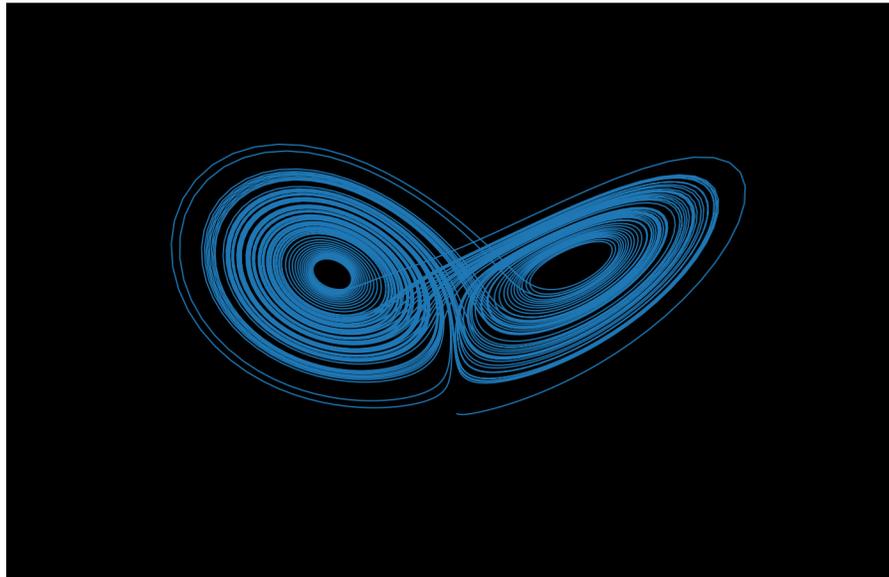


CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES -
UNIVERSITÉ PSL

MÉMOIRE DE L3

Le système de Lorenz



Julie MUHLKE
Année 2019-2020

Encadrante : Daniela TONON
Laboratoire CEREMADE

Table des matières

1	Introduction	2
2	Caractéristiques générales de l'équation de Lorenz	2
2.1	Premières impressions graphiques	3
2.1.1	Variation des conditions initiales	4
2.1.2	Variation de r	5
2.2	Équilibres et comportement des solutions	6
2.2.1	Pour $r < 1$	7
2.2.2	Pour $r = 1$	7
2.2.3	Pour $r > 1$	7
3	Modèle simplifié de l'équation de Lorenz	12
3.1	Modèle proche de l'origine	13
3.2	Modèle au niveau du plan $z = 27$	14
3.3	L'attracteur pour le modèle du système de Lorenz	15
3.4	Étude de g	17
4	Conclusion	19
	Bibliographie	21

1 Introduction

L'équation de Lorenz est formulée par le météorologue américain du même nom pour la première fois en 1963. Elle résulte alors d'une grande simplification de l'Équation de Navier-Stokes, qui décrit le mouvement des fluides newtoniens et est réputée comme étant très difficile à résoudre. Les importantes approximations réalisées pour aboutir à l'équation de Lorenz sont telles qu'elle n'a en fait plus vraiment de sens physique, mais elle présente un réel intérêt pour les mathématiques.

À partir de simulations numériques, Lorenz va rapidement découvrir deux caractéristiques majeures de son équation : la grande sensibilité aux conditions initiales des solutions et l'étrange forme de "papillon" prise par toutes les solutions, que l'on appellera par la suite "attracteur étrange". C'est ce qu'il publiera dès 1963[1]. Mais l'engouement des autres mathématiciens pour cette découverte ne naîtra que en 1972, lorsqu'il tiendra une conférence devant l'*American Association for the Advancement of Science* au titre provoquant : « Predictability : Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas? »¹[2]. L'idée de ce titre est que des différences de conditions initiales d'atmosphères de l'ordre d'un battement d'aile de papillon peut générer des différences de l'ordre d'une tornade sur le résultat final.

C'est le début de la théorie du "chaos"². En bref : un système est chaotique s'il est régi par des lois déterministes (équations bien connues) mais que son évolution échappe à toutes prévisions à long terme. L'origine de ce phénomène est la dépendance aux conditions initiales. Les systèmes chaotiques ont un comportement infiniment complexe, et ils sont attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe : c'est ce qu'on appelle un "attracteur", ou "attracteur étrange". Cette découverte est phénoménale d'un point de vue de la philosophie des sciences puisque depuis Newton et jusqu'à ce moment-là, on croyait que tout phénomène était la conséquence nécessaire de phénomènes antérieurs ou simultanés[3].

Même si Lorenz va conjecturer le caractère chaotique de son système dès 1963, cela sera démontré mathématiquement que plus tard, lorsque Birman, Guckenheimer et Williams proposent un modèle simplifié de l'équation originelle dans les années 70, puis que le lien entre ce modèle et l'équation de base est démontré en 1999 par Tucker [4].

L'enjeu de ce mémoire est d'étudier l'équation de Lorenz, d'en montrer d'abord des caractéristiques générales, puis de se pencher sur le modèle développé dans le chapitre 14 intitulé « The Lorenz system » de l'ouvrage *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* [5], modèle qui sera utilisé pour montrer que le système de Lorenz possède un attracteur et qu'il est chaotique pour celui-ci.

2 Caractéristiques générales de l'équation de Lorenz

L'équation de Lorenz est une équation différentielle simple à trois dimensions, dont les variables sont :

- x : caractérise l'intensité du mouvement de convection
- y : caractérise le gradient horizontal de température
- z : caractérise le gradient vertical de température

Ainsi chaque point (x, y, z) de l'espace décrit les conditions dans lesquelles se situe une atmosphère donnée.

Elle fait intervenir trois paramètres :

- σ : nombre de Prandtl (qui vaut le rapport entre la quantité de mouvement et la quantité de chaleur)
- r : rapport entre le nombre de Rayleigh (qui caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide) et le nombre de Rayleigh critique
- b : taille typique du système.

1. L'idée du nom de la conférence viendrait d'un organisateur de la conférence, Lorenz ne l'ayant découvert que devant le fait accompli.

2. Terme proposé par le mathématicien Yorke en 1975.

On suppose que $\sigma > 0$, $r > 0$, $b > 0$ et $\sigma > b + 1$.

L'équation de Lorenz est alors donnée par :

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \quad (1)$$

2.1 Premières impressions graphiques

Pour avoir une idée de ce qu'on va pouvoir démontrer comme propriétés sur le système de Lorenz, on trace des solutions du système de Lorenz dans l'espace des phases³, qui est ici \mathbb{R}^3 .

On utilise la méthode d'Euler pour cela : cette méthode récursive consiste à approximer localement la dérivée à la tangente au point précédent. On part d'une condition initiale fixée $X_0 \in \mathbb{R}^3$, et on construit par récurrence les points suivants :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{X}(t_{n+1}) = \tilde{X}(t_n) + \tau \times F(\tilde{X}(t_n))$, où τ est le pas temporel utilisé, et $\tilde{X}(\cdot)$ est affine sur le segment $[\tilde{X}(t_n); \tilde{X}(t_{n+1})]$. On prendra $\tau = 0.01$ s et on tracera 10 000 points ici.

On applique cette méthode avec les paramètres suivants :

$$\sigma = 10, b = \frac{8}{3} \text{ et } r = 28$$

Ce sont les valeurs utilisées par Lorenz lorsqu'il a observé pour la première fois un phénomène chaotique dans ce système.

Avec les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 1.05$, on obtient la courbe ci-dessous.

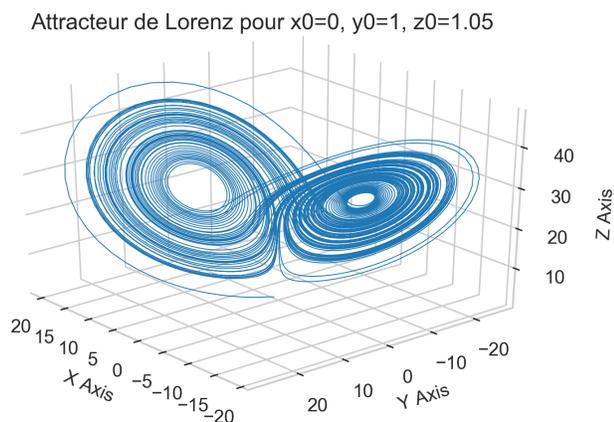


FIGURE 1 – Système de Lorenz pour $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 1.05$

On peut déjà observer la forme caractéristique des deux ailes déployées d'un papillon : chaque aile est formée par des séries de cercles concentriques. Les points décrivent plusieurs cercles sur une aile puis bascule sur l'autre sans rythme particulier et sans jamais couper leurs trajectoires.

