CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES

Mémoire d'initiation à la recherche
Cristaux temporels

Auteur :
Emile Kosseim

Encadrant :
Francois Huveneers

Juin 2020

Table des matières

Introduction

Un cristal est un morceau de matière dans lequel les atomes s'organisent selon un réseau régulier, périodique. La symétrie par translation des lois de la physique est donc brisée, puisque les atomes occupent de façon privilégiées les noeuds du réseau. En 2012, le physicien Franz Wilczek a proposé par analogie la réalisation de cristaux temporels, c'est-à-dire de systèmes qui brisent l'invariance par translation dans le temps.
Contrairement aux cristaux spatiaux qui sont stables à une température donnée pas trop élevée (techniquement on dit que ce sont des états d'équilibre), il a été démontré rigoureusement que les cristaux temporels ne peuvent pas exister à l'équilibre thermodynamique.
Cependant, alors que l'analogie avec les cristaux spatiaux touchait à sa fin, l'impossibilité d'avoir des cristaux temporels à l'équilibre thermodynamique apparaissant comme un $no - go\ theorem$, un groupe de physiciens composé de Nayak, Bauer et Else décidèrent de développer un nouveau moyen de définir les cristaux temporels hors de l'équilibre thermodynamique.

Le but de ce mémoire est d'étudier de façon formelle l'évolution de la définition de la notion de cristal temporel, en tentant d'en expliciter les étapes jusqu'à arriver à une formulation mathématique satisfaisante de ce qui peut caractériser un cristal temporel même hors de l'équilibre thermodynamique. Dans cette démarche, je me suis fondé sur des articles récents de niveau recherche. En revanche, je précise que mon étude est une étude formelle, je me suis cantonné à travailler au plus sur les modèles théoriques voire les modélisations numériques développés mais je ne me suis pas intéresser aux réalisations expérimentales qui ont pu être faites.

Je tiens à remercier mon encadrant Monsieur François Huveneers pour l'idée de ce sujet et pour m'avoir aidé et orienté dans mon travail.

Partie 1

Première approche et absence de cristaux temporels à l'équilibre thermodynamique

En première approche, il est naturel, vivant selon le point de vue de la relativité, de considérer ce qu'on veut appeler un cristal temporel en analogie avec ce qu'est un cristal "ordinaire", c'est-à-dire spatial. Or, un cristal dit spatial est caractérisé par une brisure de sa symétrie de translation spatiale. En effet certains sites dans l'espace vont être périodiquement privilégier formant alors un motif particulier. De même, en poursuivant l'analogie, dans le cas du cristal temporel il s'agit désormais non plus de sites dans l'espace mais donc d'évènements périodiquement "privilégies" dans le temps, et définis cette fois d'après une brisure de la symétrie de translation temporelle.
Cependant, cette approche reste confuse, de nombreux termes et concepts demeurent floues et en particulier briser la symétrie de translation temporelle semble loin d'être anodin. En effet, la symétrie de translation temporelle impose l'invariance des lois physiques dans le temps, donc briser cette dernière ne semble pas sans conséquence, en particulier lorsque le système que l'on tente de définir est "un cristal", donc quelque chose caractérisé habituellement par son état d'équilibre, sa stabilité.

En somme, une grande partie de cette confusion peut être attribué par le manque d'une définition mathématique précise de ce qu'est un cristal temporel. C'est la remarque que ce sont fait H.Watanabe et M.Oshikawa et ont alors proposé une définition précise du cristal temporel à l'équilibre, c'est-à-dire une définition naturelle qui suit l'analogie du cristal ordinaire. Avant d'en déduire le théorème qui fut le coeur de leur article : l'inexistence de cristaux temporels définis, ainsi, à l'équilibre.

1.1 Cadre

On se place dans le cadre mathématique de la mécanique quantique, c'est-à-dire dans un espace de Hilbert où l'on suppose vrai les postulats de la mécanique quantique, et on adopte la notation $bra - ket$ de Dirac.

Postulats de la mécanique quantique :

Principe de superposition : L'état d'un système quantique est défini par un vecteur qui est une combinaison linéaire, avec des coefficients complexes, d'états de base. Noté $|\psi(t)\rangle$.

Principe de correspondance : À toute propriété observable, par exemple la position, l'énergie ou le spin, correspond un opérateur hermitien linéaire agissant sur les vecteurs d'un espace de Hilbert. Cet opérateur est nommé observable.

