

Mémoire d'initiation à la recherche

Amina Bouchafaa

Sous la direction de M. Guillaume Viger

4 juillet 2015

Table des matières

Table des matières	2
1 Preuves du théorème de Brouwer par des outils combinatoires	5
1.1 Le lemme de Sperner pour prouver le théorème du point fixe	5
1.2 Equivalence entre théorème de Hex et théorème du point fixe	10
2 Applications du théorème du point fixe de Brouwer	15
2.1 Théorème de Perron-Frobenius	15
2.2 Existence d'équilibres de Nash dans un jeu fini à N joueurs	16
Bibliographie	19

Introduction

J'ai choisi de travailler, sous la direction de Monsieur G.Vigeral, sur un sujet assez prisé en mathématiques : le théorème du point fixe de Brouwer. Il est nécessaire de préciser son auteur puisqu'il y a plusieurs théorèmes du point fixe en mathématiques. Ce dernier se formule avec une simplicité étonnante. Il nous dit qu'une fonction f admet, sous certaines conditions, un point fixe. C'est à dire un x tel que son image par f est lui même. C'est un théorème d'existence, qui n'apporte pas de méthode générale de construction, mais qui reste très puissant et aux applications variées. Le sujet, tel qu'il a été proposé par M. Vigeral, consiste à démontrer ce théorème, mais d'une manière moins classique, puisqu'il utilise des outils combinatoires et très peu d'analyse.

Dans un premier temps, nous présenterons le lemme de Sperner suivie de sa démonstration. Puis, nous expliquerons comment ce lemme permet de démontrer le théorème de Brouwer. Dans un second temps, nous nous intéresserons à une démonstration plus récente qui utilise le jeu de Hex. Enfin, nous en donnerons deux applications.

La première partie de la démonstration concernant le lemme de Sperner est inspirée de la preuve faite ici [3]. La partie concernant le jeu de Hex est reprise des articles [1] et [2]. Ainsi que le polycopié de cours de M.Vigeral. [4]. Aussi, les pages Wikipédia sur le théorème du point fixe et les équilibres de Nash m'ont été utiles.



Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

Brève parenthèse historique : Luitzen Egbertus Jan Brouwer est un grand mathématicien hollandais du début du XX^e s, il réalise des études secondaires très brillantes, et très rapides. Brouwer est le fer de lance avec Poincaré des mathématiques intuitionnistes, par opposition au logicisme de Russel et Frege, et au formalisme de Hilbert. En particulier, pour Brouwer, un théorème d'existence ne peut être vrai que si on peut exhiber un processus, même formel, de construction. Cela le conduit notamment à rejeter la loi du tiers-exclu, qui dit qu'une propriété est ou vraie, ou fausse ! Les preuves ainsi obtenues sont souvent plus longues, mais Brouwer fut capable de réécrire des traités de théorie des ensembles, de théorie de la mesure, et de théorie des fonctions en se conformant aux règles de l'intuitionnisme.

Chapitre 1

Preuves du théorème de Brouwer par des outils combinatoires

1.1 Le lemme de Sperner pour prouver le théorème du point fixe

Théorème 1. *Lemme de Sperner*

Soit Δ un n -simplexe de \mathbb{R}^n .

$$\Delta = \{x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 \quad x_0, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

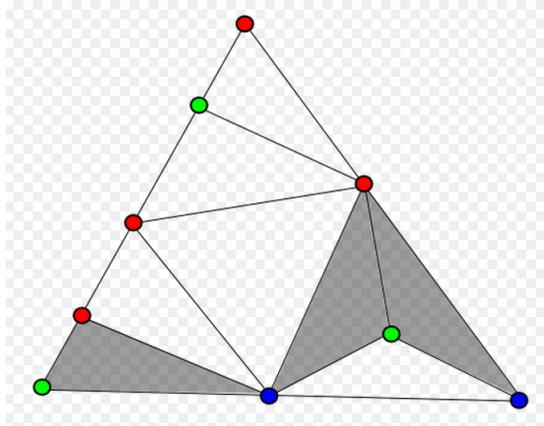
Ses faces sont des $(n-1)$ -simplexes. On le décompose en simplexes dont on colorie les sommets (y compris ceux du simplexe de départ) avec $n+1$ couleurs : $0, \dots, n$. La face opposée au sommet de couleur i ne doit pas contenir de sommets coloriés i . Alors il y a un nombre impair de simplexes petits omnicolorés (dont les sommets sont coloriés de 0 à n).

