Université Paris Dauphine,
L3, Année 2011-2012

Examen de théorie des Jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Question de cours. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vrai ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Sinon, donner un contre exemple.

- Dans un jeu sous forme extensive, tout équilibre de Nash est un équilibre sous-jeux parfait.

- Dans un jeu sous forme extensive, tout équilibre de Nash est un équilibre Bayesien parfait.

Exercice 1. On considère le jeu à trois joueurs suivant (on rappelle que le premier joueur choisit une ligne, le deuxième une colonne, le troisième une matrice). Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (1,1,2) \\ (1,2,1) & (2,1,1) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,1,1) & (1,2,1) \\ (1,1,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

1. Équilibres de Nash
   (a) Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash dans lequel un joueur au moins joue une stratégie pure (on montrera juste qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash dans lequel le joueur 3 joue la stratégie pure O ; tous les autres cas sont similaires).
   (b) Trouver tous les équilibres de Nash dans lesquels tous les joueurs jouent complètement mixte ; donner les paiements de chaque joueur dans chaque équilibre.
2. Équilibres corrélés.
   (a) Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.
   (b) Trouver une distribution d'équilibre corrélé donnant un paiement de $\frac{4}{3}$ à chacun.
   (c) Trouver une distribution d'équilibre corrélé donnant un paiement de $\frac{3}{2}$ au joueur 1 ; montrer que c'est le paiement maximum qu'il peut obtenir dans un équilibre corrélé.

Exercice 2. Trois entreprises se partagent un marché. Elles choisissent simultanément un prix $p_i \in [3,6]$, la demande à l'entreprise i est alors de $12 - 3p^i + \sum_{j \neq i} p^j$ et son profit est $g^i(p^1, p^2, p^3) := p^i(12 - 3p^i + \sum_{j \neq i} p^j)$.

1. Jeu en un coup

(a) Montrer que le profil $(3, 3, 3)$ est l'unique équilibre de Nash du jeu ; donner son paiement.

(b) Montrer que le paiement $g^i(p, p, p)$ est maximal pour $p = 6$; donner le paiement associé.

(c) Trouver la meilleure réponse $\overline{p}^i$ de l'entreprise i lorsque les 2 autres fixent un prix de 6 ; calculer $g^i(\overline{p}^i, 6, 6)$.

2. On s'intéresse désormais au jeu infiniment répété avec un taux d'escompte λ. On rappelle que si on note g_t le paiement à l'étape t, le paiement du joueur i dans le jeu λ-escompté est donné par $\gamma^i_\lambda(\sigma) = E_\sigma\left(\lambda \sum_{t=1}^{+\infty}(1-\lambda)^{t-1} g_t\right)$.

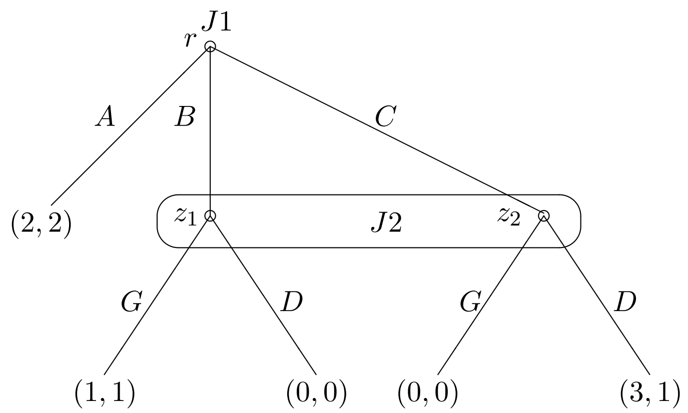
   Soit σ^i la stratégie du joueur i consistant, à chaque étape, à choisir un prix de 6 si toutes les entreprises ont choisi un prix de 6 à toutes les étapes précédentes, et un prix de 3 sinon.

   (a) Calculer $\gamma^i_\lambda(\sigma)$.

   (b) Montrer que σ est un équilibre du jeu répété lorsque le taux d'escompte est plus faible qu'un taux que l'on déterminera.

   (c) Pour quelles valeurs de λ le profil σ est il un équilibre sous-jeux parfait ?

Exercice 3. On s'intéresse au jeu à deux joueurs suivant.



1. Trouver tous les équilibres de Nash (x, y) en stratégies mixtes de ce jeu (on pourra commencer par déterminer la valeur de $x(B)$ dans tout équilibre, puis discuter suivant la valeur de $x(A)$).
2. Parmi ces équilibres, lesquels sont Bayesiens parfaits ?
3. Remarquer qu'une stratégie du Joueur 1 est strictement dominée par une autre, puis répondre à nouveaux aux 2 questions précédentes dans le jeu dans lequel on a éliminé cette stratégie. Commenter.