3. L'espace des phases est l'espace dans lequel vivent les solutions.

2.1.1 Variation des conditions initiales

Ce qui est intéressant, c'est que quelles que soient les conditions initiales, on va retrouver cette forme en papillon après un certain temps. C'est ce que l'on observe sur le graphe ci-dessous (figure 2), avec deux conditions initiales relativement proches ($x_0 = 10$, $y_0 = 10$ et $z_0 = 20$ pour l'un ; $x_0 = 10.001$, $y_0 = 10.001$ et $z_0 = 20.001$ pour l'autre).

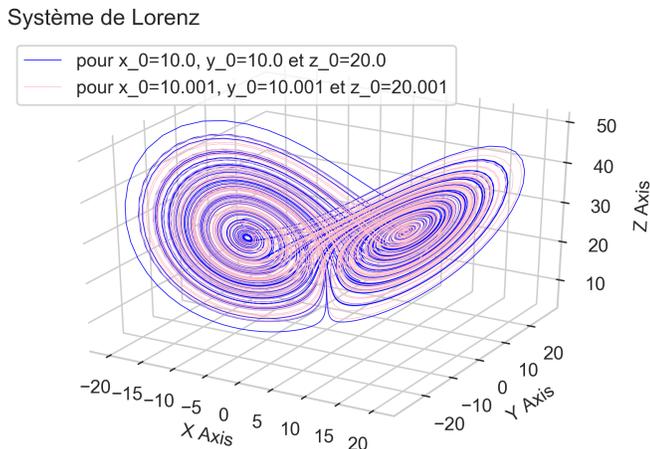


FIGURE 2 – Système de Lorenz pour deux conditions initiales proches ($x_0 = 10, y_0 = 10, z_0 = 20$) et ($x_0 = 10.001, y_0 = 10.001, z_0 = 20.001$)

Cependant, même si la forme est fortement ressemblante, les valeurs prises par les 2 solutions diffèrent fortement. Pour illustrer cela, le graphe ci-dessous (figure 3) présente l'abscisse x des solutions du graphe précédent en fonction du temps.

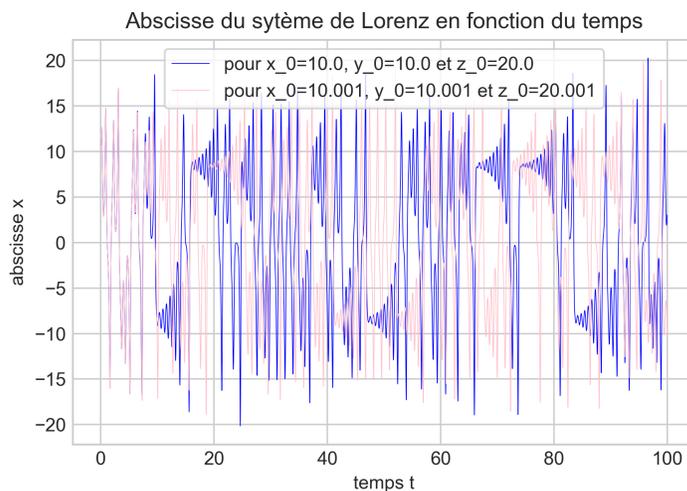


FIGURE 3 – Abscisse des solutions du système de Lorenz de la figure 1

On remarque que les deux abscisses semblent osciller régulièrement autour des valeurs ± 8 . En fait, on comprendra par la suite que cela est dû à la présence d'équilibres au niveau des abscisses $x = \pm 6\sqrt{2}$.

2.1.2 Variation de r

On va maintenant observer la tête des solutions pour différentes valeurs de r avec une condition initiale fixée $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1.05)$, et $\sigma = 10$, $b = 8/3$.

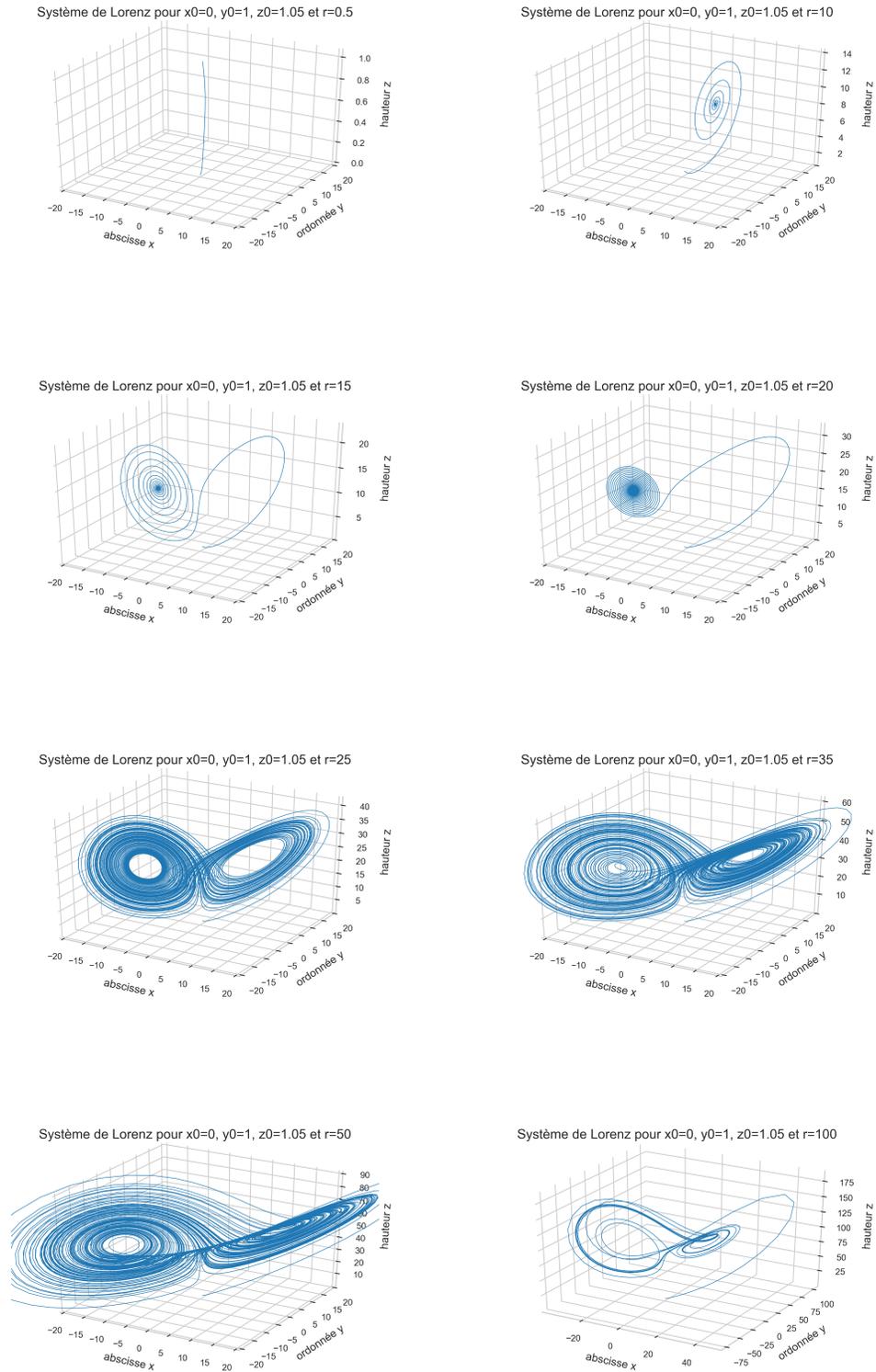


FIGURE 4 – Système de Lorenz pour $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1.05)$, et $\sigma = 10$, $b = 8/3$ avec variation de r de 0.5 à 100

On peut observer grâce à ces graphiques que le comportement de la solution est fortement influencé par la valeur prise par r , à très petit r , on a une solution directement attirée par l'origine, puis lorsque r grandit, elle devient attirée par deux autres points. Et quand r est suffisamment grand (ici on le constate à partir de $r = 25$), on retrouve la forme en papillon que l'on avait déjà observé précédemment.

2.2 Équilibres et comportement des solutions

C'est une équation non linéaire (à cause des termes en xz et xy) et autonome, puisque l'on peut la mettre sous la forme :

$$X'(t) = F(X(t)) \quad (2)$$

$$\text{où } X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ et } F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz)$$

On peut déjà faire deux remarques sur ce système d'équations différentielles :

1. Il y a invariance du système par réflexion d'axe (Oz) : en effet si $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ est solution du système, alors $(-x(\cdot), -y(\cdot), z(\cdot))$ l'est aussi.
2. Il y a invariance de l'axe (Oz) par ce système : en effet, toute solution démarrant sur (Oz), *i.e.* $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$, y restera, puisque les fonctions $x = 0$ et $y = 0$ sur \mathbb{R} sont solutions, et alors on a $z' = -bz$, donc finalement $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 0, y(t) = 0$ et $z(t) = z_0 e^{-bt}$. Toute solution démarrant sur l'axe (Oz) tend donc vers l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$.