Plus précisément : En dimension 1, le lemme de Sperner affirme sur une droite avec deux sommets colorés vert et bleu, on doit changer de couleur un nombre impair de fois pour passer d'un sommet à l'autre. Sur, ceci est représenté par les deux couleurs, avec 5 changements de couleurs de haut en bas.



En dimension 2, il s'énonce ainsi : Soit un grand triangle de sommets V_1, V_2 et V_3 décomposé en un nombre fini de triangles qui s'ajustent ensemble, arête par arête. Supposons que les

sommets des triangles aient des couleurs choisies dans l'ensemble $\{1,2,3\}$ telle que V_i soit de la couleur i pour tout i et que tout sommet sur le segment V_i, V_j soit de couleur i ou j seulement. Les autres sommets intérieurs peuvent être coloriés arbitrairement avec 1, 2 ou 3. Alors, il doit y avoir au moins un triangle "tricolore" c'est à dire dont les sommets sont de couleurs différentes. Plus précisément, il y en a un nombre impair.

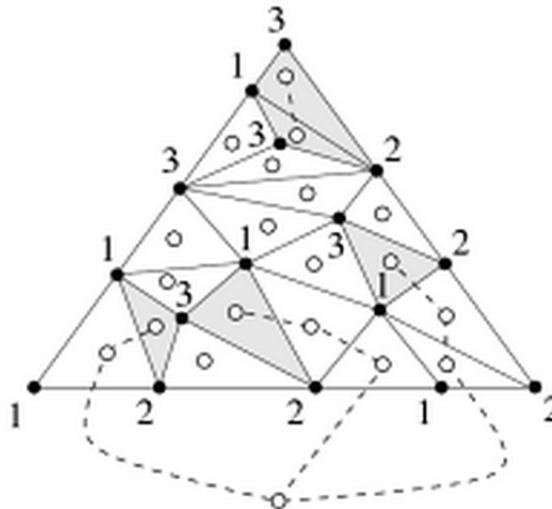


Triangle avec sommets : Bleu rouge et vert, on a trois triangles omnicoles.

Démonstration. Nous expliciterons ici principalement le passage de la dimension 1 à 2. Le passage à $n=2$ à $n=3$ est brièvement résumé à la fin de la preuve.

Soit donc le triangle tel qu'il est décrit dans le théorème. On dessine sur ce dernier le graphe dual partiel de sorte que chaque arête du nouveau graphe coupe un segment de la forme $(1,2)$ c'est à dire coupe une arête dont les deux sommets sont de couleurs 1 et 2.

On obtient donc trois types de sommets pour ce graphe. Des sommets de degré 0 qui sont dans les triangles dont les sommets ne sont pas coloriés (1 et 2). Des sommets de degré 1 qui sont à l'intérieur des triangles tricolores. Des sommets de degrés 2. Un sommet de degré k impair. Il s'agit de celui qui est à l'extérieur du triangle. En effet, entre V_1 et V_2 il y a un nombre de changement impair de couleur entre 1 et 2 (Hypothèse de récurrence).



Graphe dual du triangle

On utilise le lemme suivant qu'on admet

Lemme. Soit G un graphe fini dont l'ensemble de sommets est V et l'ensembles d'arêtes est E .

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Où $d(v)$, le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes dont v est le sommet.

Comme la somme totale des degrés est pair, on en déduit qu'il y a un nombre impair de sommets de degré 1. C'est à dire qu'il y a un nombre impair de triangles tricolores. Le passage de $n = 2$ à $n = 3$ est prouvée de manière analogue en utilisant une tétraèdrisation au lieu d'une triangulation. Le graphe dual qui traverse les segments colorés (1,2) sera pris cette fois comme celui qui traverse les triangles colorés (1,2,3). La preuve est similaire puisque les seuls sommets de degrés impairs seront contenus dans les tétraèdres (1,2,3,4) puis le lemme suffit pour conclure. □



Emanuel Sperner (1905 – 1980)

Théorème 2. Soit Δ le triangle de \mathbb{R}^3 de sommets $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Toute application $f : \Delta \rightarrow \Delta$ continue a un point fixe.

Démonstration. Supposons par l'absurde, qu'il n'existe aucun point v dans Δ tel que $f(v) = v$. On remarque v et $f(v)$ sont tous deux dans l'hyperplan $\{x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ de \mathbb{R}^3 . Donc l'hypothèse $f(v) \neq v$ implique qu'il existe au moins une coordonnée strictement positive de $f(v) - v$ et une autre strictement négative. En effet,

$$\sum_i (f(v) - v)_i = 0$$

On note $\delta(\Gamma)$ la longueur maximale d'une arête pour une triangulation Γ . On peut construire une suite infinie de triangulations Γ_k, Γ_{k+1} , de Δ telle que la suite des diamètres maximaux $\delta(\Gamma_k)$ converge vers 0.

