Université Paris Dauphine,
L3, Année 2017-2018

Partiel de théorie des Jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés.

Exercice 1. $N \geq 2$ entreprises en concurrence décident simultanément du prix $p^i \in [0, 2]$ auquel elles vont vendre un bien. La demande auprès d'une entreprise est d'autant plus forte que son prix est faible et que le prix moyen de la concurrence est élevé ; le gain de l'entreprise i est donc donné par $g^i(p^1, \cdots, p^N) = p^i(6 - 3p^i + 2 \cdot \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} p_j)$. Dans tout l'exercice on ne considère que les stratégies pures.

1. Déterminer la correspondance de meilleure réponse du joueur i.
2. En déduire l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures et donner leur paiement.

Exercice 2. Soit Γ un jeu fini à deux joueurs et à somme non nulle. On note A^1 et A^2 les ensembles de stratégies pures des joueurs, X^1 et X^2 les ensembles de stratégies mixtes, et g^1 et g^2 les fonctions de paiements.

On dit qu'une stratégie pure b^1 du joueur 1 n'est jamais meilleure réponse (sous entendu à une stratégie mixte du joueur 2) si :

$$\forall x^2 \in X^2,\ \exists a^1 \in A^1, g^1(a^1, x^2) > g^1(b^1, x^2).$$

1. (a) Question de cours : donner la définition de "$b^1 \in A^1$ est strictement dominée par une stratégie mixte".
   (b) Montrer que si b^1 est strictement dominée par une stratégie mixte, alors elle n'est jamais meilleure réponse.
   (c) Est-il vrai qu'une stratégie faiblement dominée n'est jamais meilleure réponse ? Si oui, le prouver. Sinon, donner un contre-exemple.
2. On cherche à prouver une réciproque du 1)b). Pour cela, on fixe une stratégie $b^1 \in A^1$ qui n'est jamais meilleure réponse, et l'on considère le jeu auxiliaire $\widetilde{\Gamma}$ suivant. $\widetilde{\Gamma}$ est un jeu à deux joueurs et à somme nulle, dans lequel les ensembles de stratégies pures sont toujours A^1 et A^2, et le paiement est donné par $h(a^1, a^2) = g^1(a^1, a^2) - g^1(b^1, a^2)$.
   (a) Montrer que $\min_{x^2 \in X^2} \max_{a^1 \in A^1} h(a^1, x^2) > 0$. Que peut on dire de $\min_{x^2 \in X^2} \max_{x^1 \in X^1} h(x^1, x^2)$?
   (b) Question de cours : énoncer le théorème du minmax de von Neumann.
   (c) Montrer que dans le jeu Γ, la stratégie b^1 est strictement dominée par une stratégie mixte.

Exercice 3. Trois électeurs nommés J^1 J^2 et J^3 doivent choisir entre 3 candidats nommés A B et C. Chaque électeur exprime un vote noté A^i, B^i ou C^i selon le candidat choisi. Si un candidat recueille au moins deux votes il est élu et on note A, B ou C le candidat élu. Si chaque candidat a exactement un vote personne n'est élu et on note $\emptyset$ le résultat final. Les fonctions de gain de J^1 J^2 et J^3 ne dépendent que de l'identité du candidat élu :

$$\begin{aligned}
g^1(A) = g^2(B) = g^3(C) &= 3 \\
g^1(B) = g^2(C) = g^3(A) &= 1 \\
g^1(C) = g^2(A) = g^3(B) &= 0 \\
g^1(\emptyset) = g^2(\emptyset) = g^3(\emptyset) &= 0
\end{aligned}$$

La première partie de l'exercice consiste en des préliminaires, certains utiles pour les deux parties suivantes qui sont indépendantes l'une de l'autre. Dans tout l'exercice les préférences de chacun sont connaissance commune.

1. Préliminaires. Dans cette question on ne s'intéresse qu'aux stratégies pures
   (a) Montrer que A^1 n'est pas une stratégie dominante pour le joueur 1.
   (b) Expliquer brièvement pourquoi C^1 est faiblement dominée par les deux autres stratégies de J^1. Montrer qu'elle n'est pas fortement dominée.
   (c) Pour chaque autre joueur, donner sans justification une stratégie faiblement dominée.

   Pour simplifier, on supposera dans toute la suite que personne ne joue sa stratégie faiblement dominée (chaque joueur n'a donc plus que 2 actions).
2. Dans cette partie, on suppose que les trois electeurs votent l'un après l'autre dans l'ordre J^1 puis J^2 puis J^3. Chaque vote est public.
   (a) Écrire le jeu sous la forme d'un jeu sous forme extensive.
   (b) Dans la forme normale associée (qu'on ne demande pas d'écrire !) combien chaque électeur a t-il de stratégies ?
   (c) Déterminer tous les équilibres sous jeux parfaits (en stratégies pures). Vous pouvez répondre sur l'arbre, **si c'est fait de manière claire**. Pour chacun de ces équilibres, donner le candidat élu et expliquer le vote de J^1.
   (d) Déterminer un équilibre de Nash dans lequel C est élu.
3. Dans cette partie, on suppose que les trois électeurs votent en même temps. Ils jouent donc au jeu sous forme normale suivant, où J^1 choisit une ligne, J^2 une colonne et J^3 la matrice de gauche ou de droite :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B^2 & C^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A^1 \\ B^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (3,0,1) & (3,0,1) \\ (1,3,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ & A^3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B^2 & C^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,3) \\ (1,3,0) & (0,1,3) \end{pmatrix} \\ C^3 \end{array}$$

   (a) Déterminer les équilibres en stratégies pures.

(b) Déterminer les équilibres dans lesquels chaque électeur joue une stratégie complètement mixte (c'est à dire non pure), et donner le paiement de chaque joueur dans chacun de ces équilibres.

(c) Plus difficile : déterminer un équilibre dans lequel au moins un joueur joue une stratégie pure, et au moins un joueur joue une stratégie complètement mixte.