Université Paris Dauphine,
L3, Année 2016-2017

Partiel d'Analyse Complexe

Instructions :

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

Les résultats du cours (et le critère de d'Alembert) sont supposés connus et peuvent être utilisés sans démonstration.

Les seules questions possibles durant l'examen s'adressent au professeur responsable du cours et concernent d'éventuelles coquilles dans le sujet. Si besoin le professeur indiquera alors à l'ensemble des élèves les rectificatifs à apporter.

A l'issue de l'examen et au signal donné par le professeur, tous les élèves doivent immédiatement poser leur stylo, se lever, et rester à leur place jusqu'à ce que les copies aient été ramassées. Il n'y a pas d'exception, et en particulier il n'est pas autorisé de remplir nom/prénom des copies intercalaires après la fin de l'épreuve.

Exercice 1. Question de cours : énoncer le principe du prolongement analytique. Puis trouver toutes les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ vérifiant pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

a) $f_1(1+1/n) = 1/n$.

b) $f_2(1+1/n) = 1+2/n+(1/n)^2$.

c) $e^{f_3(1+1/n)} = 1+1/n$.

Exercice 2. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n2^n z^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n$

c) $1+z^2+z^3$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2+(-1)^n) z^n$

Exercice 3. On cherche dans cet exercice des solutions à l'équation différentielle suivante :

$$f(z) = z + z^2 f'(z), \ \forall z \in U \tag{0.1}$$

où U est un ouvert donné non vide.

1. Dans cette question on suppose que f solution de (0.1) est une série entière centrée en 0. C'est à dire : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et $U = B_o(0,R)$ où R est le rayon de convergence de la série entière.

(a) Montrer que sur U, $z^2 f'(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n$ où b_n est une suite à déterminer.

(b) En déduire que nécéssairement $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, et que pour $n \geq 2$ $a_n = \alpha_n a_{n-1}$ où α_n est une suite à déterminer.

(c) Montrer que $a_n = (n-1)!$ pour tout $n \geq 2$. Que vaut R ? Conclure.

2. Trouver toutes les solutions de (0.1) qui vérifient $0 \in U$ et f analytique sur U.

Exercice 4. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des couples (f, P), où f est une fonction analytique de $\mathbb{C}$ dans lui même, et $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme non identiquement nul d'une variable réelle, qui vérifient

$$|f(z)| = P(|z|), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

On note d le degré de P et $P(X) = c_d X^d + \cdots + c_0$. Les trois premières parties sont indépendantes.

1. On suppose dans cette partie que (f, P) est solution du problème et que P ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$
   (a) Montrer que $c_d > 0$
   (b) Montrer que P atteint son minimum sur $[0, +\infty[$. Indication : on pourra séparer les cas P constant et P de degré au moins 1, et calculer $lim_{x \to +\infty} P(x)$ dans le second cas.
   (c) Question de cours : Enoncer le théorème du module minimal
   (d) Montrer que f est une constante $c \in \mathbb{C}^*$. Qu'en déduit-on sur P ?
2. Dans cette partie on suppose que (f, P) est solution du problème et que P s'annule en un point $x \in]0, +\infty[$. Montrer que f est la fonction nulle et aboutir à une contradiction. Indication : on pourra appliquer le principe du prolongement analytique à un ensemble bien choisi.
3. Dans cette partie on suppose que (f, P) est solution du problème et que $P(0) = 0$. Il existe donc un polynôme Q tel que $P(x) = xQ(x)$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $g(0) = f'(0)$ et $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ si $z \in \mathbb{C}^*$.
   (a) Question de cours : donner la définition de "f est analytique en 0".
   (b) Que vaut f(0) ? En déduire qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $\delta > 0$ tels que

   $$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

   pour tout z dans $B_o(0, \delta) \setminus \{0\}$.
   (c) Donner une relation liant b_0 et la fonction f, et en déduire que g est analytique en 0.
   (d) Montrer que g est analytique sur $\mathbb{C}^*$.
   (e) Montrer que (g, Q) est également solution du problème.
4. Montrer par récurrence sur le degré d de P que (f, P) est solution si et seulement si il existe un réel strictement positif a et un complexe b tels que $|b| = a$, $f(z) = bz^d$, et $P(x) = ax^d$.
5. Question bonus : si f est maintenant supposée analytique de $\mathbb{R}$ dans lui même, donner un couple solution qui n'est pas de la forme donnée en 4).