Principe de quantification et décomposition spectrale : Les mesures ne peuvent pas donner d'autres résultats que ceux qui correspondent à des valeurs propres de ces opérateurs mathématiques. Les vecteurs propres qui correspondent à ces valeurs propres forment une base de l'espace des états de ce système.
On a :

$$\hat{A}|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle$$

où $\hat{A}|\alpha_n\rangle$ et a_n désignent, respectivement, l'observable, le vecteur propre et la valeur propre correspondante.
Tout état $|\psi(t)\rangle$ peut se décomposer de manière unique sur la base de ses vecteurs propres $|\phi_i(t)\rangle$:

$$|\psi\rangle = c_1 * |\phi_1(t)\rangle + c_2 * |\phi_2(t)\rangle + ...c_n * |\phi_n(t)\rangle + ...$$

Règle de Born : C'est une interprétation probabiliste des coefficients linéaires du principe de superposition. La mesure d'une grandeur physique représentée par l'observable $\hat{A}$, effectuée sur l'état quantique normalisé $|\psi(t)\rangle$, donne le résultat a_n, avec la probabilité P_n égale à $|c_n|^2$.

Principe de réduction du paquet d'onde : La mesure modifie l'état du système quantique mesuré de manière à faire disparaître les probabilités qui ne se sont pas réalisées.
Si la mesure de la grandeur physique A, à l'instant t, sur un système représenté par le vecteur $|\psi(t)\rangle$ donne comme résultat la valeur propre a_n, alors l'état du système immédiatement après la mesure est projeté sur le sous-espace propre associé à α_n

Equation de Schrödinger : L'état $|\Psi, t\rangle$ de tout système quantique non-relativiste est une solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi, t\rangle = \hat{H}|\Psi, t\rangle \tag{1.1}$$

1.2 Généralités

1.2.1 Approche naïve

Naïvement, les cristaux temporels peuvent être défini selon la valeur moyenne $\langle\hat{O}(t)\rangle$ d'une observable $\hat{O}(t)$: Si $\langle\hat{O}(t)\rangle$ a une dépendance temporelle périodique alors le système peut être vu comme un cristal temporel.

Remarque Cependant, la définition des valeurs propres $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ implique directement que la valeur moyenne de tout opérateurs d'Heisenberg, $\langle\hat{O}(t)\rangle := e^{i\hat{H}t}\hat{O}(0)e^{-i\hat{H}t}$ dans l'ensemble d'équilibre de Gibbs est indépendant du temps.

Preuve On rappelle que pour une observable $\hat{O}$, dans l'ensemble de Gibbs, c'est-à-dire l'ensemble muni de la mesure de Gibbs qui en quantique est associé à une forme linéaire sur les observables et donnée par $\frac{tr(\hat{O}e^{-\beta\hat{H}})}{Z}$, on a :

$$\langle\hat{O}\rangle := \begin{cases} \langle 0|\hat{O}|0\rangle & \text{pour} \quad T = 0 \\ \frac{tr(\hat{O}e^{-\beta\hat{H}})}{Z} & \text{pour} \quad T = \beta^{-1} > 0 \end{cases}$$

avec : $|0\rangle$ l'état fondamental et $Z := tr\big(e^{-\beta\hat{H}}\big)$ la fonction de partition.
On le montre pour $T > 0$, l'indépendance temporelle de $\langle\hat{X}\rangle$ pour $T = 0$ étant similaire.

$$\langle\hat{O}\rangle = \frac{tr(\hat{O}e^{-\beta\hat{H}})}{Z} = \sum_n \langle n|\hat{O}(t)|n\rangle\frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$$

Il convient de montrer alors que $\langle n|\hat{O}(t)|n\rangle$ est indépendant du temps.
On a :

$$\begin{aligned} \hat{O}(t) &= e^{i\hat{H}t}\hat{O}(0)e^{-i\hat{H}t} \\ \hat{H}|n\rangle &= E_n|n\rangle \end{aligned}$$

Et donc, en développant l'exponentiel de matrice, on en déduit que : $e^{i\hat{H}t}|n\rangle = e^{iE_nt}|n\rangle$
Donc :

