Université Paris Dauphine,
L3, Année 2016-2017

Examen d'Analyse Complexe

Instructions :

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations. Les résultats du cours sont supposés connus et peuvent être utilisés sans démonstration à moins qu'elle soit explicitement demandée. Les seules questions possibles durant l'examen s'adressent au professeur responsable du cours et concernent d'éventuelles coquilles dans le sujet. Si besoin le professeur indiquera alors à l'ensemble des élèves les rectificatifs à apporter.

A l'issue de l'examen et au signal donné par le professeur, tous les élèves doivent immédiatement poser leur stylo, se lever, et rester à leur place jusqu'à ce que les copies aient été ramassées. Il n'y a pas d'exception, et en particulier il n'est pas autorisé de remplir nom/prénom des copies intercalaires après la fin de l'épreuve.

Question de cours.

1. Pour toute série entière de terme général a_n, rappeler la définition de son rayon de convergence R et montrer que $R = \sup\{r,\ a_n r^n \text{ est bornée}\}$.
2. Définir l'indice d'un point par rapport à un lacet. Calculer explicitement l'indice de 0 par rapport au lacet γ, avec $\gamma(t) = e^{it}$ sur $t \in [0, 2\pi]$

Exercice 1. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos(t)+\sin(t)} = \pi$. On s'attachera à être le plus précis possible dans la rédaction concernant d'éventuels calculs d'indice.

Exercice 2. Dans tout l'exercice $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$. Les deux parties sont indépendantes.

1. Dans cette question on suppose que $|f(z)| \leq \frac{e^{|z|}}{|z|}$ pour tout $z \neq 0$.
   (a) Montrer que pour tout $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! e^r}{r^{n+1}}$.
   (b) On rappelle (une forme faible de) la formule de Stirling : il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout n, $n! < M\sqrt{n}(n/e)^n$. En choisissant bien r dans la question précédente, montrer que $f^{(n)}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Dans cette question on suppose que $f^{(n)}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|f^{(n)}(0)| \leq \varepsilon$ pour tout $n > N$. Montrer que pour tout z,
   $$|f(z)| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right| + \varepsilon e^{|z|}.$$
   (b) Démontrer que $\frac{|f(z)|}{e^{|z|}}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$

Exercice 3. Le but de cet exercice est de démontrer la décroissance exponentielle des coefficients de Fourier pour une fonction analytique et périodique. Soit $s > 0$ et $U = \mathbb{R}\times]-s, s[= \{z \in \mathbb{C}$ tel que $Im(z) \in]-s, s[\}$. Soit f une fonction de U dans $\mathbb{C}$ vérifiant les 4 hypothèses suivantes :

i) f est holomorphe sur U

ii) f est bornée sur U : il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.

iii) f est 2π-périodique : pour tout $z \in U$, $f(z + 2\pi) = f(z)$

iv) f est développable en série de Fourier sur U : il existe une suite c_k, $k \in \mathbb{Z}$, telle que pour tout $z \in U$, on ait $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(ikz)$

On admet que les c_k peuvent se calculer de la manière suivante : $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$.

1. *Exemple* Dans cette question uniquement, $s = 1$ et $f(z) = e^{iz}$. Vérifier que les 4 hypothèses sont satisfaites.
2. *Préliminaire* Pour tout k on considère sur U la fonction $g_k(z) = f(z)e^{-ikz}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g_k est holomorphe et 2π-périodique.
3. Soit $0 < s' < s$, on considère le chemin $\gamma_{s'}$ formé des 4 segments $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 2\pi + is']$, $[2\pi + is', is']$, $[is', 0]$, parcourus une seule fois dans cet ordre(et donc dans le sens trigonométrique). Soit $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Justifier le fait que $\int_{\gamma_{s'}} g_k(z)dz = 0$.
   (b) Montrer que $\int_{[0,2\pi]} g_k(z)dz = 2\pi c_k$.
   (c) Justifier précisément pourquoi $\int_{[2\pi,2\pi+is']} g^{(k)}(z)dz + \int_{[is',0]} g^{(k)}(z)dz = 0$.
   (d) Montrer que $\left|\int_{[2\pi+is',is']} g_k(z)dz\right| \leq 2\pi M e^{ks'}$.
   (e) En déduire que $|c_k| \leq Me^{ks}$.
   (f) Montrer qu'on a également $|c_k| \leq Me^{-ks}$. Indication : trouver un autre chemin judicieux sur lequel intégrer g_k.

   Au final on a donc démontré que $|c_k| \leq Me^{-|k|s}$: on vient de démontrer la décroissance exponentielle des coefficients de Fourier avec k en fonction de la largeur d'analyticité s.
4. Application : en déduire qu'une fonction 2π-périodique analytique et bornée sur $\mathbb{C}$ est constante (on n'a évidemment pas le droit d'invoquer le théorème de Liouville).
5. Question bonus (à traiter si et seulement s'il vous reste du temps) :
   Soit $h(z) = 1/(10 - \cos z)$. Donner une majoration explicite des coefficients de Fourier de la fonction h à l'aide du travail effectué précédemment.
   Indication : Choisir un domaine sur lequel la fonction h est holomorphe et bornée, vérifier les hypothèses sur h, et déduire un facteur de décroissance exponentielle des coefficients. On ne demande absolument pas d'être optimal, plusieurs réponses sont possibles.