Université Paris Dauphine,
L3, Année 2014-2015

Examen d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Question de cours.

1. Donner la définition de l'indice d'un point z par rapport à une courbe γ. Soit $\gamma(t) = e^{it}$ définie sur $[0, 2\pi]$. Calculer l'indice de 0 par rapport à γ.
2. Soit h et g deux fonctions holomorphes, et z un pôle simple de $\frac{h}{g}$. Montrer que $Res(\frac{h}{g}, z) = \frac{h(z)}{g'(z)}$.

Exercice 1. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{2+\sin t}{2+\cos t} dt$.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et P un polynôme de degré k, tels que $|f(z)| \leq |P(z)|$ pour tout z.

1. Montrer qu'il existe un réel positif C tel que $|P(z)| \leq C|z|^k$ pour tout z de module plus grand que 1.
2. En déduire que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n > k$ (on pourra utiliser les inégalités de Cauchy).
3. On considère $g(z) = f(z) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^i$. Calculer $g^{(n)}(0)$ pour tout n.
4. En déduire que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

Exercice 3. Théorème des 3 cercles d'Hadamard

1. Question de cours : rappeler le théorème du module maximal pour une fonction f holomorphe définie sur un ouvert connexe U.
2. Soit f une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}^*$. Pour tout réel r, on note $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. En appliquant le théorème du module maximal à un ouvert bien choisi, montrer que pour tout $0 < a < b < c < +\infty$ on a $M(b) \leq \max(M(a), M(c))$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, montrer que $b^p M(b)^q \leq \max(a^p M(a)^q, c^p M(c)^q)$. Indication : considérer $z \to z^p f(z)^q$.
4. En déduire que pour tout réel α, $\alpha \ln(b) + \ln M(b) \leq \max(\alpha \ln(a) + \ln M(a), \alpha \ln(c) + \ln M(c))$.
5. Pour $\alpha = \frac{\ln(M(a) - \ln(M(c)}{\ln c - \ln a}$, en déduire le théorème des 3 cercles d'Hadamard :
$$\ln M(b) \leq \frac{\ln(c) - \ln(b)}{\ln(c) - \ln(a)} \ln M(a) + \frac{\ln(b) - \ln(a)}{\ln(c) - \ln(a)} \ln M(c).$$
(Autrement dit $\ln M(r)$ est une fonction convexe de $\ln(r)$).

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre réel non nul. Le but de l'exercice est de trouver une formule simple pour $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$. On considère la fonction $f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}$.

1. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en $\mathbb{Z} \cup \{ai\} \cup \{-ai\}$.
2. Montrer que $Res(f, n) = \frac{1}{n^2+a^2}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et calculer $Res(f, \pm ai)$.
3. Soit N un entier naturel strictement supérieur à $|a|$, et soit $R = N + \frac{1}{2}$. On considère la courbe $\gamma_R(t) = Re^{it}$ définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Décrire cette courbe et donner sans démonstration l'indice de chacun des pôles de f par rapport à γ_R.
4. En déduire que
$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi Ch(\pi a)}{aSh(\pi a)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(z)dz.$$
5. Montrer que
$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq \frac{2\pi^2 R}{R^2 - a^2} \sup_{|z|=R} \left\{ \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right\}.$$
6. On admet que $\sup_{|z|=R} \left\{ \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right\}$ est borné, pour tout $R = N + 1/2$, par une constante M indépendante de N. En déduire une formule simple pour $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.
7. Application : calculer la limite quand a tend vers 0 de $\frac{\pi Ch(\pi a)}{aSh(\pi a)} - \frac{1}{a^2}$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
8. Question subsidiaire si vous vous ennuyez : calculer de deux manières différentes la limite quand a tend vers 0 de $\frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{n^2}$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Expliquer brièvement pourquoi $\frac{1}{\pi^{2k}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ est un rationnel pour tout entier k.