Comme F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 , par le théorème de Cauchy-Lipschitz on a existence et unicité de solutions maximales à cette équation pour chaque condition initiale fixée $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Dès lors on peut trouver les équilibres de cette équation :

$$F(X) = 0 \iff X = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ ou, si } r > 1, X = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1) := Q_{\pm}$$

On cherche à caractériser ces équilibres pour avoir une meilleure idée de la forme que va prendre chaque solution.

On commence par regarder en l'origine.

La jacobienne de F en un point X de l'espace est donnée par :

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Le système linéarisé en l'origine devient donc :

$$Y' = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} Y \quad (3)$$

On calcule le polynôme caractéristique de la matrice associée à ce système :

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda)(-b - \lambda) + (b + \lambda)r\sigma \\ &= -(\lambda + b)(\lambda + \sigma)(\lambda + 1) - r\sigma \\ &= -(\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) \\ &= -(\lambda + b)P(\lambda) \end{aligned}$$

où P est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r) = (1 - \sigma)^2 + 4\sigma r > 0$ admettant deux racines réelles $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[-(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)}]$.

Donc les valeurs propres associées à (3) sont $-b$, λ_+ , λ_- . Pour $r \neq 1$, les valeurs propres n'ont pas de partie réelle nulle, donc $0_{\mathbb{R}^3}$ est un équilibre hyperbolique pour (1).

2.2.1 Pour $r < 1$

Pour $r < 1$, on a toutes les valeurs propres négatives, donc le seul équilibre du système, $0_{\mathbb{R}^3}$, est stable et attractif pour (1).

En fait, on peut même aller plus loin :

Proposition. *Si $r < 1$, alors toutes les solutions du système de Lorenz tendent vers l'équilibre $0_{\mathbb{R}^3}$.*

Démonstration. On pose $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$. On calcule sa dérivée le long d'une solution (x, y, z) :

$$\begin{aligned} \dot{L}(X) &= \nabla L(X) \cdot F(X) = 2x(\sigma(y - x)) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma z(xy - bz) \\ &= -2\sigma(x^2 + y^2 - xy(1 + r) + bz^2) \end{aligned}$$

On veut $\dot{L}(X) < 0 \forall X \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$. Pour cela, il suffit que $g(x, y) := x^2 + y^2 - (1 + r)xy > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$, car $\sigma > 0$.

C'est le cas :

- le long de (Oy) : $g(0, y) = y^2 > 0 \forall y \neq 0$
- le long de toute droite $y = mx$ du plan (Oxy) pour $m \in \mathbb{R}$:
 $g(x, mx) = x^2 + mx^2 - (1 + r)mx^2 = x^2(m^2 - (1 + r)m + 1) = x^2 P(m)$ or P est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (1 + r)^2 - 4 = (r - 1)(r - 3) > 0$ (car $0 < r < 1$) donc toujours strictement positif, et ce quelque soit m .

Ainsi pour toute solution $X(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \neq (0, 0, 0)$ de l'équation de Lorenz, la valeur de L décroît strictement le long de $X(\cdot)$, mais L prend des valeurs toujours strictement positives, donc : $L(X(t)) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui n'est possible que si $X(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. \square

2.2.2 Pour $r = 1$

Pour $r = 1$, le seul équilibre est l'origine. De plus, il n'est pas hyperbolique pour le système linéarisé en l'origine, donc on ne peut pas caractériser cet équilibre.

C'est ce qu'on appelle un point de bifurcation : on passe de 1 à 3 équilibres.

2.2.3 Pour $r > 1$

Dès que $r > 1$, λ_+ devient strictement positive, et donc l'origine n'est plus attractif et devient instable pour l'équation originale. On a une surface en deux dimensions stable générée par les deux valeurs propres strictement négatives (λ_- et $-b$), et une courbe instable générée par λ_+ .

De plus, les équilibres Q_{\pm} ne sont plus à l'origine et s'écartent de 0 quand r croît. On va pouvoir montrer que :

Proposition. *Les points d'équilibre Q_{\pm} sont stables et attractifs si $1 < r < r^* := \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$.*

Démonstration. La linéarisation du système de Lorenz en Q_{\pm} nous donne des systèmes linéaires de matrices caractéristiques :

$$A_{Q_{\pm}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Elles ont pour polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_{A_{Q_{\pm}}}(\lambda) &= (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda)(-b - \lambda) - \sigma b(r-1) - (\sigma(-b - \lambda) - b(r-1)(-\sigma - \lambda)) \\ &= -\lambda^3 - (b+1+\sigma)\lambda^2 - (b+\sigma(b+1))\lambda - \sigma b + \lambda(\sigma - b(r-1)) - 2\sigma b(r-1) + \sigma b \\ &= -(\lambda^3 + (1+b+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2\sigma b(r-1)) \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de $A_{Q_{\pm}}$ vérifient :

$$f_r(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0$$

Pour $r = 1$, la résolution de $f_1(\lambda) = 0$ donne :

$f_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + (1+b+\sigma)\lambda + b(\sigma+1)) = \lambda P(\lambda)$, où P est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (1+b+\sigma)^2 - 4b(\sigma+1) = (1-b+\sigma)^2 > 0$ car $\sigma > b+1$. P a donc pour racines $\frac{-(1+b+\sigma) \pm (1-b+\sigma)}{2} = -b$ ou $-1-\sigma$, et ainsi 0 , $-b$, et $-1-\sigma$ sont racines de f_1 , avec $-1-\sigma < -b < 0$. (On rappelle que $\sigma > b+1$.)

Pour r suffisamment proche de 1, f_r a trois racines réelles proches de ces valeurs, elles sont strictement négatives car pour $r > 1$, on a $f_r(\lambda) > 0 \forall \lambda \geq 0$.

Pour $r > 1$ quelconque : On sait que toute racine réelle de $f_r(\lambda)$ est strictement négative, et par d'Alembert on a ou bien 3 racines réelles strictement négatives, ou bien 1 racine réelle strictement négative et deux racines complexes conjuguées. Pour que nos équilibres soient stables et attractifs, il faut que pour toute racine, sa partie réelle soit strictement négative. On pose pour tout r , $\lambda_1(r)$, $\lambda_2(r)$, et $\lambda_3(r)$ les trois racines du polynôme, avec $\lambda_1(r)$ celle qui reste réelle (lorsque toutes les racines sont réelles, on a $\lambda_1(r) < \lambda_2(r) < \lambda_3(r)$).

On connaît des informations sur les f_r indépendantes de r : on a $f_r(\lambda) \rightarrow \pm\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow \pm\infty$; et f_r possède un point d'inflexion indépendant de r en $\lambda^* = -\frac{1+b+\sigma}{3}$ (on le trouve en annulant la dérivée double de f_r).

Pour r qui tend vers $-\infty$, on a $f_r(\lambda) \sim br\lambda + 2b\sigma r$, qui s'annule en $\lambda = -2\sigma$. Or si on regarde la valeur prise par f_r en $\lambda = -2\sigma$ quelque soit r , on trouve une valeur strictement négative : $f_r(-2\sigma) = -8\sigma^3 + (1+b+\sigma)4\sigma^2 + b(\sigma+r)(-2\sigma) + 2(r-1) = \dots = -4\sigma(\sigma-1)(\sigma - \frac{b}{2}) < 0$ car $\sigma > (\max(1; \frac{b}{2}))$. Comme le raisonnement est valable quelque soit r , nécessairement -2σ sera dans l'intervalle ouvert $(-\infty; \lambda_1(r))$ quelque soit r .

On sait qu'il existe⁴ \bar{r} tel que :

- pour $1 < r < \bar{r}$, $\lambda_2(r)$ et $\lambda_3(r)$ sont des réels négatifs distincts.
- pour $r = \bar{r}$, les deux dernières racines sont réelles et confondues.
- pour $r > \bar{r}$, elles sont complexes conjuguées

On va montrer que λ_1 est décroissante en r :

En dérivant $f_r(\lambda)$ par rapport à r avec un λ fixé, on obtient :

$$\frac{df_r(\lambda)}{dr} = b\lambda + 2\sigma b = b(\lambda + 2\sigma)$$

4. L'existence de \bar{r} vient du fait que pour r assez grand, la dérivée ne va plus s'annuler dans \mathbb{R} , et donc la monotonie de f_r nous donne une unique racine réelle

Ainsi f_r est strictement croissant en r pour $\lambda > -2\sigma$, ce qui est le cas autour de λ_1 .