Pour chaque triangle on définit une trois-coloration de ses sommets v en posant :

$$\lambda(v) := \min\{i, f(v)_i < v_i\}$$

c'est à dire que $\lambda(v)$ est le plus petit indice tel que la i -ème coordonnée de $f(v) - v$ soit négative. Cette définition est valide car v et $f(v)$ sont tous deux dans l'hyperplan décrit précédemment. On vérifie qu'on se trouve bien dans le cadre du lemme de Sperner : Chaque sommet e_i reçoit la coloration i , puisque la seule coordonnée de $f(e_i) - e_i$ qui peut être négative est la i -ème. Le lemme peut donc s'appliquer sur chaque triangulation Γ_k . Il y a un triangle tricolore dans chacune de ces triangulation, qu'on désignera par $(v^{k:1}, v^{k:2}, v^{k:3})$.

La suite $(v^{k:1})$ se trouve dans le compact Δ , donc possède une sous-suite convergente qu'on notera $(v^{k:1})$ pour simplifier. Cette sous suite converge vers un élément v de Δ . Cette limite vérifie $f(v)_i \leq v_i$ pour tout i ce qui contredit $f(v) \neq v$. □

Le théorème 2 se généralise en dimension quelconque. Par conséquent, pour prouver le théorème de Brouwer en dimension quelconque, il suffit d'utiliser la proposition suivante.

Proposition. *Soit K un compact convexe de \mathbb{R}^n . Alors K est homéomorphe à B la boule unité fermée de \mathbb{R}^n .*

Démonstration. Puisque K est un convexe compact quelconque d'intérieur non vide, on peut supposer que 0 appartient à K et qu'il contient B . Sinon, il suffit de le translater, ou de le dilater par homothétie.

On définit une fonction f de B dans K qui à un point x associe $T.x$, avec u le vecteur directeur de x et $f(0) = 0$.

On pose

$$\begin{aligned} f &: B \rightarrow K \\ u(x) &= \frac{x}{|x|} \\ f(x) &= T(u(x)).x \\ T(u) &:= \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid t.u \in K\} \end{aligned}$$

D'abord, f est bien définie : Si x est non nul, on cherche le supremum de la fonction continue $t \rightarrow t.u$ sur le compact non vide K .

Ensuite, $t.u$ appartient à K pour tout $t < T$, par convexité. K est fermé donc $T.u$ appartient à K . Si x est de norme 1, c'est réglé. Sinon, $T.x$ appartient à K par convexité.

D'abord, la fonction f ainsi définie est continue.

En 0 : $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 .

Pour x autre que 0 , on utilise, en l'admettant, le fait que la jauge d'un ensemble convexe compact, contenant 0 dans son intérieur, est continue.

Elle est aussi bijective.

f est injective. Soient, x et y deux vecteurs non nuls, tels que $f(x) = f(y)$ c'est à dire $T(u(x)).x = T(u(y)).y$. Alors, x et y sont colinéaires.

$$x = \lambda.y \text{ où } \lambda = \frac{T(u(x))}{T(u(y))} > 0 \Rightarrow u(x) = \frac{\lambda}{|\lambda|}.u(y) \Rightarrow u(x) = u(y) \Rightarrow T(u(x)) = T(u(y)) \Rightarrow x = y$$

f est surjective. Il suffit de remarquer que f est homogène de degré 1.

Soit $\alpha, \lambda > 0$,

$$f(\lambda.y) = T(u(y)).\lambda.y = \frac{\lambda}{|\lambda|}.T(u(y)).\lambda.y = \lambda.T(u(y)).y = \lambda.f(y)$$

$$\text{En utilisant } T(\alpha u) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid t.\alpha.u \in K\} = \alpha.\sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid t.u \in K\} = \alpha T(u).$$

Soit y dans K non nul, on peut associer l'antécédent $y/T(u(y))$, par ce qui précède :

$$f(y/T(u(y))) = y$$

f est bien surjective.

Montrons que l'inverse de f est continue.

En 0 , $|f(x)| \geq |x|$ car $T(u) \geq 1$ (B est contenue dans K) donc $f^{-1}(y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0 .