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{O}(t)|n\rangle &= \langle n|e^{iE_nt}\hat{O}(0)e^{-iE_nt}|n\rangle \\ &= \langle n|\hat{O}(0)|n\rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque Mais il est encore trop tôt pour rejeter l'idée du cristal temporel à partir de cette observation, car, dès lors, un argument similaire pourrait remettre en question l'existence d'un cristal "ordinaire".
En effet, on pourrait naïvement définir un cristal selon une modulation spatiale de la valeur moyenne de l'opérateur de densité $\hat{\rho}(\vec{x}) = e^{-i\hat{\vec{P}}\cdot\vec{x}}\hat{\rho}(\vec{0})e^{i\hat{\vec{P}}\cdot\vec{x}}$. On peut alors montrer que cela soit à température nulle ou fini que $\langle\hat{\rho}(\vec{x}\rangle$ ne dépends pas de la position. Voire plus généralement on a la proposition suivante.

Proposition 1. *Si on se place dans un système de taille fini, alors la valeur moyenne d'équilibre de n'importe quel paramètre d'ordre s'annule.*

Pseudo-preuve C'est une conséquence du fait qu'un ensemble de Gibbs est toujours symmétrique. Par exemple si on considère le modèle d'Ising, H a la symétrie $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire qu'il est invariant par retournenment de tous les spins et donc la mesure de Gibbs aussi.

Remarque Cependant, cela ne remet évidemment pas en cause la possibilité de briser spontanément cette symétrie.

1.2.2 Brisure spontanée de symétrie

Un moyen pratique et couramment utilisé pour détecter une brisure de symétrie est d'appliquer un champs de brisure de symétrie.

Exemple On considère un matériau antiferromagnétique, donc d'aimantation totale nulle, sur un réseau cubique et on y applique un champs magnétique $h_S(\vec{R}) = \cos(\vec{Q}\cdot\vec{R})$ ($\vec{Q} = \frac{\pi}{a}(1\ldots1)$) en ajoutant un terme $-\sum_{\vec{R}} h_S(\vec{R})\hat{s}^z_{\vec{R}}$ à l'hamiltonien H avec $\vec{R}$ les différents sites du réseau et $\hat{s}^z_{\vec{R}}$ le spin en $\vec{R}$.

On considère la valeur moyenne du paramètre d'ordre macroscopique sous le champs de brisure de symétrie, ici le paramètre d'ordre est la magnétisation. Et on prends la limite de $V \longrightarrow \infty$ et $h \longrightarrow 0$ dans cette ordre. On arrive à une caractérisation d'une brisure spontanée de symétrie.

Définition 1. *Dans le cadre de l'application d'un champs de brisure de symétrie, si la limite de la valeur moyenne du paramètre d'ordre macroscopique ne s'annulent pas lorsque l'on fait tendre, dans cet ordre, le volume $V \longrightarrow \infty$ et la grandeur caractéristique du champs appliqué $h \longrightarrow 0$ alors cela est souvent vu comme une définition d'une brisure spontanée de symétrie (BSS).*

Remarque Dans le cas du cristal ordinaire, on applique un potentiel $v(\vec{x}) = h\sum_{\vec{G}}\cos(\vec{G}\cdot\vec{x})$ qui exhibe une dépendance *spatiale* périodique.

Finalement, cette approche est utile lorsque l'on veut définir un cristal ordinaire. En revanche, pour un cristal temporel, le champs de brisure de symétrie doit alors avoir une dépendance *temporelle* périodique. Or, en présence d'un telle champs c'est la notion d'"énergie" qui devient ambigu. L'énergie est alors défini seulement modulo la fréquence du champs périodique, ce qui rend alors compliqué le choix d'états lesquelles sont basés sur les valeurs propres de l'énergie.

Remarque On remarque ici la différence fondamentale qui existe entre briser la symétrie spatiale et briser la symétrie temporelle. En effet, comme l'énonce le théorème de Noether, la symétrie de translation temporelle est équivalente à la conservation de l'énergie. Briser cette symétrie n'est pas aussi évident que briser la symétrie spatiale et dès lors il faut prendre en compte ce que devient l'énergie, ou du moins considérer un concept qui en prends compte afin de pouvoir donner une définition plus robuste au cristaux temporels.