Le deuxième argument dont on a besoin c'est la croissance de f_r pour un r autour de $\lambda_1(r)$. On fixe donc r . On dérive f_r par rapport à λ :

$$f'_r(\lambda) = 3\lambda^2 + 2(1 + b + \sigma)\lambda + b(\sigma + r)$$

On voit déjà que quand λ tend vers $-\infty$, la dérivée est strictement positive. C'est un trinôme du second degré de discriminant :

$$\Delta(r) = 4((1 + b + \sigma)^2 - 3b(\sigma + r))$$

On a Δ est décroissant en r , positif pour r proche de 1 (En $r = 1$, $\Delta(1) = 4((1 - \frac{b}{2} + \sigma)^2 + \frac{3}{4}b^2) > 0$). Pour r suffisamment grand, Δ va devenir négatif, et alors la dérivée ne va jamais s'annuler dans \mathbb{R} , donc on aura monotonie de f_r , et même croissance (car on a pour λ qui tend vers $-\infty$ une dérivée positive).

Pour r tel que $\Delta(r) > 0$, on a deux annulations réelles de la dérivée, dont la plus petite (qui correspond à un maximum local) vaut : $\lambda_{max}(r) = \frac{-2(1+b+\sigma) - \sqrt{\Delta(r)}}{3}$, qui est croissant en r , donc en particulier $\lambda_{max}(r) \geq \lambda_{max}(1) > -\sigma - 1$. La dernière inégalité vient du fait que $\lambda_1(1) = -\sigma - 1$, et que nécessairement la dérivée change de signe après la première racine (sinon on ne peut pas avoir 3 racines réelles). Ainsi :

$$\forall r, \lambda_{max}(r) > -\sigma - 1$$

Et ainsi, comme la dérivée est de signe constant et même positif sur $(-\infty; -\sigma - 1) \subset (-\infty; \lambda_{max}(r))$, on a croissance de f_r sur $(-\infty; -\sigma - 1)$ pour un r fixé.

Puis : si on prend $r' > 1$ fixé, $x = \lambda_1(r')$ est une racine de $f_{r'}$, et par croissance de $r \mapsto f_r(x)$ avec x fixé, on a :

$$\forall r, r > r' > 1, f_r(x) > f_{r'}(x) = 0 > f_1(x)$$

Or $f_1(x) < 0$ implique que $x < \lambda_1(1) = -\sigma - 1$ (ou $x \in (-b; 0)$, mais cela voudrait dire que $f_{r'}$ coupe f_1 sur $(-b; 0)$, ce qui est possible uniquement en $\lambda = -2\sigma < -b$). Donc on a un premier résultat :

$$\forall r, \lambda_1(r) < \lambda_1(1) = -\sigma - 1$$

On va pouvoir appliquer la croissance de f_r sur $(-\infty; -\sigma - 1)$: si, pour $r > r' > 1$, $x < \lambda_1(r)$, on aurait $f_r(\lambda_1(r)) = 0 > f_r(x) > 0$. Ainsi, on a nécessairement $\lambda_1(r') > \lambda_1(r)$ pour $r > r'$, soit décroissance de $r \mapsto \lambda_1(r)$ quand $r > 1$.

Pour comprendre un peu mieux pourquoi λ_1 est croissante selon r , on peut voir sur le graphe ci-dessous (figure 5), tracé avec $\sigma = 10$ et $b = 8/3$.

On a montré que λ_1 est décroissante en r et donc : $-2\sigma < \lambda_1(r) \leq -\sigma - 1 = \lambda_1(1)$ pour $r > 1$. On a :

$$\begin{aligned} f_r(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1(r))(\lambda - \lambda_2(r))(\lambda - \lambda_3(r)) \\ &= (\lambda - \lambda_1(r))(\lambda^2 - (\lambda_2(r) + \lambda_3(r))\lambda + \lambda_2(r)\lambda_3(r)) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_1(r) + \lambda_2(r) + \lambda_3(r))\lambda^2 + (\lambda_1(r)\lambda_2(r) + \lambda_2(r)\lambda_3(r) + \lambda_1(r)\lambda_3(r))\lambda - \lambda_1(r)\lambda_2(r)\lambda_3(r) \\ &= \lambda^3 + (1 + b + \sigma)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \end{aligned}$$

Pour $r > \bar{r}$, on pose $\lambda_2(r) = \alpha_r + i\beta_r$, et $\lambda_3(r) = \alpha_r - i\beta_r$.

Donc en particulier, par identification, $-\lambda_1(r) - 2\alpha_r = 1 + b + \sigma$, soit $\alpha_r = -\frac{1}{2}(1 + b + \sigma + \lambda_1(r))$. Donc $r \mapsto \alpha_r$ est une fonction croissante de r (car λ_1 est une fonction décroissante de r). Ainsi α_r reste strictement négative pour $r < r^*$ où r^* est défini par $\lambda_1(r^*) = -(1 + b + \sigma)$.

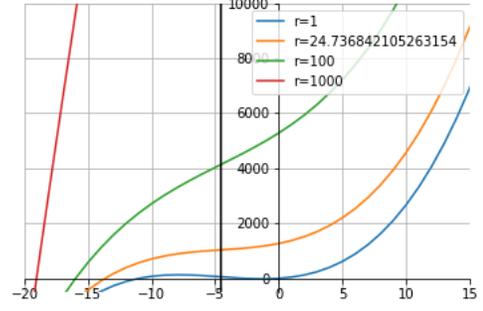
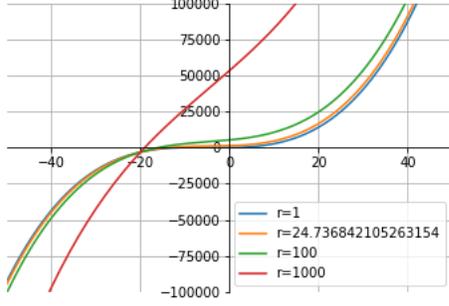


FIGURE 5 – Graphe de f_r (polynôme caractéristique pour le système linéarisé en Q_{\pm}) en fonction de λ , pour $\sigma = 10$ et $b = 8/3$

Calcul de r^* :

$$f_{r^*}(i\beta) = (i\beta)^3 + (1 + b + \sigma)(i\beta)^2 + b(\sigma + r^*)i\beta + 2b\sigma(r - 1) = -i\beta^3 - (1 + b + \sigma)\beta^2 + ib(\sigma + r)\beta + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

En égalisant partie imaginaire et partie réelle à 0, on obtient :

$$-\beta^3 + b(\sigma + r)\beta = 0 \text{ et } -(1 + b + \sigma)\beta^2 + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

Soit en simplifiant la première égalité par β , non nul car sinon $\lambda_2(r^*) = \lambda_3(r^*) = 0$ ce qui est impossible :

$$\beta^2 = b(\sigma + r^*) = \frac{2b\sigma(r - 1)}{1 + b + \sigma}$$

Donc on a :

$$\sigma + r^* = \frac{2\sigma(r^* - 1)}{1 + b + \sigma}, \text{ càd : } r^*(1 - \frac{2\sigma}{1 + b + \sigma}) = -\frac{2\sigma}{1 + b + \sigma} - \sigma$$

Et donc :

$$r^* = \frac{-\frac{2\sigma}{1+b+\sigma} - \sigma}{1 - \frac{2\sigma}{1+b+\sigma}} = \frac{-2\sigma - \sigma(1 + b + \sigma)}{1 + b + \sigma - 2\sigma} = \sigma \frac{(-3 - b - \sigma)}{1 + b - \sigma} = \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$$

Et donc on obtient la valeur voulue. □

On a plus comme pour $r < 1$ toutes les solutions qui tendent vers l'origine, mais on peut montrer que les solutions qui démarrent loin de l'origine vont au moins s'en rapprocher.

Pour cela on pose : $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$. Alors pour $\nu \in \mathbb{R}, \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V(x, y, z) = \nu\}$ définit une ellipsoïde de centre $(0, 0, 2r)$.

Proposition. *Il existe ν^* tel que toute solution démarrant en-dehors de l'ellipsoïde définie par $V = \nu^*$ finit par y entrer et y reste coincée à tout temps supérieur.*

Démonstration. De même que précédemment, on calcule la dérivée de V le long d'une solution :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y, z) &= \nabla V(x, y, z) \cdot F(x, y, z) \\ &= 2rx \times \sigma(y - x) + 2\sigma y \times (rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r) \times (xy - bz) \\ &= 4r\sigma xy - 2r\sigma x^2 - 2\sigma y^2 - 2\sigma xyz + 2\sigma(xy z - bz^2 - 2rxy + 2rbz) \\ &= -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2)\end{aligned}$$

Donc $\dot{V}(x, y, z) < 0 \iff rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 > br^2$. Si on choisit ν^* tel que l'ellipsoïde $V = \nu^*$ englobe strictement celle définie par $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2$, alors : tout point en dehors de $V = \nu^*$ vérifie $\dot{V} < 0$.