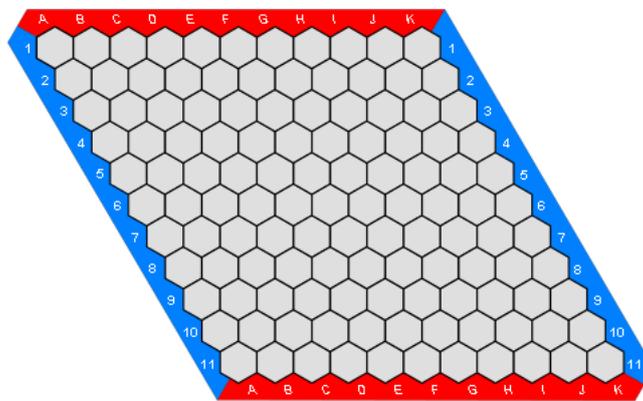
Pour y différent de 0 , par la bijectivité de f et ce qui précède on obtient : $f^{-1}(y) = y/(T(u(y)))$, qui garantit la continuité de f^{-1} .

Si K est d'intérieur vide, alors il est contenu dans un-sous espace vectoriel de dimension $n-1$, et donc en itérant cet argument et en utilisant la proposition on montre que tout compact convexe de \mathbb{R}^n est homéomorphe à la boule unité fermée de \mathbb{R}^d pour un $d \leq n$. \square

Ainsi, montrer le théorème de Brouwer pour le simplexe de \mathbb{R}^3 permet de l'étendre par héméomorphie à tout convexe compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^2 .

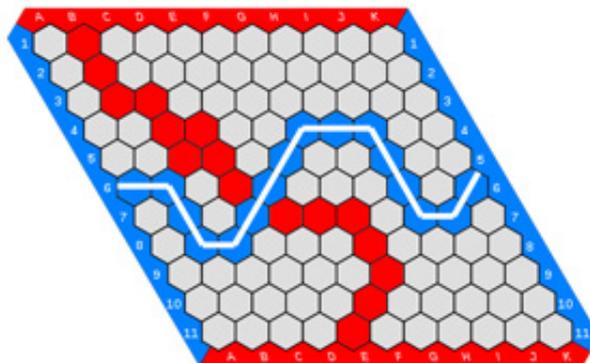
1.2 Equivalence entre théorème de Hex et théorème du point fixe

Définition 1. *Le jeu de Hex est un jeu de plateau à deux joueurs : rouge et bleu, par exemple. Le plateau est un losange pavé par des cases hexagonales, dont deux des côtés opposés sont peints de la couleur du premier joueur, et les deux autres de la couleur de l'autre joueur. Les joueurs posent tour à tour un pion sur une case et le but est de relier deux côtés de sa couleur par une chaîne de pions ininterrompue.*



Le plateau du jeu de Hex

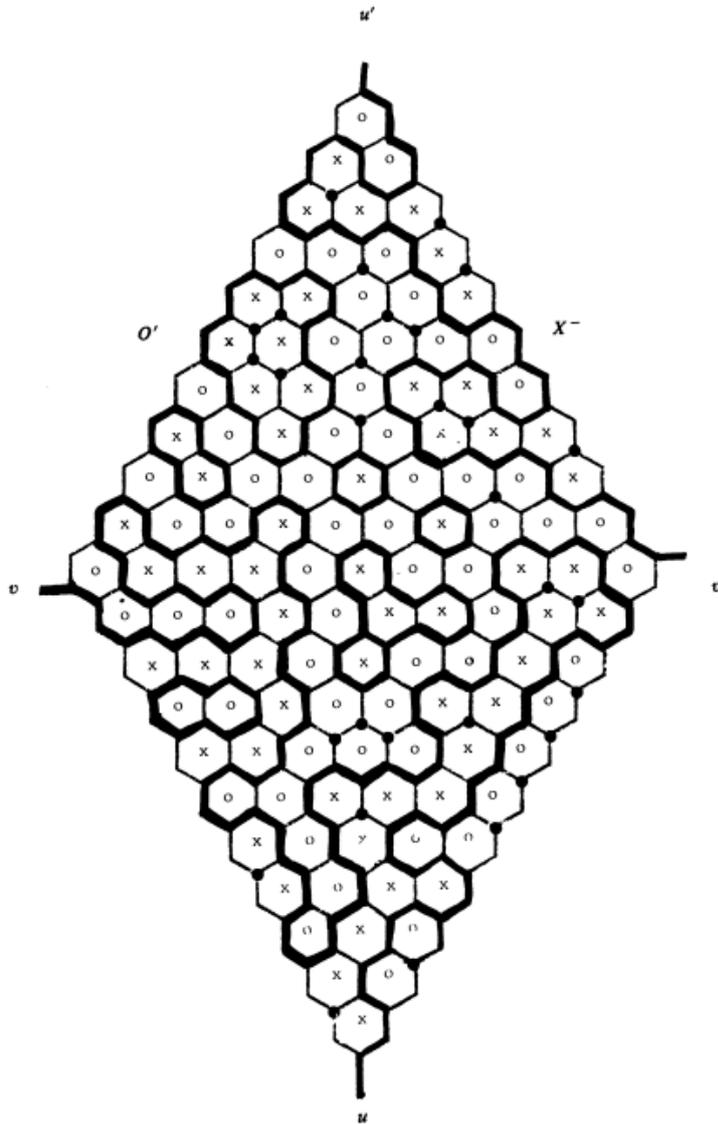
Théorème 3. *A Hex, il y a toujours un gagnant. En fait il existe un résultat plus fort qui dit qu'il y a exactement un gagnant. Mais nous utiliserons et démontrerons seulement la première partie de l'assertion.*



