Université Paris Dauphine,
L3, Année 2015-2016

Partiel d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Exercice 1. Les deux premières parties sont indépendantes.

1. Produits de Cauchy
   (a) Question de cours : soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R' respectivement. Donner sans démonstration c_n telle que $f(z)g(z) = \sum c_n z^n$. Que peut on dire du rayon de convergence de cette dernière série entière ? On pourra utiliser à loisir les résultats de cette question par la suite.
   (b) Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entières de rayon de convergence R. Pour tout entier k, montrer que $f^k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} z^n$ avec $a_{n,k} = \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$.
2. Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions $g_m(z) = \frac{1}{(1-z)^m}$ définies sur $U = B_o(0,1)$ pour m entier supérieur à 1. On note $g_m^{(j)}$ la dérivée j-ième de g_m.
   (a) Calculer $g_1^{(j)}(z)$ pour tout $z \in U$.
   (b) En remarquant une relation entre g_m et $g_1^{(m-1)}$, calculer $g_m^{(j)}(z)$ pour tout $z \in U$.
3. On cherche dans cette partie à calculer pour tout entiers n et k le nombre de solutions de l'equation $i_1 + \cdots + i_k = n$ où i_1, i_2, i_k sont des inconnues à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $b_{n,k}$ ce nombre. Par exemple, $b_{n,1} = 1$, $b_{n,2} = n+1$, $b_{1,k} = k$.
   (a) Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,1} z^n$? Quel est sa somme ?
   (b) En utilisant la partie 1, montrer que pour tout k, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,k} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et est de somme $g_k(z)$.
   (c) En utilisant la partie 2, en déduire une formule simple pour $b_{n,k}$.

Exercice 2. On cherche à caractériser les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle suivante : $f(z^2) = f(z)^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Trouver toutes les fonctions solutions constantes sur $\mathbb{C}$.
2. A partir de maintenant on suppose f solution et non constante. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3. On suppose que $f(0) = 1$. Montrer qu'il existe z tel que $|z| \leq \frac{1}{2}$ et $|f(z)| < 1$. En considérant $f(z^{2^n})$, aboutir à une contradiction. Que vaut donc $f(0)$?
4. Justifier qu'il existe un plus petit entier k tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et une fonction analytique $g(z)$ définie sur $B_o(0,R)$ et ne s'annulant pas en 0 telle que $f(z) = z^k g(z)$ sur $B_o(0,R)$.

5. Montrer que g est également solution de l'équation fonctionnelle et conclure.

Exercice 3. Pour toute fonction entière (analytique sur $\mathbb{C}$), on note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f.

1. Donner (en justifiant précisément) une fonction f entière non constante telle que $Z(f)$ est vide.
2. Donner (en justifiant précisément) une fonction f entière non constante telle que $Z(f)$ est infini.
3. Soit E un ensemble fini. Trouver une fonction f entière telle que $Z(f) = E$.
4. Question de cours : définir un point isolé et énoncer le principe des zéros isolés.
5. Montrer que pour tout compact (fermé borné) K, $Z(f) \cap K$ est fini.