Université Paris Dauphine,
L3, Année 2015-2016

# Rattrapage d'Analyse Complexe

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées ; la correction récompensera la rigueur, précision et clarté des démonstrations.

**Question de cours.**

1. Donner la définition de l'indice d'un point $z$ par rapport à une courbe $\gamma$.
2. Donner sans démonstration la formule d'Hadamard donnant le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. Donner la définition d'une fonction analytique sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$.

**Exercice 1.** On fixe $A$ et $B$ deux constantes positives et $m \geq 1$ un entier. Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $|f(z)| \leq A + B|z|^m$, pour tout $z \in \mathbb{C}$

1. Pour tout entier $n \geq 0$ montrer que
$$f^{(n)}(0) \leq \frac{n!(A + Br^m)}{r^n}$$
pour tout réél $r > 0$.
2. En déduire que $f$ est un polynome de degré inferieur ou égal à $m$.
3. Application 1 : trouver toutes les $f$ holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
4. Application 2 : trouver toutes les $f$ holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Indication : $\sqrt{x} \leq 1 + x$ pour tout $x$ positif.

**Exercice 2.** (Lemme de Schwarz)

1. Soit $f$ une fonction analytique sur le disque ouvert unité $D$ telle que $f(0) = 0$ et avec $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z$ dans $D$. Montrer que $|f(z)| \leq z$ sur $D$, que $|f'(0)| \leq 1$, et que toutes ces inégalités sont strictes (à part évidemment $f(0) \leq 0$) lorsque $f$ n'est pas une homothétie.
2. Application 1 : trouver toutes les involutions analytiques de $D$ dans $D$ (les fonctions analytiques $f$ telles que $f \circ f = Id$) telles que $f(0) = 0$.
3. Application 2 : Montrer que pour tout $z$ dans $D \backslash \{0\}$ on a $|\sin(z)| \leq \sinh(1)|z|$.

**Exercice 3.** Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos(t)+\sqrt{5}}$.

**Exercice 4.** Soit $a_n$ la suite définie par récurrence pour $n \geq 0$ par $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, et $(n+2)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + a_n$. On cherche à déterminer la somme de la série entière complexe $f(z) = \sum a_n z^n$. Les deux parties sont largement indépendantes.

1. Partie 1 : détermination du rayon de convergence.
   (a) Montrer que $|a_n| \leq 3$ pour tout $n \geq 0$.
   (b) En déduire un minorant strictement positif du rayon de convergence $R$ de $f$.
2. Partie 2 : Calcul de $f$. Dans cette partie $x$ est un réel.
   (a) Pourquoi $f$ est elle dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$ ?
   (b) Montrer que $\forall x \in ]-R, R[$, $(1-x)f'(x) = xf(x)$.
   (c) Soit $g(x) = (1-x)e^x f(x)$. Calculer $g'(x)$ pour $x \in ]-R, R[$.
   (d) En déduire la valeur de $f$ sur $]-R, R[$, puis sur le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon $R$.
   (e) Que vaut $R$ ?
   (f) Montrer que $a_n$ tend vers $3/e$ quand $n$ tend vers $+\infty$. On pourra commencer par trouver une formule explicite pour $a_n$ en écrivant $f$ comme un produit de Cauchy de deux séries usuelles.