1.3 Défintion d'un cristal temporel à l'équilibre thermodynamique

En se plaçant toujours dans le cadre du cristal à l'équilibre thermodynamique, on cherche à définir une notion plus robuste de cristal temporel, c'est-à-dire qui peut s'appliquer à des Hamiltoniens non-triviaux, en particulier en s'intéresser à l'ordre à longue distance de la dépendance temporel (*Long range order*)

1.3.1 Dépendance temporel de l'ordre à longue distance (*Long range order LRO*)

Afin de contourner le problème de la définition du cristal temporel en utilisant un champs de brisure de symétrie dépendant du temps, on définit les cristaux temporels selon le comportement à longue distance des fonctions de corrélations. En effet, toutes brisures des symétries conventionnels peuvent être défini en termes de fonctions de corrélations, sans passer par un champs de brisure de symmétrie.

Définition 2. *On dit qu'un système a un ordre à longue distance ($Long - range\,order$) si la fonction de corrélation à temps égal du paramètre d'ordre local $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ vérifie :*

$$\lim_{V\to\infty}\langle\hat{\phi}(\vec{x},0)\hat{\phi}(\vec{x}',0)\rangle \longrightarrow \sigma^2 \neq 0 \tag{1.2}$$

pour $|\vec{x}'-\vec{x}|$ bien supérieur à toutes les échelles microscopiques.

On peut de façon équivalente utiliser le paramètre d'ordre global $\hat{\Phi}(\vec{x},t) := \int_V d^d x \hat{\phi}(\vec{x}',0)$ *pour qui l'ordre à longue distance est défini comme :*

$$\lim_{V\to\infty} \frac{\langle \hat{\Phi}^2 \rangle}{V^2} = \sigma^2 \neq 0 \tag{1.3}$$

Remarque On montre sans perte de généralité que le LRO $\sigma \neq 0$ garantit la BSS correpsondante. En effet, si le système à le LRO alors la limite de la valeur moyenne de son paramètre d'ordre ne s'annule pas dans la limite du champs de brisure de symétrie nulle ($h \longrightarrow 0$ prise après celle du volume $V \longrightarrow \infty$.
Ainsi, avec cette notion de LRO on peut contourner le concept de BSS et ses limites, et developper une définition plus générale de cristal temporel.

1.3.2 Définition cristal temporel selon LRO

Définition 3. *On peut définir un ordre cristallin par la fonction de corrélation. On dit qu'un système a un ordre cristallin spontanée si la fonction de corrélation à longue distance (Long-range correlation) tend vers une fonction périodique :*

$$\lim_{V\to\infty} \langle \hat{\phi}(\vec{x},0)\hat{\phi}(\vec{x}',0)\rangle \longrightarrow f(\vec{x}-\vec{x}') \tag{1.4}$$

pour $|\vec{x}'-\vec{x}|$ *assez grand.*

De façon équivalente

$$\lim_{V\to\infty} \frac{\langle \hat{\Phi}_{\vec{G}} \hat{\Phi}_{-\vec{G}} \rangle}{V^2} = f_{\vec{G}} \neq 0 \tag{1.5}$$

*signale un ordre de vecteur de densité (**a density wave order**) avec le vecteur d'onde* $\vec{G}$ *où* $\hat{\Phi}_{\vec{G}} = \int_V d^d x \hat{\phi}(\vec{x},0) e^{-i\hat{\vec{G}}\cdot\vec{x}}$

En analogie avec la caractérisation précédente d'un cristal spatiale en terme de LRO, on peut alors définir ce qu'est un cristal temporel à l'équilibre thermodynamique.

Définition 4. *On peut dire que le système est un cristal temporel si la fonction de corrélation ne s'annule pas pour* $|\vec{x}|$ *assez grand et tends vers une fonction* f *périodique non-triviale qui oscille dans le temps (ce n'est pas juste une constante dans le temps), c'est-à-dire tel que :*

$$\lim_{V\to\infty} \langle \hat{\phi}(\vec{x},t)\hat{\phi}(0,0)\rangle \longrightarrow f(t) \tag{1.6}$$

pour $|\vec{x}|$ *assez grand.*

En termes du paramètre d'ordre global $\hat{\Phi}$ *défini avant, on a :*

$$\lim_{V\to\infty} \frac{\langle e^{i\hat{H}t}\hat{\Phi} e^{-i\hat{H}t}\hat{\Phi}\rangle}{V^2} = f(t) \tag{1.7}$$

