de Shapley ni la fonction valeur ne sont semi algébriques mais dans ces exemples l'opérateur et la valeur sont définissables dans la structure log-exp. Il est donc possible que pour tout jeu définissable dans une certaine structure, son opérateur de Shapley soit définissable dans une structure plus riche, ce qui garantirait la convergence des valeurs.

Une autre direction de recherche serait de mieux comprendre la frontière qui sépare les jeux avec un bon comportement asymptotique des divers contre exemples. Une idée naturelle serait de “régulariser” des jeux irréguliers. Par exemple on peut perturber un jeu en ajoutant à chaque étape une probabilité ϵ que le nouvel état soit tiré selon une loi uniforme. Pour tout $\epsilon > 0$ le jeu est ergodique et admet donc une valeur limite v_ϵ, que se passe t-il quand ϵ tend vers 0 ? Un autre exemple est dans le cadre des jeux avec signaux publics sur l'état. Lorsque les joueurs observent l'état on sait que les valeurs convergent ; lorsque les joueurs ne l'observent jamais Ziliotto [37] a montré que ce n'était pas forcément le cas. Que se passe t-il lorsque l'état est observé avec probabilité p à chaque étape ? Si les valeurs convergent vers une limite v_p, que peut on dire de v_p quand p tend vers 0 ? De $v_{n,p}$ quand à la fois l'horizon n tend vers l'infini et la probabilité de voir l'état tend vers 0 ? Ceci est l'objet d'un travail en cours [36] avec Bruno Ziliotto.
Un problème similaire de double limite apparait dans les jeux avec durée d'étape variable, pour lesquels on peut considérer à la fois la limite quand l'horizon tend vers l'infini et quand la durée d'étape tend vers 0. Un cadre intéressant semble encore une fois celui des jeux à signaux publics sur l'état. Ceci est l'objet d'un travail en cours [29] avec Sylvain Sorin.
Concernant les propriétés qualitatives des trajectoires optimales de jeux répétés, une question intéressante concerne le comportement des stratégies optimales de jeux à information incomplète. Lorsque l'information est complète d'un côté il existe des stratégies ε-optimales du joueur informé de la forme suivante : il révèle une certaine quantité d'information à la première étape, puis plus jamais rien. Autrement dit, si on suit la trajectoire des croyances du joueur non informé il y a une singularité à l'instant initial puis la croyance reste constante. Que peut on dire du cas des jeux à manque d'information des deux côtés ? Existe il des jeux où la révélation est graduelle ? Que peut on dire de la vitesse de révélation de l'information ?

2 Ensemble d'équilibres et de paiements d'équilibres de jeux finis

Une autre direction, plus récente, de ma recherche consiste en l'étude de propriétés structurelles des ensembles d'équilibres de jeux. Contrairement à la partie précédente les jeux ne sont pas nécessairement à deux joueurs ni à somme nulle, et il n'y a pas de dynamique : le jeu est joué une unique fois. Dans ce cadre le concept de solution classique est celui de l'équilibre de Nash (en stratégies mixtes) ; son existence est démontrée en particulier dans le cas de jeux finis (i.e. lorsque tous les joueurs n'ont qu'un nombre fini d'actions disponibles). De plus on sait que génériquement un jeu fini admet un nombre impair (donc en particulier fini) d'équilibres de Nash. Il est cependant possible de construire des jeux dégénérés pour lesquels c'est faux. et la structure générale des ensemble d'équilibres de Nash est un sujet majeur d'étude, en particulier depuis l'article fondateur de Kohlberg et Mertens [9]. Citons deux résultats de la littérature : dans [4] il est démontré que pour tout nombre algébrique x il existe un jeu fini à trois joueurs et paiements entiers qui possède un unique équilibre de Nash, dans lequel le premier joueur obtient un paiement de x. Dans [12] les auteurs caractérisent complètement les ensembles de paiement d'équilibres de Nash des jeux finis à deux joueurs. Je m'intéresse à des extensions de ce type de résultats.