Soit $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ une solution telle que en $t = t_0$, la solution est en dehors de l'ellipsoïde.

On a $\dot{V}(x, y, z)(t_0) < 0$ et \dot{V} reste strictement négatif tant que l'on a $x(t)^2 + y(t)^2 + b(z(t) - r)^2 > br^2$: ainsi la valeur de V le long de la solution décroît, jusqu'à ce que V prenne des valeurs inférieures ou égales à ν^* . On rentre alors dans l'ellipsoïde $V = \nu^*$.

Si l'on atteint l'ellipsoïde définie par $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2$, alors \dot{V} devient positif, et donc V augmente le long de la solution. Mais pour sortir de $V \leq \nu^*$, on doit d'abord sortir de $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 \leq br^2$, mais alors \dot{V} redevient négatif, donc V décroît à nouveau, etc.

On ne peut plus sortir de $\dot{V} \leq \nu^*$. □

Dans la suite, on nomme Λ l'ensemble des points de l'espace dont les solutions restent à tout temps dans l'ellipsoïde $V = \nu^*$. On va montrer que Λ n'est pas n'importe quel sous-ensemble de \mathbb{R}^3 :

Proposition. *Le volume de Λ par la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^3 est nul.*

Démonstration. On prend D un sous-ensemble quelconque de \mathbb{R}^3 à frontière lisse, on pose $D(t) = \phi_t(D)$ pour $t \in \mathbb{R}$ son flot à temps t , et $V(t)$ le volume de $D(t)$.

Rappel : Pour $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est l'application qui à chaque $X_0 \in \mathbb{R}^3$ associe la valeur prise par la solution $X(\cdot)$ qui vaut X_0 en $t = 0$.

Suite de la preuve :

D'après le théorème de la divergence, on a :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \int_{D(t)} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz \\ \text{Or : } \operatorname{div} F &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\sigma - 1 - b = -(\sigma + 1 + b), \text{ d'où :} \\ \frac{dV}{dt} &= -(\sigma + 1 + b) \int_{D(t)} dx \, dy \, dz = -(\sigma + 1 + b) \times V(t)\end{aligned}$$

On a une équation différentielle homogène et linéaire d'ordre 1, donc la résolution donne :

$$V(t) = V(0) e^{-(\sigma+1+b)t}$$

On applique cette formule pour $D = \Lambda$. Or on a $\Lambda \subset \phi_t(\Lambda) \forall t \in \mathbb{R}$.

En effet :

Soit $\tau \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \Lambda$. On veut montrer que $X_0 \in \phi_\tau(\Lambda)$, c'est-à-dire qu'il existe une solution $Y(\cdot)$ telle que $Y(\tau) = X_0$ et $Y(0) \in \Lambda$. Puisque $X_0 \in \Lambda$, la solution $X(\cdot)$ qui démarre en $t = 0$ à $X(t = 0) = X_0$ est dans l'ellipsoïde $V = \nu^*$ à tout temps. En particulier, $X(-\tau) := X_1$ appartient à l'ellipsoïde.

Soit $Y(\cdot)$ la solution qui démarre au temps $t = 0$ en X_1 . On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = X(t - \tau)$, car $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = X'(t - \tau) = F(X(t - \tau)) = F(Y(t))$ donc $Y(\cdot)$ est bien solution, et $Y(0) = X(-\tau) = X_1$. On a existence et unicité de cette solution par Cauchy-Lipschitz, ce qui permet de conclure : $Y(t)$ appartient bien à l'ellipsoïde en tout temps t , donc $Y(0) \in \Lambda$, et $Y(\tau) = X(t = 0) = X_0$. Ainsi $X_0 \in \phi_\tau(\Lambda)$.

On a alors : pour $D = \Lambda, D \subset D(t) \forall t \in \mathbb{R}$, et $V(t) = Vol(D(t)) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Nécessairement, cela implique que $Vol(D) = Vol(\Lambda) = 0$. □

Remarque : A priori, cela ne veut rien dire sur la structure de Λ . En fait, Λ est un "attracteur" pour le modèle de Lorenz.

3 Modèle simplifié de l'équation de Lorenz

Dans cette partie, l'idée est de réussir à démontrer l'existence d'un attracteur pour le système de Lorenz, puis d'en déduire à partir de cela le caractère chaotique de celui-ci. On considère que les paramètres sont ceux pour lesquels Lorenz a étudié le système en premier lieu, càd :

$$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, \text{ et } r = 28$$

D'après les paragraphes précédents, on sait que l'on a trois équilibres : l'origine, et $Q_\pm = (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$. À l'origine, on a trois valeurs propres : $-b = -\frac{8}{3}, \lambda_\pm = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{1201}}{2}$, avec $\lambda_- < -\lambda_+ < -b < 0 < \lambda_+$. On peut donc tracer le portrait de phase pour le système linéarisé en l'origine, pour avoir une idée de la forme des solutions ⁵ (cf.figure 6).

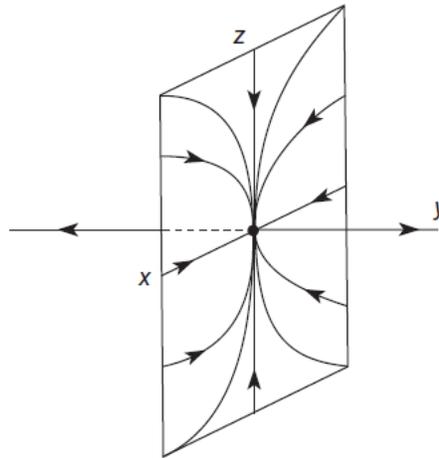


FIGURE 6 – Portrait de phase en l'origine pour le système linéarisé en 0

Toutes les solutions sur le plan $y = 0$ tendent vers l'origine tangentiellement à l'axe (Oz) .

De plus, au niveau de Q_\pm , on peut montrer par le calcul qu'ils possèdent une valeur propre négative et deux valeurs propres complexes conjuguées avec des parties réelles strictement positives.

Par un programme informatique ⁶, on peut trouver les points du système intersectant le plan $z = 27$ (figure 7 : avec $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1.05)$ et jusqu'à $t_{max} = 50s$).

⁵. Les figures théoriques de cette partie sont issues de [5]

⁶. On parcourt la solution par un pas temporel et on s'arrête dès que $z - 27$ change de signe, et après on cherche le point tel que $z = 27$ par dichotomie.

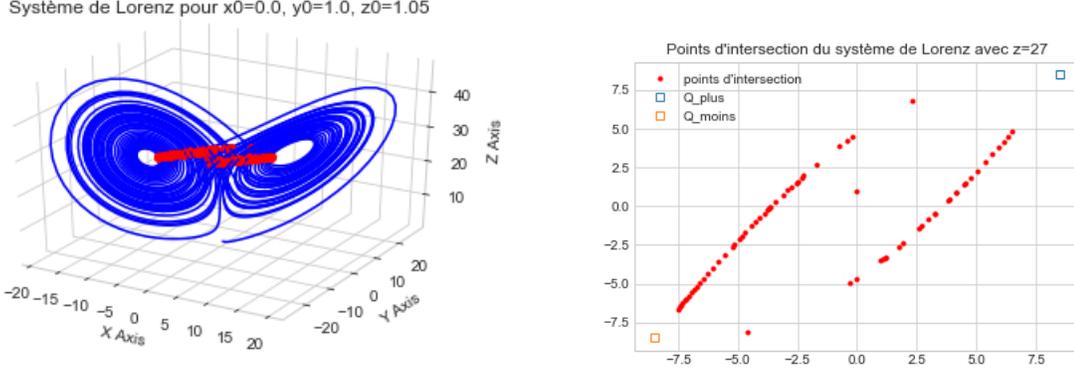


FIGURE 7 – Section du système de Lorenz par le plan $z = 27$

On remarque que le plan $z = 27$ est intersecté assez régulièrement par le système de Lorenz. On va voir dans la suite que l'on va se ramener à étudier le système uniquement dans ce plan.

3.1 Modèle proche de l'origine

À présent, on simplifie le système de Lorenz : on conserve la symétrie par rapport à $(0z)$, et on considère que à l'intérieur du cube défini par $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|, |y|, |z| \leq 5\}$, le système est linéaire avec des valeurs propres -1 , 2 et -3 . Qualitativement, on a le même portrait de phase que dans la dernière figure.

