

Examen de rattrapage de Théorie des Jeux

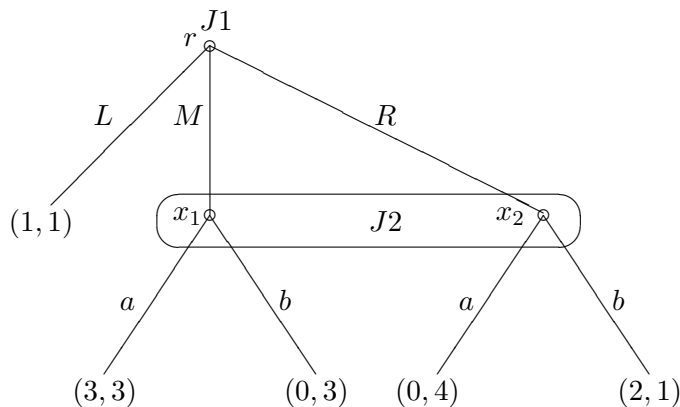
La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées.

Question de cours. Soit $\Gamma = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ un jeu à N joueurs et à ensembles d'actions finis. Montrer qu'un profil de stratégies mixtes x est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si

$$\forall i \in N, \forall a \in A^i, x^i(a) > 0 \implies g^i(a, x^{-i}) = \max_{b \in A^i} g^i(b, x^{-i}).$$

Exercice 1. On considère le jeu à deux joueurs suivant :

Jeu 1



1. Montrer que l'action R ne peut pas être jouée avec probabilité positive dans un équilibre de Nash.
2. Déterminer tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes.
3. Parmi ces équilibres, déterminer ceux qui sont Bayesiens parfaits.

Exercice 2. On considère le jeu à deux joueurs Γ où les ensembles d'actions sont $A_1 = A_2 =]0, +\infty[$ et où la fonction de paiement du joueur i est donnée par

$$g_i(a_1, a_2) = 3a_1a_2 - a_i^3.$$

Dans tout l'exercice on ne s'intéresse qu'aux stratégies pures.

1. Déterminer la correspondance de meilleure réponse du joueur 1. Donner ensuite celle du joueur 2 sans justification.
2. Montrer que le jeu admet un unique équilibre de Nash, et qu'il est de la forme (a^*, a^*) pour un a^* que l'on déterminera. Donner le paiement d'équilibre correspondant.
3. Parmi tous les profils symétriques (a, a) , déterminer le profil (\tilde{a}, \tilde{a}) qui donne un paiement maximal à chaque joueur, et calculer ce paiement.
4. La meilleure réponse du Joueur 1 à \tilde{a} est notée \hat{a} , la déterminer. Que vaut $g_1(\hat{a}, \tilde{a})$?
5. Dans cette question on considère le jeu Γ_λ , infiniment répété et escompté avec un taux d'escompte λ . Dans ce jeu, soit σ_i la stratégie du joueur i qui consiste à :
 - Jouer \tilde{a} à la première étape
 - A chaque étape suivante, jouer \tilde{a} si tous les joueurs ont joué \tilde{a} à toutes les étapes précédentes, a^* sinon.
 Soit σ le profil (σ_1, σ_2) . Donner son paiement, puis montrer que c'est un équilibre de Nash de Γ_λ dès que λ est plus petit qu'un seuil λ_0 que l'on déterminera.

Exercice 3. On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle suivant (poker simplifié) où $p \in]0, 1[$ est un paramètre connu de tous. Les lettres entre parenthèses sont des suggestions de notations sur l'arbre.

Le joueur 1 tire une carte au hasard, elle est (H)aute avec probabilité p et (B)asse avec probabilité $1 - p$. Il la regarde secrètement et choisit ensuite d'(A)rrêter ou de (M)iser. S'il arrête il donne 1 euro au Joueur 2 et le jeu est terminé. Sinon, c'est au Joueur 2 de jouer, il doit choisir de se (C)oucher ou de (R)elancer. S'il se couche il donne 2 euros au Joueur 1 et le jeu est terminé. Si le Joueur 2 relance, le Joueur 1 révèle sa carte : si elle est Haute J2 doit 4 euros à J1, si elle est basse c'est J1 qui doit 4 euros à J2.

Remarque : le Joueur 2 ne tire pas de cartes dans ce poker simplifié.

1. Jeu sous forme extensive
 - (a) Ecrire le jeu sous forme extensive.
 - (b) Dans la forme normale associée (qu'on ne demande pas pour l'instant de donner) combien chaque joueur a-t-il de stratégies? Donner un nom à chacune de ces stratégies.
 - (c) Expliquer brièvement pourquoi il est clair que 2 des stratégies du Joueur 1 sont strictement dominées.
2. Jeu sous forme normale
 - (a) Ecrire le jeu sous forme normale (pas besoin d'écrire les stratégies strictement dominées si vous avez fait la question précédente).
 - (b) Montrer qu'une des stratégies du Joueur 2 est strictement dominée dès que p est strictement plus grand qu'un seuil p_0 que l'on déterminera. Dans ce cas, montrer que le jeu admet une valeur en stratégie pure; la déterminer ainsi que les stratégies optimales des deux joueurs.
 - (c) Dans le cas $p < p_0$, donner le maxmin et le minmax du jeu en stratégies pures. Le jeu a-t-il une valeur en stratégies pures? Déterminer la valeur en stratégies mixtes ainsi que les stratégies optimales des deux joueurs.
 - (d) Dans le cas $p = p_0$, déterminer la valeur du jeu en stratégie mixte ainsi que toutes les stratégies optimales de chaque joueur.