Article[35]

Avec Yannick Viossat (Paris-Dauphine) nous avons étudié les ensembles d'équilibres de Nash de jeux statiques finis. Il est classique que de tels ensembles sont nécessairement compacts, semi-algébriques et non vides. Nous montrons une réciproque à une projection près : pour tout ensemble E compact semi-algébrique et non vide de R^d il existe un jeu Γ à $N > d$ joueurs et 2 actions par joueur tels que E est exactement la projection de l'ensemble des équilibres de Nash de Γ sur ses d premières coordonnées. Si E est donné par des polynômes à coefficients entiers alors Γ peut être choisi avec des paiements entiers. Les preuves sont totalement constructives et la complexité de la construction est polynomiale en la complexité de l'ensemble semi-algébrique.

Article[32](preprint)

Dans la continuité du travail précédent, je m'intéresse aux ensembles de paiements d'équilibres de jeux statiques finis. La encore, il est classique que de tels ensembles sont compacts, semi-algébriques et non vides. On peut cette fois montrer une réciproque totale sans passer par des projections : pour tout tout ensemble E compact semi-algébrique et non vide de R^d avec $d \geq 3$, il existe un jeu fini Γ à d joueurs tel que E est exactement l'ensemble des paiements d'équilibres de Γ. La encore si E est donné par des polynômes à coefficients entiers alors Γ peut être choisi avec des paiements entiers, les preuves sont constructives, et la complexité de la construction est polynomiale en la complexité de l'ensemble semi-algébrique. Ces résultats permettent donc de lier la complexité de problèmes de décision sur les jeux à celle de problèmes faisant intervenir des polynômes ou des ensembles semi-algébriques. Par exemple, le problème de décider si un jeu admet au moins deux équilibres de Nash, qui est NP-complet pour 2 joueurs, est à partir de 3 joueurs dans la même classe de complexité que celui de déterminer si un ensemble semi algébrique est vide. En utilisant le fait qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de résoudre les équations diophantiennes dans $\mathbb{Z}$ (dixième problème de Hilbert), on montre de même que certains problèmes de décision sur les ensembles d'équilibres de Nash sont indécidables.

2.1 Persectives

Une première direction de recherche serait de comprendre mieux l'ensemble des équilibres corrélés de jeux finis, ce qui est fait dans le cas de deux joueurs dans [12].
Une autre direction consiste à étudier le même genre de problèmes pour des jeux dynamiques. Le cadre le plus simple est probablement celui des jeux sous forme extensive et à information parfaite : que peut on dire des ensembles d'équilibres ou d'équilibres sous jeux parfaits ? Ceci est l'objet d'un travail en cours [34]. Un problème sans doute plus ardu, et qui rejoindrait mes travaux sur les jeux répétés à somme nulle, serait la caractérisation des fonctions $\lambda \to v_\lambda$ qui sont les valeurs escomptées d'un jeu stochastique à deux joueurs et somme nulle. Même dans le cas des MDP une tellle caractérisation est extrèmement récente [11]. Un autre problème est celui de l'étude des ensembles d'équilibres de Nash de jeux statiques dépendant d'un paramètre. La compréhension de cette structure aiderait à comprendre les jeux répétés à N joueurs, le paramètre étant alors l'espérance de gain de chaque joueur dans le futur.

3 Analyse convexe

Article[18]

Avec Vianney Perchet nous avons établi un nouveau théorème du minimax ne faisant aucune hypothèse de régularité sur une fonction concave/convexe comme c'était le cas dans les divers théorèmes de la littérature. Nous faisons uniquement trois hypothèses de type géométrique et montrons également que ces hypothèses sont nécessaires en donnant 3 contre exemples quand l'une quelconque de ces hypothèses n'est pas vérifiée.

References

[1] R. J. Aumann and M. Maschler with the collaboration of R. E. Stearns, *Repeated Games with Incomplete Information.* MIT Press (1995).

[2] T. Bewley and E. Kohlberg, The asymptotic theory of stochastic games. *Mathematics of Operations Research* **1** (1976) 197-208.

[3] J. Bolte, S. Gaubert and G. Vigeral, Definable zero-sum stochastic games. *Mathematics of Operations Research* **40** (2015) 171–191.

[4] V. Bubelis, On equilibria in finite games. *International Journal of Game Theory* **8** (1979) 65–79.