Définition 5. *Si* f *est une fonction périodique du temps et de l'espace, on appelle alors le système un cristal spatio-temporel, et dans ce cas on a :*

$$\lim_{V\to\infty} \frac{\langle e^{i\hat{H}t}\hat{\Phi}_{\vec{G}} e^{-i\hat{H}t}\hat{\Phi}_{-\vec{G}}\rangle}{V^2} = f_{\vec{G}}(t) \tag{1.8}$$

où $f_{\vec{G}}(t)$ *est la composante de Fourrier de* $f(t,\vec(x))$

1.4 Inexistence des cristaux temporels à l'équilibre

Après avoir donner une définition précise mathématiquement de ce que serait un cristal temporel,H. Watanabe et M. Oshikawa ont démontré l'inexistence d'un tel système à l'état fondamental ($T = 0$) et à température fini. Ils en ont déduits le théorème suivant.

Théorème 1. *Les cristaux temporels n'existent fondamentalement pas à l'équilibre.*

On se propose simplement d'étudier l'idée de la démonstration de l'inexistence des cristaux temporels à l'état fondamental noté $|0\rangle$

1.4.1 Preuve inexistence des cristaux temporels à l'état fondamental

Lemme Soit $|0\rangle$ l'état fondamental et E_0 l'énergie associé à cet état. Soient $\hat{A} = \int_V d^d x \hat{a}(\vec{x})$ et $\hat{B} = \int_V d^d x \hat{b}(\vec{x})$ deux opérateurs Hermitiens où $\hat{a}(\vec{x})$ et $\hat{b}(\vec{x})$ sont des opérateurs locaux, c'est-à-dire qu'ils n'agissent que sur $\vec{x}$. Alors, on montre que :

$$\frac{1}{V^2}\left|\langle 0|\hat{A}e^{-i(\hat{H}-E_0)t}\hat{B}|0\rangle - \langle 0|\hat{A}\hat{B}|0\rangle\right| \leq C\frac{t}{V} \tag{1.9}$$

Idée de la preuve
On utilise l'astuce de représenter l'évolution dans le temps par une intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\langle 0|\hat{A}e^{-i(\hat{H}-E_0)t}\hat{B}|0\rangle - \langle 0|\hat{A}\hat{B}|0\rangle\right| &= \left|\int_0^t ds \frac{d}{ds}\hat{A}e^{-i(\hat{H}-E_0)s}\hat{B}|0\rangle\right| \\ &\leq \int_0^t ds \left|\langle 0|\hat{A}(\hat{H}-E_0)e^{-i(\hat{H}-E_0)s}\hat{B}|0\rangle\right|\end{aligned}$$

On borne l'intégral à l'aide de l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned}\left|\langle 0|\hat{A}(\hat{H}-E_0^{1/2})e^{-i(\hat{H}-E_0)s}(\hat{H}-E_0^{1/2})\hat{B}|0\rangle\right| &\leq \sqrt{\langle 0|\hat{A}(\hat{H}-E_0)\hat{A}|0\rangle\langle 0|\hat{B}(\hat{H}-E_0)\hat{B}|0\rangle} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\langle 0|\left[\hat{A},\left[\hat{H},\hat{A}\right]\right]|0\rangle\langle 0|\left[\hat{B},\left[\hat{H},\hat{B}\right]\right]|0\rangle}\end{aligned}$$

Chacun de $\hat{H}$, $\hat{A}$ et $\hat{B}$ renvoie à une intégrale dans l'espace qui introduit un facteur de V tandis que chaque commutateur réduit un facteur de V.
En supposant que le commutateur de deux opérateurs $\hat{\phi_1}(\vec{x},t)$ et $\hat{\phi_2}(\vec{x}',t)$ à temps égale ne peut s'annuler que proche de $\vec{x}' = \vec{x}$. Alors, ainsi $\left[\hat{A},\left[\hat{H},\hat{A}\right]\right]$ est au plus de l'ordre de $V^{3-2} = V$. De même pour $\left[\hat{B},\left[\hat{H},\hat{B}\right]\right]$. Et donc en combinant les résultats des deux calculs précédents, on montre le résultat. □

Preuve D'après le lemme, on en déduit que $f(t)$ dans l'équation (1.7) est dépendante du temps, en posant $hatA = \hat{B} = \hat{\Phi}$ et en prenant la limite de $V \longrightarrow \infty$ pour $t = o(V)$. □

Partie 2

Cristaux temporels hors de l'équilibre : *Floquet discrete time crystal*

Étant donné le théorème précédent, on se place désormais en dehors de l'équilibre et en particulier on considère des systèmes quantique soumis à un forçage périodique dits *periodically driven discrete systems*, en d'autres termes des systèmes que l'on va exciter périodiquement à une certaine fréquence. Dans cette partie, nous allons étudier le cas du cristal temporel quantique de Floquet qui est défini à partir d'un hamiltonien particulier, ce qui va nous permettre d'exhiber les caractéristiques d'un cristal temporel hors d'équilibre voire va nous amener à la conjecture d'une définition mathématique de cette notion à partir d'un cas simplifié.