Maintenant, on cherche à savoir comment les solutions vont se comporter près de l'origine. On pose :

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, |x| \leq 1, 0 < y \leq \varepsilon < 1\}$$

et

$$R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1, |x| \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

On va montrer que toute solution démarrant dans R_1 va atteindre à R_2 à un temps supérieur.

En effet : considérons une solution qui démarre en $t = 0$ dans R_1 avec une condition initiale de la forme : $(x_0, y_0, 1)$, avec $|x_0| \leq 1$ et $y_0 \leq \varepsilon$.

Alors on a en tout temps t tel qu'on reste dans le cube S :

$$x(t) = x_0 e^{-3t}, \quad y(t) = y_0 e^{2t}, \quad z(t) = e^{-t}$$

Cette solution rejoint le rectangle R_2 en un temps τ tel que : $y(\tau) = 1 = y_0 e^{2\tau}$, soit $\tau = -\frac{1}{2} \ln(y_0)$. Donc on a en ce temps τ : $x(\tau) = x_0 e^{-3/2 \ln(y_0)} = x_0 y_0^{-3/2}$ et $z(\tau) = e^{1/2 \ln(y_0)} = y_0^{1/2}$. On a bien $|x(\tau)| = |x_0| y_0^{-3/2} \leq 1 \times \varepsilon \leq 1$ et $0 \leq z(\tau) = y_0^{1/2} \leq 1/2 \leq 1$. Donc au temps τ on est bien dans R_2 . On est bien resté dans S entre $t = 0$ et $t = \tau$ puisque la solution est en exponentielle décroissante, donc les valeurs ne peuvent dépasser les valeurs initiales qui sont toutes de module inférieur à 5.

Ainsi, on a montré qu'il existe une fonction $h : R_1 \rightarrow R_2$, qui est de la forme :

$$h(x, y) = (x_1, z_1) = (x y^{3/2}, y^{1/2}) \quad \forall (x, y) \in R_1$$

Ainsi, toute droite $y = c$ de R_1 est transformée par h en droite $z = c^{1/2}$ dans R_2 ; et toute droite $x = c$ de R_1 est transformée par h en courbe de la forme $x = c z^3$ dans R_2 . C'est ce qu'on peut observer sur la figure ci-dessous

(figure 8).

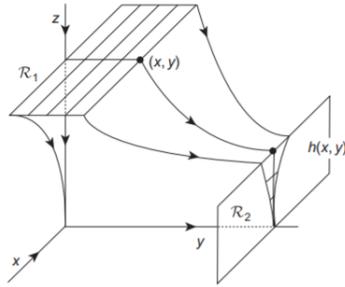


FIGURE 8 – Évolution des solutions proches de l'origine

3.2 Modèle au niveau du plan $z = 27$

En suivant la forme du vrai système de Lorenz, on place deux équilibres au niveau du plan $z = 27$: $Q_{\pm} = (\pm 10, \pm 20, 27)$. On suppose que les droites $z = 27$ et $y = \pm 20$ sont des portions stables par rapport à Q_{\pm} , et que les deux autres valeurs propres en Q_{\pm} sont complexes à parties réelles strictement positives.

On considère maintenant le rectangle Σ :

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 27, |x|, |y| \leq 20\}$$

Par des considérations numériques, on a montré que pour le vrai système, les solutions qui ne seront pas attirées par l'origine vont passer autour de Σ avant de l'intersecter. On suppose donc la même chose ici, et on note $\rho_{\pm} = (\pm x^*, \mp y^*)$ les premiers points d'intersection de ces solutions avec Σ selon que la solution passe par les $y > 0$ ou $y < 0$. On le voit bien sur la figure ci-dessous :

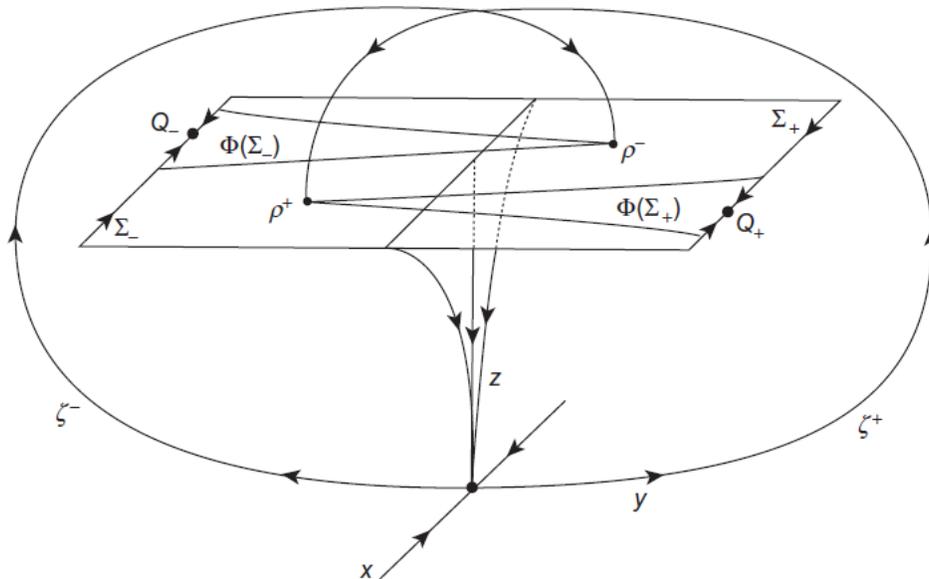


FIGURE 9 – Intersections des solutions non attirées par l'origine ζ^{\pm} avec le rectangle Σ

On suppose maintenant que toute solution démarrnant dans Σ y revient à un temps supérieur. Pour cela, on pose quatre hypothèses que l'on supposera vraies :

1. Condition de retour : Soit $\Sigma_+ = \Sigma \cap \{y > 0\}$ et $\Sigma_- = \Sigma \cap \{y < 0\}$. Toutes les solutions passant par Σ_{\pm} repassent dans Σ à temps supérieur. Donc on a une application de Poincaré⁷ $\Phi : \Sigma_+ \cup \Sigma_- \rightarrow \Sigma$, $(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$. On suppose que les images $\Phi(\Sigma_{\pm})$ sont comme dans la figure. Par symétrie, $\Phi(x, y) = -\Phi(-x, -y)$
2. Direction de contraction : On suppose que Φ transforme toute droite $\{y = a\}$ dans Σ pour $a \neq 0$ en une droite $y = g(a)$ avec g une fonction. De plus, on suppose que Φ contracte cette ligne dans la direction x par un facteur $c < 1$.
3. Direction d'expansion : On suppose que Φ étend Σ_+ et Σ_- dans la direction y par un facteur supérieur à $\sqrt{2}$, soit $g'(y) > \sqrt{2}$.
4. Condition d'hyperbolicité : On suppose que la différentielle de Φ transforme des vecteurs tangents à Σ_{\pm} de pente ± 1 en des vecteurs de pente supérieure à $\mu > 1$.

Ainsi, on a

$$\forall (x, y) \in \Sigma_{\pm}, \Phi(x, y) = (f(x, y), g(y))$$

avec $g'(y) > \sqrt{2}$ (condition 3), $0 < \frac{\partial f}{\partial x} < c < 1$ (condition 2), et $g'(y) > \mu \left| \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ (condition 4).

Φ n'est pas définie en $y = 0$, mais on a $\lim \Phi(x, y) = \rho_{\pm}$ quand y tend vers 0^{\pm} .

Puis on restreint notre attention au rectangle $R \subset \Sigma$ défini par $R = \{(x, y, z) \in \Sigma : |y| \geq y^*\}$, car on peut montrer que toute solution démarrnant dans Σ_{\pm} mais en dehors de R finit par entrer dans R à temps supérieur. On voit sur le dessin que $\Phi(R) \subset R$:

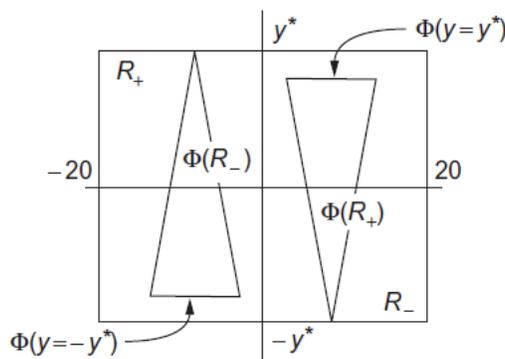


FIGURE 10 – Application de Poincaré restreinte à R

On pose :

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Phi^n(R)}$$

La limite existe puisque les $\Phi^n(R)$ s'emboitent les uns dans les autres.