Ici Bleu a gagné

Démonstration. On assimilera le plateau à un graphe. Les quatre sommets sont prolongés par des segments u, v, u' et v' comme indiqué sur la figure.

1.2. EQUIVALENCE ENTRE THÉORÈME DE HEX ET THÉORÈME DU POINT FIXE 1

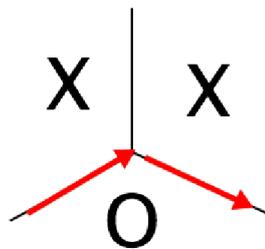


Graphe sur le plateau du jeu

On utilisera ce lemme élémentaire qu'on admettra :

Lemme. *Un graphe avec des sommets de degré au plus deux est soit : un sommet isolé, un chemin simple, ou un cycle.*

On choisit de démarrer de u . On construit ainsi un chemin en passant par les segments qui sont frontière commune à un x et un o . Comme indiqué ci-dessous.



Construction du graphe

On remarque alors que le chemin ainsi construit est *unique*. Puisque arrive à un point, on se retrouve comme dessiné, ou alors par symétrie des rôles joués par x et o , on aurait deux o et un x , dans tous les cas à partir de l'intersection il n'y a qu'une seule frontière qui respecte

la règle qu'on s'est fixé. Aussi, on ne passe jamais par un point qu'on déjà traversé. Ainsi, les segments (flèches rouges ci-dessus ou en gras sur la première image) forment un chemin simple à partir de u . Aboutissant à l'un des trois autres sommets de degré un, on construit aussi un chemin de x ou de o qui relie les frontières X à X' (ou O à O' respectivement). \square

Théorème de Hex pour prouver le théorème du point fixe

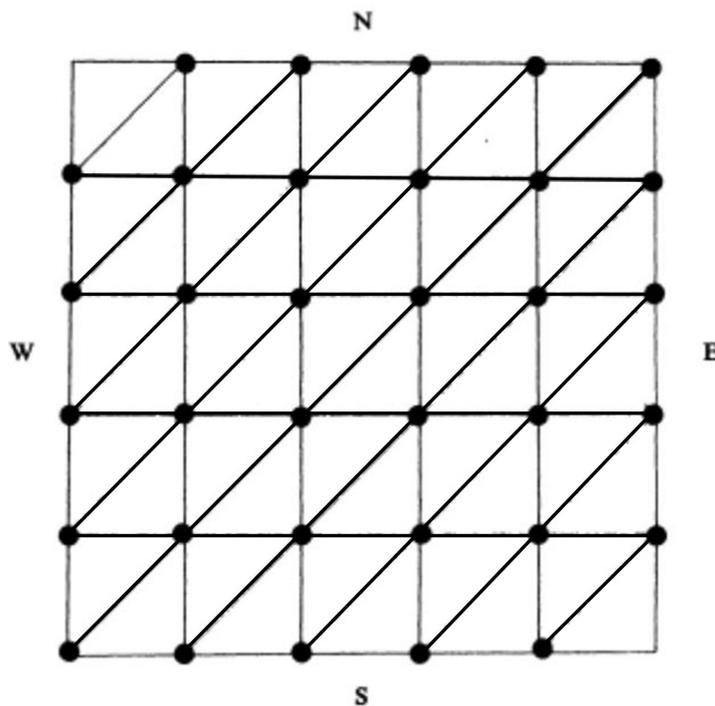
Plutôt que de travailler sur un plateau à cases hexagonales, on va jouer sur un carré. On note donc B_k le plateau de jeu carré de taille $k + 1$ suivant. Les côtés opposés seront notés N , S , E et O .

On l'assimilera à une partie (convexe compacte) de \mathbb{R}^2 munie de la norme $|x| = \max_i |x_i|$.

Définition 2. Deux points x et y sont tels que $x < y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout i .

Définition 3. Deux points x et y sur le plateau sont dits comparables si $x < y$ ou $y < x$.