[5] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures.* London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 248, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[6] H. Everett, Recursive games. In *Contributions to the Theory of Games, III* (H. W. Kuhn and A.W. Tucker, eds.), Annals of Mathematical Studies **39**, Princeton University Press (1957) 47-78.

[7] S. Gaubert and G. Vigeral, Asymptotic behavior of nonexpansive mappings in convex metric spaces. *Mathematical Proceedings*, **152-2** (2012) 341-363.

[8] E. Kohlberg, Repeated games with absorbing states. *Annals of Statistics* **2** (1974) 724-738.

[9] E. Kohlberg and J.-F. Mertens, On the Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica* **54-5** (1986) 1003–1037.

[10] E. Kohlberg and A. Neyman, Asymptotic behavior of nonexpansive mappings in normed linear spaces. *Israel Journal of Mathematics* **38** (1981) 269-275.

[11] E. Lehrer, E. Solan, and O. Solan, The value functions of Markov decision processes. *Operations Research Letters* **44** (2016) 587–591.

[12] E. Lehrer, E. Solan, and Y. Viossat, Equilibrium payoffs of finite games. *Journal of Mathematical Economics* **47** (2011) 48–53.

[13] E. Lehrer and S. Sorin, A uniform Tauberian theorem in dynamic programming. *Mathematics of Operation Research* **17** (1992) 303-307.

[14] J.-F. Mertens and S. Zamir, The value of two player zero sum repeated games with lack of information on both sides. *International Journal of Game Theory* **1** (1971) 39-64.

[15] J.-F. Mertens, S. Sorin and S. Zamir *Repeated Games*, Cambridge University Press (2015).

[16] A. Neyman, Stochastic games with short-stage duration. *Dynamic Games and Applications.* **3** (2013) 236-278.

[17] M. Oliu-Barton and G. Vigeral, A uniform Tauberian theorem in optimal control. *Annals of the International Society of Dynamic Games vol 12 : Advances in Dynamic Games* (2013) 199-215.

[18] V. Perchet and G. Vigeral, A minmax theorem for concave-convex mappings with no regularity assumptions. *Journal of Convex Analysis* **22** (2015) 537–540.

[19] D. Rosenberg, Zero-sum absorbing games with incomplete information on one side: Asymptotic analysis. *SIAM Journal of Control and Optimization* **39** (2000) 208-225.

[20] D. Rosenberg and S. Sorin, An operator approach to zero-sum repeated games. *Israel Journal of Mathematics* **121** (2001) 221-246.

[21] L.S. Shapley, Stochastic games. *Proc. Nat. Acad. Sciences* 39 (1953) 1095-1100.

[22] S. Sorin, *A First Course on Zero-Sum Repeated Games.* Springer (2002).

[23] S. Sorin, Asymptotic properties of monotonic nonexpansive mappings. *Discrete Events Dynamical Systems* **14** (2004) 109-122.

[24] S. Sorin, X. Venel and G. Vigeral, Asymptotic properties of optimal trajectories in dynamic programming. *Shankya A Mathematical Statistics and Probability* **72** (2010) 237–245.

[25] S. Sorin and G. Vigeral, Existence of the limit value of two person zero-sum discounted repeated games via comparison theorems. *JOTA.* **157-2** (2013) 564–576.

[26] S. Sorin and G. Vigeral, Reversibility and oscillations in zero-sum discounted stochastic games. *Journal of Dynamics and Games* **2** (2015) 103–115.

[27] S. Sorin and G. Vigeral, Operator approach to values of stochastic games with varying stage duration. *International Journal of Game Theory* **45** (2016) 389–410.

[28] S. Sorin and G. Vigeral, Limit optimal trajectories in zero-sum stochastic games . *Dynamic Games and Applications* **10** (2020) 555–572.

[29] S. Sorin and G. Vigeral, Zero-sum stochastic games with signals and varying duration. *Work in progress*

[30] G. Vigeral, Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces. *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variation* **16-4** (2010) 809 - 832.

[31] G. Vigeral, A zero-sum stochastic game with compact action sets and no asymptotic value. *Dynamic Games and Applications*, **3** (2013) 172-186.