Et :

$$\mathcal{A} = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(A) \right) \cup \{(0, 0, 0)\}$$

3.3 L'attracteur pour le modèle du système de Lorenz

On introduit enfin la définition de l'attracteur :

Définition. Soit $X' = F(X)$ un système d'équations différentielles de \mathbb{R}^n avec un flot ϕ_t pour $t \in \mathbb{R}$. Un ensemble A est appelé attracteur si :

⁷. Φ est une application de Poincaré si et seulement si il existe t^* tel que Φ soit l'application du flot en t^* , soit $\Phi = \phi_{t^*}$. Les itérations de Φ correspondent donc au flot en $t = 2t^*, 3t^*, \dots, nt^*$.

1. A est compact et invariant (càd : $\phi_t(A) \subset A \forall t$)
2. Il existe un ouvert U contenant A tel que $\forall X \in U, \phi_t(X) \in U$, et $A = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_t(U)}$
3. Transitivité : Pour tous points X_1, X_2 dans A , et pour tous voisinages ouverts U_1 de X_1 dans U (resp. U_2 de X_2 dans U), il existe une solution qui démarre dans U_1 et passe à temps supérieur dans U_2 .

Remarque : La définition d'un attracteur peut varier d'un livre à un autre, la troisième condition notamment est fréquemment enlevée.

Théorème. \mathcal{A} est un attracteur pour le modèle du système de Lorenz.

Démonstration. 1) A est clairement fermé puisque c'est une intersection infinie de fermés. Donc, par continuité du flot, \mathcal{A} est fermé (on a rajouté exprès le $(0, 0, 0)$).

\mathcal{A} est invariant étant donné sa structure.

Dans la suite, on montre les résultats pour A (on remplace le ϕ_t dans la définition par Φ^n , au lieu de regarder à tout temps, on regarde à un temps t^* , puis à $2t^*, \dots$, à nt^*), et alors il en découle qu'ils sont valables aussi pour \mathcal{A} avec ϕ_t . En effet, \mathcal{A} contient toutes les valeurs prises par les solutions qui passent par A en un certain temps ainsi que l'origine du système. Donc si on montre que A est un attracteur, \mathcal{A} l'est aussi.

2) Soit $\mathcal{O} = (x, y)$, $|x| < 20$, $|y| < 20 - \epsilon \subset \Sigma$, pour un ϵ tel que $y^* < 20 - \epsilon$, càd que $R \subset \mathcal{O}$. On a déjà vu que au bout d'un certain temps, les solutions qui passent par Σ finissent par entrer dans R , de même ici celles qui passent par \mathcal{O} finissent par entrer dans R :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{O}, \exists n_0, \Phi^n(x, y) \in R$$

Ainsi, quand n croît au dessus de ce n_0 , on rentre dans les itérations successives de $\Phi(R)$ et donc dans A : $\forall (x, y) \in \mathcal{O}, \lim \Phi^n(x, y) \in A$ quand $n \rightarrow +\infty$. Finalement :

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Phi^n(R)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(\mathcal{O})$$

Cela fonctionne car les $\Phi^n(\mathcal{O})$ s'emboîtent les uns dans les autres, on ne garde donc pas les parties extérieures à R présentes pour de petits n dans les $\Phi^n(\mathcal{O})$. On a donc trouvé l'ensemble ouvert du deuxième point de la définition (ici : $U = \mathcal{O}$). Et on a bien $\forall (x, y) \in \mathcal{O}, \Phi(x, y) \in \mathcal{O}$ (on le voit sur la figure 7).

3) Soit P_1, P_2 deux points de A , et W_1 (resp. W_2) un voisinage ouvert de P_1 (resp. P_2) dans \mathcal{O} . On veut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi^n(W_1) \cup W_2 \neq \emptyset$, càd qu'il existe une solution démarrant dans W_1 qui passera à temps supérieur dans W_2 .

Pour un ensemble U dans R , on pose $\Pi_y(U)$ la projection de U sur l'axe des ordonnées, et $l_y(U)$ la longueur de $\Pi_y(U)$.

On utilise le lemme suivant :

Lemme : Pour tout ouvert $W \subset R$, il existe $n > 0$ tel que $\Pi_y(\Phi^n(W))$ est l'intervalle $(-y^*, y^*)$. Càd : $\Phi^n(W)$ coupe tout segment $y = a$ à l'intérieur de R .

Démonstration. La preuve se fait essentiellement à partir d'arguments de connexité et à partir du fait que $g'(y) > \sqrt{2} > 1$. Le choix est fait de ne pas s'attarder sur cette preuve mineure. \square

Retour à la démonstration du théorème :

On veut montrer qu'il existe un point de W_1 tel que son image itérée un certain nombre de fois par Φ est dans W_2 , i.e. : $\exists n, \exists(\tilde{x}, \tilde{y}) \in W_1, \Phi^n(\tilde{x}, \tilde{y}) \in W_2$.

La deuxième condition sur l'application de Poincaré Φ nous donne que $\frac{\partial f}{\partial x} < c < 1$. Soit (x_1, y) et (x_2, y) deux points de même ordonnée de R . Alors $\Phi^k(x_1, y)$ et $\Phi^k(x_2, y)$ ont aussi même ordonnée $g^k(y)$ pour un k fixé. Ainsi, par récurrence sur k :

$$\forall k > 0, \|\Phi^k(x_1, y) - \Phi^k(x_2, y)\| \leq c^k |x_1 - x_2| \quad (4)$$

On suppose que W_2 est un disque ouvert de diamètre $\varepsilon > 0$ (W_2 est un voisinage ouvert quelconque de P_2 , donc en particulier il contient au moins un disque autour de P_2 de diamètre $\varepsilon > 0$).

On prend un entier m tel que $40c^m < \varepsilon$ (cet entier existe car $40c^m < \varepsilon \iff m > \frac{\log(\varepsilon/40)}{\log(c)}$, 40 est la longueur de R dans la direction des abscisses x donc $\varepsilon/40 < 1$ et $c < 1$ donc la contrainte pour choisir m est une contrainte du type $m > a$ où a est un réel positif).

$P_2 \in A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Phi^n(R)}$ donc en particulier $P_2 \in \Phi^n(R)$ où $n > m$, donc $\Phi^{-m}(P_2) \in \Phi^{-m}(\Phi^n(R))$ est bien défini. On pose $\Phi^{-m}(P_2) = (\xi, \eta)$.

D'après le lemme précédent en $W = W_1$, il existe un entier n tel que $\Phi^n(W_1)$ intersecte toute ligne $y = a$ dans R . En particulier $\Phi^n(W_1)$ intersecte $y = \eta$. Donc on peut trouver ξ_1 tel que $(\xi_1, \eta) \in \Phi^n(W_1)$. Donc on peut trouver un point $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in W_1$ avec $(\xi_1, \eta) = \Phi^n(\tilde{x}, \tilde{y})$. $\Phi^n(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\xi_1, \eta)$ et $\Phi^{-m}(P_2) = (\xi, \eta)$ ont même ordonnée $y = \eta$, donc on peut appliquer (4) avec $k = m$:

$$\|\Phi^m(\xi_1, \eta) - \Phi^m(\xi, \eta)\| \leq c^m |\xi_1 - \xi| \implies \|\Phi^m(\Phi^n(\tilde{x}, \tilde{y})) - \Phi^m(\Phi^{-m}(P_2))\| \leq c^m |\xi_1 - \xi| \leq c^m \times 40 < \varepsilon$$

Finalement : $\|\Phi^{m+n}(\tilde{x}, \tilde{y}) - P_2\| < \varepsilon$. Comme on a supposé que W_2 est un disque de diamètre ε centré autour de P_2 , alors on obtient directement que $\Phi^{m+n}(\tilde{x}, \tilde{y}) \in W_2$, donc le troisième point de la définition de l'attracteur est vérifié pour A . \square

3.4 Étude de g

On se concentre ici sur l'étude de la fonction g . On sait que deux points de même ordonnée y dans le rectangle Σ ont pour image par Φ deux nouveaux points ayant une même coordonnée $g(y)$. De plus, on sait que la distance entre ces points est contractée par Φ .

Soit I l'intervalle donné par $I = [-y^*, +y^*]$. g est définie sur I privé de $y = 0$, et par symétrie par rapport à (Oz) , $g(-y) = -g(y)$. On sait aussi que $g'(y) > \sqrt{2}$, $0 < g(y^*) < y^*$, $-y^* < g(-y^*) < 0$, et $g(y) \rightarrow \mp y^*$ lorsque $y \rightarrow 0^\pm$.

Le graphe de g sera donc de la forme ci-dessous (figure 11).