2.1 Cadre

On considère un système quantique que l'on va exciter périodiquement selon une période T et on observe que la réponse du système à ce forçage est de 2T. Donc la réponse du système est moins symétrique que le terme de forçage, il y a donc une brisure spontanée de symétrie temporelle et le système dans son ensemble peut être considéré comme un cristal temporel. Pour étudier ce système on s'intéresse à l'évolution de son Hamiltonien. On se place toujours dans le cadre mathématique de la mécanique quantique.

2.1.1 Définitions

Définition 6. *On appelle système de Floquet, un système qui évolue selon un Hamiltonien local qui dépends du temps et qui est périodique :* $H(t+T) = H(t)$

Définition 7. *Dans le cas d'un système de Floquet, on peut définir un opérateur d'évolution unitaire à partir de l'Hamiltonien H, dit Unitaire de Floquet et noté U_T, en posant :* $U_T = e^{-iHT}$

Remarque U_T caractérise l'évolution du système pendant la période complète T.

Définition 8. *U_T peut être diagonalisé et ses états propres sont appelés états propres de Floquet. On les note* $|\psi_j\rangle$.

Remarque Les états propres de l'Unitaire sont les mêmes que les états propres de l'Hamiltonien auquel il est associé.

Remarque Les états propres de Floquet sont périodiques à une phase près, ils vérifient :

$$|\psi_j(t+T)\rangle = e^{i*\epsilon_j*T}|\psi_j(t)\rangle$$

Conséquence Pour toutes observables vu dans ces états propres de Floquet, leurs valeurs moyennes est périodique de période T.

2.1.2 Cluster-decomposition

Si on veut que le système soit un cristal temporel, qu'il exhibe une brisure spontanée de symétrie temporelle, donc que le système n'exhibe pas une période T mais 2T ou plus, on cherche alors à ce que les états propres de U_T ne se réalisent pas.

Définition 9. *On dit qu'un état* $|\phi\rangle$ *satisfait la propriété de "cluster-decomposition" si pour toutes observables* $\hat{O}_1$ *et* $\hat{O}_2$ *on a :*

$$\langle\phi|\hat{O}_1(x)\hat{O}_2(y)|\phi\rangle \longrightarrow \langle\phi|\hat{O}_1(x)|\phi\rangle\langle\phi|\hat{O}_2(y)|\phi\rangle \quad pour\ |x-y| \to \infty$$

Théorème 2. *Un état est physiquement raisonnable, il est dit réalisable si il satisfait la propriété de cluster-decomposition.*
Dans le cas contraire, on appelle cet état un chat de Schrodinger ou un "cat-state".

Exemple On considère un système quantique composé de plusieurs spins et on note $|+\rangle$ l'état où tous les spins sont dirigés vers le haut et $|-\rangle$ l'état où tous les spins sont dirirgés vers le bas.
Alors on peut vérifier que $|+\rangle$ et $|-\rangle$ vérifient la propriété de cluster-decomposition, ils sont réalisables mais $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle \pm |-\rangle\big)$ ne l'est pas, c'est un *cat-state.*

On déduit de ce qui précède une propriété fondamentale des cristaux temporels de Floquet :

Proposition 2. *Dans un cristal temporel de Floquet, les états propres de Floquet sont des cat-states.*

2.1.3 Rigidité du système

Naïvement on pourrait reprendre l'exemple précédent, de la chaîne de spins et appliquer un hamiltonien qui retourne tous les spins d'un angle π. Puis si on recommence alors la période va doubler. On pourrait alors croire que l'on a un cristal temporel car on retourne tous les spins selon une période T et le système revient à ce qu'il était à son état initial selon une période 2T. Il semble donc bien y avoir une brisure de symétrie.