Définition 4. Deux points z et z' sont dits adjacents s'ils sont comparables et si $|z - z'| = 1$.



Plateau du jeu modifié

Théorème 4. $f : B_k \rightarrow B_k$ une fonction continue. Alors, il existe x_0 dans B_k tel que $f(x_0) = x_0$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe x dans I^2 tel que $|f(x) - x| < \epsilon$ puis par compacité on peut extraire une sous suite convergente vers le point fixe.

L'uniforme continuité de f nous assure l'existence de $\alpha > 0$ qu'on choisira plus petit que ϵ tel que

$$\forall x, x' \quad |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Remarque : $f(x)$ désigne le point $:= (f_1(x), f_2(x))$.

On considère un plateau B_k tel que $1/k < \alpha$ et on définit les quatre ensembles H^+ H^- V^+ et V^- comme suit :

$$H^+ = \{z | f_1(z/k) - z_1/k > \epsilon\}$$

$$H^- = \{z | z_1/k - f_1(z/k) > \epsilon\}$$

$$V^+ = \{z | f_2(z/k) - z_2/k > \epsilon\}$$

$$V^- = \{z | z_2/k - f_2(z/k) > \epsilon\}$$

Cette écriture décrit simplement l'ensemble des points z/k qui sont déplacées par f de ϵ unités vers la droite (respectivement vers la gauche, le haut, le bas du point).

On montrera, dans ce qui suit, que l'union de ces quatre ensemble est strictement inclus dans le plateau B_k .

Définition 5. *Deux ensembles A et B de \mathbb{R}^2 sont dits contigus s'il existe a dans A et b dans B tel que a et b soient adjacents.*

On remarque, tout d'abord, que les ensembles H^+ et H^- (respectivement V^+ et V^-) sont non seulement disjoints mais en plus non contigus.

En effet, soient z dans H^+ et z' dans H^- :

$$\begin{aligned} & f_1(z/k) - z_1/k > \epsilon \\ & z'_1/k - f_1(z'/k) > \epsilon \\ \Rightarrow & f_1(z/k) - z_1/k + z'_1/k - f_1(z'/k) > 2\epsilon \\ & \text{or } z_1/k - z'_1/k < \alpha < \epsilon \\ \Rightarrow & f_1(z/k) - f_1(z'/k) > \epsilon \end{aligned}$$

Ceci contredit le choix de α .

On montre de la même manière que V^+ et V^- ne sont pas contigus. Notons $H = H^+ \cup H^-$ et $V = V^+ \cup V^-$. S'il existe un chemin connectant E à O dans H , il appartient soit à H^+ , soit à H^- . Mais H^+ correspond aux points de I déplacés vers la droite : il n'y en a pas dans le bord droit de I car f est à valeurs dans B_k .

Autrement dit, H^+ n'est pas connecté à E . De la même façon, H^- (resp. H^+ , V^-) n'est pas connecté à O (resp N , S). Il n'y a pas de chemin connectant E à O dans H . Ni de chemin connectant E à W dans V . Or d'après le théorème de Hex ce chemin existe. On en déduit que H et V ne recouvrent pas B_k . Ainsi, il existe un point qui n'est ni dans H ni dans V , qui vérifie donc $|f(x) - x| < \epsilon$. Par compacité, et pour $\epsilon = 1/n$ la limite de la suite extraite est un point fixe de f . Ce qui conclut la preuve. \square

Théorème de Brouwer pour prouver le théorème de Hex

Nous avons montré dans ce qui précède comment le théorème de Hex permet de démontrer le théorème de Brouwer mais en fait on peut montrer un résultat plus fort, il y a équivalence entre les deux théorèmes.

Démonstration. On travaille sur un jeu de Hex triangularisé comme dans la figure ci-dessus. On suppose que le théorème de Hex n'est pas vérifié.

Ainsi, il existe deux ensembles H et V disjoints et non contigus qui recouvrent entièrement B_k tel qu'il n'existe pas de chemin de points H reliant W à E ni de chemin V qui relie N à S .

Posons :

W^* l'ensemble des points connectés à W par un chemin dans H .

S^* l'ensemble des points connectés à N par un chemin dans V .

E^* l'ensemble H privé de W^* .

N^* l'ensemble V privé de S^* .

Soient e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 .