On peut faire des observations simples à partir de ce graphe, et notamment à propos du nombre d'antécédents par g :

- si $y \in [g(-y^*), g(y^*)]$: deux antécédents
- si $y \in]-y^*, g(-y^*)[$ ou $y \in]g(y^*), y^*[$: un antécédent
- si $y = \pm y^*$: pas d'antécédent car g non définie en 0.

Soit $y_0 \in I$. On va essayer de déterminer la structure de $A \cup \{y = y_0\}$.

On définit :

- une orbite du futur (de l'anglais *forward orbit*) : une suite (y_0, y_1, y_2, \dots) définie par $y_{n+1} = g(y_n) = g^{n+1}(y_0)$. Elle est unique pour chaque y_0 , et se termine si une itération de y_0 par g donne 0.

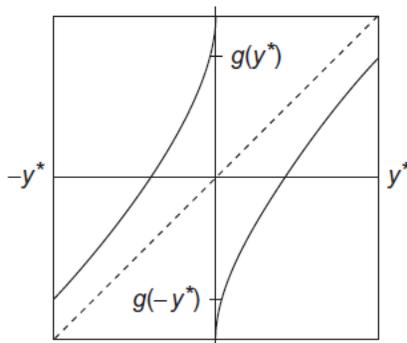


FIGURE 11 – Graphe de la fonction unidimensionnelle g

— une orbite du passé (*backward orbit*) : une suite de nombres $(y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots)$ définie par $g(y_{-n}) = y_{-n+1}$. Il existe une infinité d'orbites du passé pour chaque y_0 fixé différent de $\pm y^*$.

En effet, si y_0 n'est pas sur une orbite du futur de $\pm y^*$, alors chaque point de l'orbite du passé de y_0 possède un ou deux antécédents. Mais on a jamais deux nombres à la suite qui ne possèdent qu'un antécédent par g . Si l'on a qu'un antécédent, c'est qu'on se situe sur $] -y^*, g(-y^*)[$ ou $]g(y^*), y^*[$, mais alors son antécédent possède lui-même deux antécédents (on peut le voir graphiquement). Et si on a $y_{-k} = \pm y^*$ pour un certain k , alors l'orbite s'arrête, mais son image par g avait deux antécédents, donc on peut continuer l'orbite.

On va maintenant montrer le résultat suivant :

Lemme. *À chaque orbite du passé de y_0 on peut associer un unique point dans $A \cap \{y = y_0\}$.*

Démonstration. On pose :

$$J_{-k} = R \cap \{y = y_{-k}\} \quad \forall k$$

Alors pour k fixé,

$$\Phi^k(J_{-k}) \subset (\Phi^k(\{y = y_0\}) \cap \Phi^k(R)) \subset (\{y = y_0\} \cap R)$$

car $g^k(y_{-k}) = y_0$

On a aussi :

$$\Phi(J_{-k-1}) \subset (\Phi(\{y = y_{-k-1}\}) \cap \Phi(R)) \subset (\{y = y_{-k}\} \cap R) = J_{-k}$$

Ainsi $\bigcap_{k \geq 0} \Phi^k(J_{-k})$ existe et est non vide.

(car on a : $\forall k, \Phi^{k+1}(J_{-k-1}) = \Phi^k(\Phi(J_{-k-1})) \subset \Phi^k(J_{-k}) \subset \Phi^{k-1}(J_{-(k-1)}) \subset \dots \subset J_0$)

Tout point appartenant à cette intersection a pour orbite du passé $(y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots)$ par construction. Et ce point est unique, puisque à chaque application de Φ , J_{-k} est contractée par un facteur $c < 1$ (donc la limite à l'infini ne comporte qu'un point). \square

Comme on sait que pour chaque y_0 il y a une infinité d'orbites du passé, on a donc une infinité de points dans $A \cap \{y = y_0\}$.

Ainsi :

Proposition. *A rencontre chaque segment $y = y_0 \neq \pm y^*$ dans R à une infinité de points distincts. Chaque solution qui passe par un point de $y = y_0$ va à temps supérieur intersecter $y = 0$, et dans ce cas la solution va tendre vers l'équilibre de l'origine, ou bien elle va continuer à intersecter régulièrement R et la distance entre les abscisses des points d'intersection va tendre vers 0 quand le temps augmente.*

Démonstration. La preuve est immédiate avec le lemme précédent (puisque $\mathcal{A} \cap R = A$, donc le comportement de toute solution de \mathcal{A} dans le rectangle R est entièrement déterminé par son comportement dans A).

On regarde une solution qui rencontre $y = y_0$ à un certain temps. On sait que l'orbite du futur démarrant en y_0 va s'arrêter uniquement si il existe un n tel que $g^n(y_0) = 0$, et dans ce cas, en observant la figure 3, on comprend que la solution est attirée par l'équilibre de l'origine.

S'il n'existe pas un n de ce type, alors l'orbite du futur de y_0 ne va pas s'arrêter, donc la solution va passer régulièrement dans R , et la distance entre les abscisses de ces points va diminuer à temps supérieur (cela vient directement du fait que $\partial f / \partial x < c < 1$). \square

Dans la suite du chapitre étudié [5], on continue à étudier le comportement de g et de Φ dans R et on réussit à montrer que l'application de Poincaré Φ restreinte à A est chaotique pour le modèle du système de Lorenz, c'à d qu'elle dépend fortement des conditions initiales, que les points périodiques de Φ sont denses dans A , et que Φ est transitive sur A .

4 Conclusion

Le système de Lorenz, bien que simple dans son expression et résultant d'une très grande simplification, est très complexe à résoudre. On ne peut trouver une forme explicite de ces solutions, mais on peut montrer certaines de ses caractéristiques selon les valeurs que vont prendre ses paramètres. C'est ce qu'on a vu dans la partie 1 de ce mémoire. Ce n'est qu'avec un modèle, développé dans la deuxième partie, qu'on peut montrer que le système de Lorenz possède un attracteur et qu'il est chaotique pour cet attracteur (point non montré ici). On connaît ce système depuis maintenant 57 ans mais il continue à autant intriguer les mathématiciens.

Il existe d'autres systèmes dynamiques en trois dimensions ayant des caractéristiques similaires, comme par exemple le système de Rössler, dont l'attracteur n'est pas en forme de papillon, mais plutôt un tourbillon étrange. Son équation est donnée par :

$$\begin{cases} x'(t) &= -y(t) - z(t) \\ y'(t) &= x(t) + ay(t) \\ z'(t) &= b + z(t)(x(t) - c) \end{cases} \quad (5)$$

où a, b, c sont des paramètres fixés.

Ici pour $a = 0.1, b = 0.1$ et $c = 14$ et des conditions initiales à $(x_0, y_0, z_0) = (10, 6, 3)$: cf figure 12.

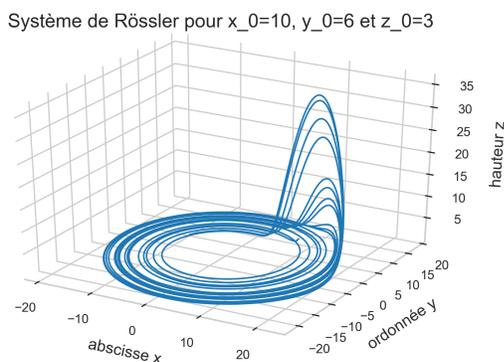


FIGURE 12 – Représentation du système de Rössler avec des conditions initiales fixées à $(x_0, y_0, z_0) = (10, 6, 3)$ et les paramètres $a = 0,1, b = 0,1$ et $c = 14$

Lorsque Rössler a publié la découverte de cette équation en 1976 (cf [6]), il explique qu'il cherchait à trouver une équation plus simple que celle de Lorenz mais avec le même caractère chaotique. L'équation est en effet plus simple puisqu'elle ne comporte qu'un terme non-linéaire.

Remerciements

Je souhaiterais remercier Daniela Tonon, qui m'a permis de réaliser ce travail sur le système de Lorenz, et qui bien voulu répondre à mes nombreuses questions.

Bibliographie

- [1] Edward LORENZ. “Deterministic nonperiodic flow”. In : *Journal of the atmospheric sciences* 20.2 (1963), p. 130-141.
- [2] Edward LORENZ. *Predictability : does the flap of a butterfly’s wing in Brazil set off a tornado in Texas ?* 1972.
- [3] Philippe ETCHECOPAR et Cégep de RIMOUSKI. “Quelques éléments sur la théorie du chaos”. In : (2002).
- [4] Warwick TUCKER. “The Lorenz attractor exists”. In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 328.12 (1999), p. 1197-1202.
- [5] Morris W HIRSCH, Stephen SMALE et Robert L DEVANEY. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [6] Otto E RÖSSLER. “An equation for continuous chaos”. In : *Physics Letters A* 57.5 (1976), p. 397-398.