

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 1 : Jeux à somme nulle en stratégies pures.

1. Soit (A, B, g) un jeu admettant un maxmin. Montrer que si $a \in A$ est strictement dominée par a' , alors a n'est pas une stratégie maxmin-optimale du joueur 1.
2. Considérer le jeu suivant : $A = B = \mathbb{N}$ et $g(a, b) = \frac{1}{1+a+b}$.
 1. Calculer l'inf-sup et le sup-inf de ce jeu. Le jeu a-t-il une valeur en stratégies pures ?
 2. Dire pour chaque joueur s'il possède des stratégies optimales ; si oui, les donner.
 3. Montrer que la stratégie "0" du Joueur 1 domine strictement toutes les autres. Commenter.
3. En éliminant successivement des stratégies strictement dominées, trouver la valeur en stratégies pures et les stratégies optimales du jeu

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Duel Bruyant

Deux cowboys avancent l'un vers l'autre armés chacun d'un pistolet contenant une seule balle. A tout instant $t \in [0, 1]$ chacun d'entre eux peut décider de tirer sur le chapeau de son adversaire (la balle est supposée de vitesse infinie) et le touche alors avec probabilité t . Le jeu s'arrête dès qu'un joueur a perdu son chapeau ; il offre alors un verre de whisky à son adversaire. Si les deux chapeaux sont touchés en même temps ou si aucun n'a été touché au temps $t = 1$, personne ne gagne de verre. Le duel est supposé bruyant : si jamais une balle le rate, chaque joueur sait que son adversaire a raté son tir et peut réagir en conséquence.

1. Essayer de modéliser ce duel comme un jeu à somme nulle Γ avec le plus de stratégies possible pour chaque joueur (on ne cherchera pas à exprimer la fonction de paiement).
2. Pour simplifier on modélise le jeu comme suit : le joueur 1 tire au temps $t = a_1$ sauf si le joueur 2 a tiré strictement avant a_1 , dans ce cas il tire au temps $t = a_2 \geq a_1$. On restreint de la même manière les stratégies du Joueur 2 à un choix de b_1 et de b_2 . Donner les ensembles de stratégies et le paiement de ce jeu Γ' .
3. On restreint encore les stratégies des deux joueurs en les obligeant à choisir $a_2 = 1$ et $b_2 = 1$. Donner les ensembles de stratégies et le paiement de ce jeu Γ'' .

4. Pourquoi a-t-on $\underline{v}(\Gamma') = \underline{v}(\Gamma'')$ et $\bar{v}(\Gamma') = \bar{v}(\Gamma'')$?
5. Montrer que le jeu Γ'' a une valeur en stratégies pures, et que chaque joueur possède exactement une stratégie optimale a^* (resp. b^*).
6. Montrer que a^* est la seule stratégie optimale dans Γ'
7. On suppose maintenant que la probabilité d'atteindre son adversaire au temps t n'est plus t , mais est donnée par $p_1(t)$ pour le joueur 1 et $p_2(t)$ pour le joueur 2. Les deux fonctions p_i sont supposées strictement croissantes et valent 0 en 0 et 1 en 1. Répondre à nouveau aux questions 3 et 5.

5. Duel Silencieux

On est dans la même situation que dans l'exercice précédent, mais le duel est silencieux : les cowboys ne savent jamais si leur adversaire a déjà tiré ou non.

1. Modéliser ce duel comme un jeu à somme nulle Γ .
2. Calculer le minmax et le maxmin en stratégies pures. Le jeu admet-t-il une valeur en stratégies pures ?