Cependant, ce système ne peut être considéré comme un cristal temporel car il n'est pas rigide. Ce système est triviale, il ne prend pas en compte les interactions entre les spins, et instable, si l'hamiltonien que l'on applique ne retourne pas les spins d'un angle exactement $/pi$, alors il va dégénéré en quelques périodes et étant donné que l'on ne prend pas en compte les interactions entre les spins il n'aura pas la capacité de se synchroniser, de s'auto-corriger.
En effet, il convient d'évoquer même de façon informelle une notion très importante sur laquelle Nayak et son équipe s'appuient fortement mais qu'on n'approfondira pas dans ce mémoire, il s'agit de la notion de rigidité d'un système, on parle aussi de robustesse, voire Nayak parle d'auto-correction lors de sa conférence à Aspen. En somme, cette notion permet de distinguer les cristaux temporels de Floquet triviaux, comme un coeur qui bat,et ceux non-triviaux, commme l'exemple que l'on va voir dans la suite, même si il n'est pas parfait.

2.2 Modèle MBL du cristal temporel de Floquet

2.2.1 Idée

On reprend l'exemple de la chaîne de spins mais on y ajoute de l'interaction et du désordre. L'interaction va permettre au système d'avoir le désir de se synchroniser et le désordre va lui donner l'habilitée de le faire, en diversifiant les "leaders".

2.2.2 Présentation du modèle

Modèle On utilise un forçage "stroboscobique" de deux étapes, c'est-à-dire qu'on applique un premier Hamiltonien pour un intervalle t_0 puis un second pour un intervalle t_1.

Dans un premier temps, on applique l'hamiltonien H_{MBL} qui est un hamiltonien défninit d'après la théorie des systèmes locaux à plusieurs corps ou *many-body localized system* (MBL) par :

$$H_{\mathrm{MBL}} = \sum_i J_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \ + \ \sum_i h_i^z \sigma_i^z + h_i^x \sigma_i^x$$

Il est composé de deux parties au rôles différents, la première qui agit sur les interactions entre les spins et la deuxième qui apporte du désordre au système.
Il est caractérisé par le fait que ses états propres sont localement selon la direction z des spins.

Dans un second temps, on applique l'hamiltonien $H_{\pi-pulse}$ qui retourne tous les spins selon la direction z. Il est définit par :

$$H_{\pi\text{-pulse}} = \frac{\pi}{2t_1} \sum_i \sigma_i^x$$

Remarque On retrouve les caractéristiques de ces hamiltoniens, en particulier celui de $H_{\pi-pulse}$ lorsque l'on écrit l'unitaire de Floquet du système :

$$U_F = e^{-iH_{\mathrm{MBL}}t_0} e^{i\frac{\pi}{2}\sum_i \sigma_i^x}$$

Or on a :

$$e^{i\frac{\pi}{2}\sum_i \sigma_i^x} = \prod_j i\sigma_i^x$$

Rappel On rappelle les matrices de Pauli :

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Interprétation du modèle

Remarque On remarque que les états propres $|\psi_j\rangle$de l'évolution totale sur la période $T := t_0 + t_1$ sont des sommes cohérentes des états propres de H_{MBL} selon la configuration du spin selon la direction Z, notés $|+_j\rangle$ et leurs versions retournées, notés $|-_j\rangle$. On a grossièrement : $|\psi_j\rangle = |+_j\rangle \pm |-_j\rangle$

Ainsi, les états propres de l'unitaire définis sur une période T ne vérifient pas la propriété de *cluster-decomposition*. En revanche, on montre numériquement que pour un hamiltonien H_{MBL} robuste, on retrouve que le système exhibe une période 2T.

2.3 Émergence d'une propriété de localité caractéristique du cristal temporel

2.3.1 Idée

On reprends le modèle MBL de Floquet que l'on restreint et on tente à partir de ce dernier de donner la conjecture d'une défnition formelle de ce qui caractérise un cristal temporelle de Floquet en terme de la localité de l'Hamiltonien effectif de son unitaire de Floquet.
On rappelle que ce que l'on entend par opérateur local est qu'il ne va agir localement, que sur certains spins.

