Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 3 : fonctions convexes.

Dans tous les exercices E est un espace vectoriel.

1. Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose f convexe. Montrer que pour tout réel a le sous niveau $\{x,\ f(x) \leq a\}$ est convexe.
2. Trouver une fonction non convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont tous les sous niveaux sont convexes.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe inclue dans E et $A \subset E$. Montrer que $\sup_A f = \sup_{conv(A)} f$.

3. Une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite sous additive si $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tout x et y dans E. Elle est dite positivement homogène si $f(0) = 0$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $\lambda > 0$ et $x \in E$. Elle est dite sous linéaire si elle vérifie ces deux propriétés.

1. Montrer qu'une fonction sous linéaire est convexe.
2. Montrer qu'une fonction convexe et homogène est sous linéaire
3. Montrer que si f est sous linéaire, à valeur dans $\mathbb{R}$, et vérifie $f(-x) = -f(x)$, alors f est linéaire.
4. Soit E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. Pour tout compact K de E on définit $g_K : E^* \to \mathbb{R}$
$$g_K(f) = \max_{x \in K} f(x).$$
Montrer que h_K est sous linéaire.
5. Soit f convexe et x dans $dom(f)$. Montrer que $f^+(x, \cdot)$ est sous linéaire.

4. Dans cet exercice E est un espace normé. Pour tout ensemble C non vide on définit sur E la fonction distance à cet ensemble par $d_C(x) = \inf_{z \in c} \|x - z\|$. Montrer que si C est convexe alors d_C est convexe.

5. Dans cet exercice E est un espace normé. Soit α un réel. Une fonction f vérifiant

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)y - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x - y\|^2$$

est dite α fortement convexe si $\alpha > 0$, et $-\alpha$ semiconvexe si $\alpha < 0$.

1. Quel est le lien entre la convexité, la forte convexité, et la semi convexité ?
2. A partir de maintenant on suppose que E est un espace de Hilbert. Montrer que $\frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ est α fortement convexe si $\alpha > 0$, et $-\alpha$ semiconvexe si $\alpha < 0$, et que dans les deux cas l'inégalité dans la définition est en fait une égalité.
3. En déduire que f est α fortement convexe si et seulement si $f - \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2$ est convexe ; et que f est β fortement convexe si et seulement si $f + \frac{\beta}{2}\|\cdot\|^2$ est convexe.
4. Soit K un compact de E. Montrer que $-d_K^2$ est 2 semi convexe.