On définit la fonction de f de B_k dans B_k comme suit :

$$f(z) = z + e_1 \text{ si } z \text{ est dans } W^*$$

$$f(z) = z - e_1 \text{ si } z \text{ est dans } E^*$$

$$f(z) = z + e_2 \text{ si } z \text{ est dans } S^*$$

$$f(z) = z - e_2 \text{ si } z \text{ est dans } N^*$$

Cette définition est bien légitime. En effet dans le premier cas, l'image n'est pas dans B_k si et seulement si z est dans E . Or si c'était le cas, W^* joindrait W par un chemin continu à partir de E . Ce n'est pas possible par hypothèse. La deuxième est aussi bien définie car si z est dans E^* il ne peut pas être dans W . Par définition, E^* est H privé des points qui le connectent à W . Les deux dernières sont valables par les mêmes arguments.

On étend f à B_k tout entier en utilisant le fait que tout point du plateau s'écrit de manière unique comme combinaison convexe d'au plus trois sommets qui sont adjacents.

Lemme. Soient z_1 z_2 et z_3 trois sommets d'un triangle de \mathbb{R}^2 . Soit ρ une fonction qui à z_i associe $z_i + v_i$ où v_1 v_2 et v_3 sont trois vecteurs de \mathbb{R}^2 . Soit ρ^* son extension aux points du triangles. Alors, ρ^* possède un point fixe si et seulement si 0 appartient à l'enveloppe convexe de v_1 v_2 et v_3 . En effet, si $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$ alors $\rho(x) = \lambda_1 (z_1 + v_1) + \lambda_2 (z_2 + v_2) + \lambda_3 (z_3 + v_3)$ et $\rho(x) = x$ si et seulement si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

Dans notre démonstration ce qui fait figure des v_i est la base canonique de \mathbb{R}^2 . Or, 0 n'est pas dans leur enveloppe convexe. En effet, par liberté,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc on a trouvé f une fonction de B_k dans lui même, un convexe compact et qui n'admet pas de point fixe ce qui contredit le théorème de Brouwer. □

Chapitre 2

Applications du théorème du point fixe de Brouwer

2.1 Théorème de Perron-Frobenius

Théorème 5. Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a tous ses coefficients strictement positifs. Alors M possède une valeur propre strictement positive.

Démonstration. On considère l'ensemble convexe compact

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \forall i \quad \sum_i x_i \geq 1 \quad \sum_i x_i^2 \leq 1\}$$

La compacité vient du fait que c'est un fermé borné. La convexité est triviale. On note $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2} \forall x \in \mathbb{R}^n$.

On pose

$$f : S \rightarrow S \\ f(v) = \frac{Mv}{|Mv|}$$

La fonction f est bien définie car tous les coefficients de M sont strictement positifs. Comme v est dans S , il existe au moins un coefficient de Mv qui n'est pas nul (En effet, les coefficients de v sont positifs. La condition $\sum_i x_i \geq 1$ impose qu'il y en ait au moins un strictement positif). Donc $|Mv|$ ne s'annule jamais.

Elle est linéaire donc continue d'un ensemble convexe compact dans lui-même. Le théorème de Brouwer affirme qu'il existe un point fixe. Donc, il existe v_0 dans S tel que $f(v_0) = v_0$ i.e. $v_0 = |Mv_0|v_0$. Le vecteur non nul v_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre $|Mv_0| > 0$.

On connaît de nombreuses et importantes applications au théorème de Perron-Frobenius notamment en probabilité (Chaînes de Markov et recherche d'état stable par exemple) ainsi qu'en théorie des graphes. Une belle et récente illustration dans la vie courante est le fameux algorithme PageRank avec lequel Google classe les pages web.

□

2.2 Existence d'équilibres de Nash dans un jeu fini à N joueurs

Définition 6. Formellement un jeu sous forme normale est modélisé par

$$\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (g_i)_{i \in N})$$

- N l'ensemble des joueurs que l'on suppose fini.

- N ensembles non vides A^i . A^i étant l'ensemble d'actions du joueur i

- N fonctions continues g^i où la fonction g^i est la fonction de paiement du joueur i .

Proposition. x est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si

$$\forall i \in N, \forall a^i \in A^i \text{ tel que } x^i(a^i) > 0 \quad g^i(a^i, x^{-i}) = \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, x^{-i}).$$

Un jeu est donc un cadre formel où plusieurs agents décident d'une stratégie, leur utilité dépend des choix de tous. Avant Nash, la détermination de situation stable n'avait pas de méthode formelle, même si l'existence d'équilibres pour les jeux à somme nulle et à deux joueurs était connue depuis 1926, via le théorème du minimax de von Neumann. Les considérables possibilités qu'il a ouvertes lui ont mérité le Prix Nobel d'économie en 1994, qu'il a reçu conjointement à Reinhard Selten et John Harsanyi.