2.3.2 Définition formelle d'un cristal temporelle de Floquet en terme de la localité

Conjecture 1. *Un cristal temporelle de Floquet est un système dont l'Hamiltonien effectif H_T de l'unitaire U_T qui caractérise l'évolution du système sur une période T n'est pas local. Mais, il existe un entier k tel que H_{kT}, l'hamiltonien effectif de l'unitaire U_{kT} qui caractérise l'évolution du système sur kT est local.*

Remarque On met ici l'accent sur le fait que dans un cristal temporel il semble y avoir l'émergence d'une propriété de localité qui n'existait pas à la base dans le système.

2.3.3 Elements de preuve dans le cas du modèle H_{MBL} restreint

On se restreint à un modèle où l'on ne prends pas en compte le désordre et $J_i = J$ est une cosntante, donc on a :

$$H_{\mathrm{MBL}} = J\sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$$

On note U_T et U_2T les unitaires de Floquet qui caractérisent respectivement l'évolution du système sur une période T et sur $2T$.
On note H_T et H_2T les Hamiltoniens effectifs respectivement de U_T et U_2T.
On a donc : $U_T = e^{-iH_TT}$ et $U_{2T} = e^{-2iH_{2T}T}$
On note $|\psi_T\rangle$ et $|\psi_{2T}\rangle$ respectivement les états propres de U_T et de U_{2T}. Et on note $|-\psi_T\rangle$ l'état qui correspond à la version retourné de $|\psi_T\rangle$
De plus on sait que $|\psi_T\rangle$ est un état réalisable physiquement mais que $|\psi_{2T}\rangle$ est de la forme $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_T\rangle \pm |-\psi_T\rangle)$ et est donc un cat-state.

Montrons que H_2T est local D'après le modèle MBL on a :

$$U_{2T}|\psi_T\rangle = e^{-2it_0 H_{\mathrm{MBL}}}|\psi_T\rangle$$

Or $|\psi_T\rangle sontdestatsclassiquesDonconendduitque$: $H_{2T} = \frac{to}{T} H_{\mathrm{MBL}}$Or H_{MBL} est une somme de termes locaux donc est local.
Donc H_{2T} est local.

Montrons que H_T n'est pas local On a :

$$U_T|\psi_{2T}\rangle = e^{-iTH_T}|\psi_{2T}\rangle$$

Or l'hamiltonien effectif d'un unitaire a les mêmes états propres. Et donc d'après la décomposition spectrale en notant λ_k associées aux états propres $\psi_{2Tk}\rangle$, on peut écrire H_T sous la forme :

$$H_T = \sum_k \lambda_k |\psi_{2Tk}\rangle\langle\psi_{2Tk}|$$

Or les $|\psi_{2Tk}\rangle$ étant des cat-states, $|\psi_{2Tk}\rangle\langle\psi_{2Tk}|$ n'est pas local et donc H_T ne l'est pas non plus.
□

Conclusion

En conclusion, la notion de cristal temporel est une notion récente dont la définition a évolué depuis son énoncé en 2012. Après avoir été mis de côté en 2015, suite à la démonstration de son non-existence à l'équilibre, aujourd'hui elle apparait comme l'exemple de ce que pourrait être un nouvel état de la matière hors d'équilibre. Lors de ce mémoire, nous avons présenté le modèle du cristal temporel de Floquet, lequel a depuis été l'objet de plusieurs preuves expérimentales. Mais cela reste un modèle très particulier, et de nombreuses questions restent encore ouverte aujourd'hui. En particulier, la question de la surchauffe inévitable du cristal temporel à long terme est au coeur des recherches actuelles et de nombreuses pistes ont déjà été envisagé faisant appel notamment à la notion de préthermalization.

Bibliographie

[1] Bela Bauer Dominic V. Else and Chetan Nayak. Floquet time crystals. arXiv :1603.08001v4 8 Jun 2016.

[2] Chetan Nayak Dominic V. Else, 1 Christopher Monroe and Norman Y. Yao. Discrete time crystals. Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2020. 11 :467–99 8 2020.

[3] Haruki Watanabe, Masaki Oshikawa. Absence of quantum time crystals. arXiv :1410.2143v3 18 Jun 2015.

[4] Franck Wilzcek. Quantum time crystal. arXiv :1202.2539. 2012.

[5] N. Y. Yao and al. Discrete time crystals : Rigidity, criticality, and realizations. Phys. Rev. Lett. 118, 030401 — Published 18 January 2017 DOI : 10.1103/PhysRevLett.118.030401.

[6] J. Zhang1 and al. Observation of a discrete time crystal. doi :10.1038/nature21413 8 Jun 2016.