Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 4 : dérivabilité des fonctions convexes.

1. Soit E l'ensemble des suites réelles sommables. Le but de l'exercice est d'étudier la dérivabilité de la fonction norme 1 : $f(x) = \|x\|_1$. Pour tout n on note e^n la suite dont tous les termes valent 0 sauf le $n-$ième qui vaut 1.

1. Soit $x \in E$ telle que $x_n = 0$. Calculer $f^+(x, e^n)$ et $f^+(x, -e^n)$ et en déduire que $f^+(x, \cdot)$ n'est pas linéaire.
2. Soit $x \in E$ telle que $x_n \neq 0$ pour tout n. Montrer que $f^+(x, v) = \sum_n v_n signe(x_n)$. En déduire que f est Gâteaux-différentiable en x.
3. Montrer que f n'est Fréchet-différentiable en aucun point de E.

2. Soit K un compact de $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. On note d_K la fonction distance à k : $d_K(x) = \min_{z \in K} \|x - z\|$. L'ensemble des minimiseurs (les projetés de x sur K) est noté $P_k(x)$.

1. On pose $g(x) = \|x\|^2 - d_K(x)^2$. Montrer que $g(x) = \max_{z \in K} 2\langle x|z\rangle - \|z\|^2$ et en déduire que g est convexe.
2. Soit $z \in P_K(x)$. Montrer que $g(x) = 2\langle x|z\rangle - \|z\|^2$. Soit v dans E, montrer que $g(x + tv) - g(x) \geq 2t\langle v|z\rangle$ puis que $g^+(x, v) \geq \max_{z \in P_K(x)} 2\langle v|z\rangle$.
3. On fixe une direction $v \in E$, soit $x_i = x + \frac{1}{i}v$ et $z_i \in P_K(x_i)$. Quitte à extraire une sous suite on suppose que z_i converge vers un point z. Montrer que $g^+(x, v) \leq i(g(z_i) - g(x)) \leq 2\langle v|z_i\rangle$. En déduire que $g^+(x, v) \leq 2\langle v|z\rangle$. Montrer d'autre part que $z \in P_K(x)$.
4. Déduire des deux questions précédentes que $g^+(x, v) = \max_{z \in P_K(x)} 2\langle v|z\rangle$. Montrer que g est Gâteaux-différentable en x si et seulement si $P_K(x)$ est un singleton.
5. En déduire que $P_K(x)$ est de mesure nulle.
6. Trouver un K non convexe tel que l'ensemble des x tels que $card(P_k(x)) \geq 2$ soit non dénombrable.

3. Dans cet exercice E est un espace vectoriel normé. Soit α un réel. Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup +\infty$ et pour tout $\tau > 0$ on appelle τ-régularisée de Moreau-Yosida la fonction

$$f_\tau(x) = \inf_{u \in E} f(u) + \frac{1}{2\tau}\|x - u\|^2$$

1. Calculer les régularisées de Moreau Yosida de l'indicatrice i_C d'un convexe non vide C.

2. Si $E = \mathbb{R}$, calculer les régularisées de Moreau Yosida de la fonction valeur absolue.
3. Dans toute la suite f est convexe continue propre et minorée. Montrer que pour tout τ, f_τ est convexe et partout finie.
4. Montrer que pour tout x, $f_\tau(x)$ est décroissante en τ, et que $\lim_{\tau \to +\infty} f_\tau(x) \geq f(x)$.
5. Montrer que pour tout τ il existe u_τ tel que $f(u_\tau) + \frac{1}{2\tau}\|x - u_\tau\|^2 \leq f_\tau(x) + \tau$.
6. Montrer que u_τ tend vers x et en déduire que $\lim_{\tau \to +\infty} f_\tau(x) = f(x)$.