Université Paris Dauphine,
L3, Année 2013-2014

Partiel de théorie des jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Question de cours. Soit $\Gamma = (N, (A^i)_{i\in\mathbb{N}}, (g^i)_{i\in\mathbb{N}})$ un jeu à N joueurs et à ensembles d'action finis. Soient a^i et b^i deux éléments de A^i.

1. Donner la définition mathématique de "a^i est faiblement dominée par b^i" et "a^i est strictement dominée par b^i" .
2. Si $a = (a^1, \cdots, a^N)$ est un équilibre de Nash, a^i peut elle être faiblement dominée ? Si oui, donner un exemple, si non donner une démonstration.

Exercice 1. Trois magasins M^1 M^2 et M^3 cherchent à s'installer dans un centre commercial. Chacun d'entre eux doit décider s'il va vendre de l'(A)limentation ou des outils de (B)ricolage. Il y a 60 clients intéressés par l'alimentation et K par le bricolage, où $K > 60$ est un paramètre fixé et connu de tous. Si plusieurs magasins choisissent le même créneau, les clients intéressés se distribuent de façon équitable entre eux. Le paiement de chaque magasin est le nombre de ses clients et on suppose que le choix est séquentiel : M_1 choisit A_1 ou B_1, puis M_2, puis M_3, chaque magasin ayant observé le choix des précédents. On raisonnera en stratégies pures.

1. Représenter cette interaction comme un jeu sous forme extensive à information parfaite.
2. Dans la forme normale associée (qu'on ne demande pas de représenter), combien chaque joueur a t-il de stratégies ?
   Les réponses aux questions suivantes peuvent se faire sur l'arbre, **si c'est fait de manière claire** (par exemple avec de la couleur).
3. On suppose $K = 150$, trouver tous les équilibres sous-jeux parfaits.
4. Même question avec $K = 90$.
5. Pour $K = 90$, trouver un équilibre de Nash donnant un paiement de 60 au Joueur 2.
6. Pour $K = 240$ expliquer pourquoi tous les équilibres de Nash ont le même paiement.

Exercice 2. 60 vacanciers veulent aller simultanément de (P)aris à (H)ammamet. Il y a deux chemins possibles, l'un passant par (B)eauvais et l'autre par (T)unis. Les trajets de P à T et de B à H se font par avion et mettent 2h chacun. Le trajet de P à B se fait par la route et le temps mis dépend du traffic : il est de 30 minutes plus 1 minute par personne empruntant la route PB. De même le temps mis pour aller de T à H est de 30 minutes plus 1 minute par personne empruntant la route TH. Chaque joueur i a donc le choix entre la route PBH (cette action est notée B^i) et la route PTH (action T^i) et cherche à maximiser son gain, qui est l'opposé du temps (en minutes) qu'il met pour aller de Paris à Hammamet. On ne considère que les stratégies pures.

1. Jeu initial
   (a) On cherche à modéliser cette situation par un jeu sous forme normale. Pour tout a^{-i} un profil d'actions des joueurs autre que i on note n_B^{-i} et n_T^{-i} le nombre de vacanciers autre que i choisissant l'action B et T respectivement. Calculer $g^i(B^i, a^{-i})$ et $g^i(T^i, a^{-i})$ en fonction de ces quantités et en déduire la correspondance de meilleure réponse du joueur i.
   (b) Trouver tous les équilibres en stratégies pures (on pourra raisonner suivant k le nombre de vacanciers passant par B). En déduire que dans tout équilibre, chaque joueur met un temps t que l'on déterminera.
2. Jeu modifié. On suppose maintenant que la France et la Tunisie, afin d'améliorer le temps de parcours des vacanciers, ont décidé de construire un avion supersonique allant de B à T. Chaque vacancier peut désormais aller de Beauvais à Tunis en 20 minutes. Par rapport à la partie précédente il y a donc une troisième action possible BT^i pour chaque joueur correspondant au trajet $PBTH$ Paris-Beauvais-Tunis-Hammamet.
   (a) Pour un joueur i fixé et un profil des autres joueurs a^{-i} on note n_B^{-i}, n_T^{-i} et n_{BT}^{-i} le nombre d'autres joueurs utilisant les actions B, T et BT respectivement. Combien y aura t-il alors de personnes autre que i sur les portions de route PB et TH ? Donner le paiement $g^i(a)$ du joueur i en fonction de a^i et de n_B^{-i}, n_T^{-i} et n_{BT}^{-i}
   (b) Question de cours : rappeler la définition d'une stratégie dominante du joueur i.
   (c) Montrer que chaque joueur possède une stratégie dominante ; en déduire qu'il existe un unique équilibre de Nash. Donner le temps t' mis par chaque joueur à l'équilibre et commenter.

Exercice 3. Soit Γ le jeu à deux joueurs et à somme nulle joué sur une matrice carrée M diagonale de taille $n \geq 2$: $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $m_{ii} = m_i > 0$. Dans tout l'exercice on considère le jeu joué en stratégies mixtes.

1. Trouver un couple de stratégies optimales (on pourra les chercher de support plein, c'est à dire donnant une probabilité strictement positive à chaque action) et montrer que la valeur du jeu est $\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m^i}}$.
2. Montrer que toutes les stratégies optimales du joueur 1 ont un support plein.
3. Plus difficile : montrer que toutes les stratégies optimales du joueur 2 ont un support plein. On pourra, pour chaque support possible J, considérer la valeur du jeu où les deux joueurs se restreignent à jouer des stratégies de support J.
4. Si on ne fait pas l'hypothèse $m_i > 0$ pour chaque i, trouver un jeu dans lequel les seules stratégies optimales sont pures.
5. On suppose dans cette question à nouveau que $m_i > 0$ pour chaque i, mais maintenant le Joueur 2 cherche lui aussi à maximiser (et non plus minimiser) le paiement. Autrement dit on a un jeu à somme non nulle ou le paiement de chaque joueur est identique. Expliquer brièvement pourquoi le profil trouvé à la première question est un équilibre de Nash. Est-ce le seul ?