Théorème 6. Tout jeu fini à N joueurs sous forme extensive possède au moins un équilibre de Nash.

Démonstration. Pour tout i , on définit

$$f_i : X \rightarrow X^i$$

$$f_i(x)(a^i) = \frac{x^i(a^i) + [g^i(a^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+}{1 + \sum_{b^i \in A^i} [g^i(b^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+}$$

On note $[r]^+ = \max(r, 0)$

Et soit $f : X \rightarrow X$ donnée par $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$

Les fonctions de paiement g^i sont continues car linéaires. Le maximum de deux fonctions continues est continu. Le dénominateur est strictement positif puisque toujours supérieur à 1. Finalement f_i est continue pour tout i , donc f l'est aussi. De plus, elle est bien à valeurs dans X . En effet,

$$\sum_{a^i \in A^i} f_i(x)(a^i) = \frac{\sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i) + [g^i(a^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+}{1 + \sum_{b^i \in A^i} [g^i(b^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+} = \frac{1 + \sum_{a^i \in A^i} [g^i(a^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+}{1 + \sum_{b^i \in A^i} [g^i(b^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+} = 1$$

Si x est un équilibre de Nash du jeu, alors $f(x) = x$. En effet, si x est un équilibre de Nash alors $[g^i(b^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+ = 0$ car il n'y a pas de déviation profitable : $g^i(x) \geq g^i(a^i, x^{-i})$.

Réciproquement, si x est un point fixe alors x est un équilibre de Nash du jeu.

En effet, par linéarité $g^i(x) = \sum_a x^i(a, x^{-i}) g^i(a, x^{-i})$. Alors, il y a forcément un a tel que $x^i(a, x^{-i}) > 0$ et $g^i(a, x^{-i}) \geq g^i(x)$.

Sinon,

$$\begin{aligned} \forall a, x^i(a, x^{-i}) &= 0 \text{ ou } g^i(a, x^{-i}) < g^i(x) \\ \Rightarrow \sum_a x^i(a, x^{-i}) g^i(a, x^{-i}) &< \sum_a x^i(a, x^{-i}) g^i(x) = g^i(x) \\ \text{car } \sum_a x^i(a, x^{-i}) &= 1 \end{aligned}$$

C'est à dire $g^i(x) < g^i(x)$, ce qui est absurde.

Ensuite, puisque x est point fixe, en égalisant $f_i(x)(a^i) = x^i(a^i)$, pour le a décrit précédemment on obtient :

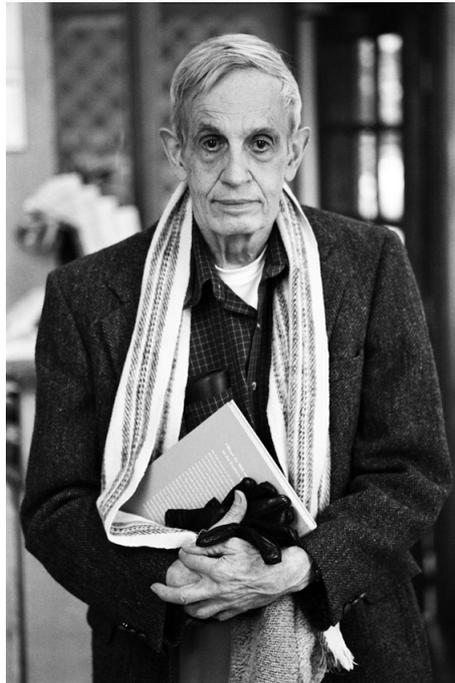
$$x^i(a^i) \sum_{b^i \in A^i} [g^i(b^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+ = [g^i(a^i, x^{-i}) - g^i(x)]^+ = 0$$

Chaque crochet est positif et la somme est nulle donc chaque crochet est nul.

$$g^i(b^i, x^{-i}) - g^i(x) \leq 0 \quad \forall b^i \in A^i \quad \forall i \in N$$

Ce qui se traduit par : le joueur i n'a pas de deviations profitables, donc x est un équilibre de Nash.

L'application du théorème de Brouwer à la fonction f suffit pour conclure sur l'existence d'un tel x . \square



John Forbes Nash (1928-2015)

Bibliographie

- [1] David Gale. The game of hex and the brouwer fixed-point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 86 :818–827, dec 1979.
- [2] Thomas Maarup. Everything you wanted to know about hex but were afraid to ask. *University of Southern Denmark*, 86 :9–19, dec 2005.
- [3] Martin Aigner-Gunter M.Ziegler. *Raisonnements divins*. Springer, 2006.
- [4] G. Vigerat. *Cours de théorie des jeux*. L3 Mido, 2012.