[32] G. Vigeral, A characterization of sets of equilibrium payoffs of finite games with at least 3 players. *Preprint.*

[33] G. Vigeral, Iterated monotonic nonexpansive operators and asymptotic properties of zero-sum stochastic games. *Preprint.*

[34] G. Vigeral, A geometric characterization of subgame perfect equilibrium payoffs of games with perfect information. *work in progress.*

[35] G. Vigeral and Y. Viossat, Semi-algebraic sets and equilibria of binary games. *Operations Research Letters* **44** (2016) 19–24.

[36] G. Vigeral and B. Ziliotto, Finite zero-sum stochastic games with intermittent observation. *Work in progress.*

[37] B. Ziliotto, Zero-sum repeated games: Counterexamples to the existence of the asymptotic value and the conjecture maxmin $= \lim v_n$. *The Annals of Probability* **44** (2016) 1107–1133.

Enseignement et encadrement

Ci dessous les cours magistraux que j'ai enseignés depuis que je suis maître de conférence à Dauphine.
Au sein de Dauphine :

- “Théorie des jeux” en L3 MIDO (Mathématiques)
- “Analyse complexe” en L3 MIDO
- “Equations différentielles” en L3 d'économie
- “Analyse convexe approfondie” en M1 MIDO
- “Théorie des jeux” en M2 MASEF

J'ai également à plusieurs reprises encadré des oraux d'entrainement aux concours d'entrée aux grandes écoles à la fin de la L3.
En dehors de Dauphine :

- “Optimisation dynamique en temps discret et continu" en deuxième année de L'École Nationale de Statistique et d'Administration Économique (ENSAE).
- “Théorie des jeux” à l'Institut Tunis Dauphine, niveau L3.
- “Théorie des jeux” au M2 d'optimisation de Saclay.
- “Analyse” en CPES2

J'ai aussi encadré 11 mémoires de recherche : un en CPES2, 6 en L3 MIDO, un à l'Ecole des Mines de Paris, 2 en M1 MIDO et un en M2.
Depuis septembre 2019 je suis directeur de thèse (encadrant principal) de Thomas Ragel, en première année de doctorat à l'Université Paris-Dauphine. Le titre envisagé de la thèse serait "Valeur et stratégies optimales de jeux dynamiques à somme nulle". Les principaux axes de ses recherches concernent pour le moment les stratégies optimales implémentables par des automates finis dans des jeux stochastiques à somme nulle (dans la continuité de son mémoire de M2 que j'encadrais) ainsi que l'approchabilité faible dans les jeux stochastiques absorbants.
Je coencadre également depuis Septembre 2019 (encadrant secondaire) la thèse de Lucas Baudin, dont le directeur principal est Rida Laraki du LAMSADE, sur le thème des stratégies d'apprentissage dans des jeux répétés. L'idée est de mettre au point des algorithmes permettant aux joueurs de se coordonner sur des équilibres Pareto optimaux (du type coopération intiale, puis identification et punition d'un éventuel défecteur) avec des mémoires bornées.
J'effectue également plusieurs tâches administratives liées à l'enseignement. Depuis Septembre 2014 je suis responsable pédagogique de la troisième année (voie mathématiques) du "Cycle pluridisciplinaire d'enseignement supérieur " (CPES). Le CPES est un diplôme délivré par Paris Sciences et Lettres (PSL) qui se déroule, pour la troisième année en voie mathématiques, au sein de la L3 MIDO à Dauphine `https://cpes.univ-psl.fr/`. Depuis Septembre 2017 je suis également coordinateur des mathématiques dans le CPES Sciences. Je m'occupe à ce titre des programmes des matières de mathématiques, du recrutement des enseignants et de la coordination entre les différents cours de mathématiques.
Depuis Novembre 2020 je suis élu au Conseil de la Formation et de la Vie Etudiante, un des trois conseils centraux de Dauphine. A ce titre je suis membre de plusieurs commissions : commission initiatives votant les aides financières aux associations étudiantes ; Conseil de la documentation qui définit la politique documentaire de l'Université et donne son avis sur le budget de la bibliothèque.