Université Paris Dauphine,
L3, Année 2010-2011
G. Vigeral

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 4 : Équilibres de Nash en stratégies pures.

1. Calculer les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,-1) \\ (2,2,2) & (-1,3,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (8,4,2) & (7,7,-2) \\ (9,2,5) & (-10,1,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

2. Même question que dans l'exercice précédent, mais pour le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,0,-1) & (1,1,1) \\ (2,0,3) & (5,-1,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-6,4,-1) & (1,2,3) \\ (-8,0,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

3. Calculer dans chaque cas les équilibres de Nash du jeu $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, où $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$, et, x représentant la stratégie du joueur 1 et y celle du joueur 2 :

a) $u_1(x, y) = 5xy - x - y + 2$; $u_2(x, y) = 5xy - 3x - 3y + 5$.

b) $u_1(x, y) = -(x - y)^2$; $u_2(x, y) = (x + y - 1)^2$.

c) $u_1(x, y) = -(x - y)^2$; $u_2(x, y) = (x - y)^2$.

4. Un groupe de n pêcheurs exploite un lac contenant une quantité de poisson considérée comme infinie. Si chaque pêcheur i prend une quantité $x_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix p et cherche à maximiser son revenu (le coût de production est supposé nul).

1. Écrire le revenu du pêcheur i en fonction de $(x_1, ..., x_n)$.

2. Calculer la correspondance de meilleure réponse, les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.
3. Étudier le cas du monopole ($n = 1$) et comparer.

5. Un jeu de marchandage

On note : $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur un point de T, sachant que l'abscisse correspond au paiement du joueur 1, l'ordonnée correspond au paiement du joueur 2, et qu'en cas de désaccord le paiement de chaque joueur sera nul.

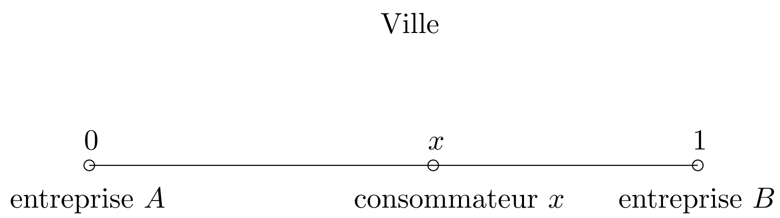
Plus précisément, on considère l'interaction suivante. Simultanément, le joueur 1 choisit un réel x et le joueur 2 choisit un réel y (x et y peuvent être n'importe quels réels). Si $(x, y) \in T$, alors le paiement du joueur 1 est x et celui du joueur 2 est y. Si $(x, y) \notin T$, alors le paiement de chaque joueur est nul. (Ces règles sont connues des deux joueurs.)

1. Modéliser ceci par un jeu sous forme stratégique $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (g_i)_{i\in N})$.
2. Soit (x, y) dans T tels que $x + y = 1$. Montrer que (x, y) est un paiement d'équilibre de Nash de G.
3. Déterminer tous les équilibres de Nash de G.

6. Deux entreprises A et B, situées dans une même ville, produisent le même bien. Le coût unitaire de production de chaque entreprise vaut 1/2. Chaque entreprise doit fixer un prix de vente unitaire, p_A pour l'entreprise A et p_B pour l'entreprise B.

La ville est composée d'un continu de consommateurs. Chaque consommateur achète une unité du bien à une et une seule des deux entreprises.

L'ensemble des consommateurs est situé uniformément dans la ville, qui est linéaire et représentée par le segment [0,1].



L'entreprise A se situe à l'extremité ouest (point d'abscisse 0) de la ville, l'entreprise B se situe à l'extremité est (point d'abscisse 1) de la ville.

Chaque consommateur subit un coût de transport linéaire : se déplacer d'une distance y coûte $y/2$. Ainsi, si un consommateur habitant au point $x \in [0, 1]$ achète à l'entreprise A, il perçoit un coût de $p_A + x/2$, et s'il achète à l'entreprise B, il perçoit un coût de $p_B + \frac{1-x}{2}$. Chaque consommateur achète son bien en choisissant l'entreprise dont le prix perçu est le plus bas.

On étudie le jeu où chaque entreprise choisit son prix de vente dans $[1/2, +\infty[$, et vend aux consommateurs qui se présentent chez elle. Pour simplifier, on considère que le nombre d'habitant de la ville est 1 (l'unité pouvant être par exemple le million), et donc si 3/4 de la population achète à l'entreprise A, son profit est $3/4(p_A - 1/2)$ (celui de l'entreprise B sera alors de $1/4(p_B - 1/2)$ car 1/4 de la population achète à B). Chaque entreprise veut maximiser son profit. On note g_A la fonction de paiement de l'entreprise A, et g_B celle de l'entreprise B.

A)Calcul des fonctions de paiements

Soient p_A et p_B dans $[1/2, +\infty[$ les prix fixés par les entreprises.

1. Soit un consommateur situé en $x \in [0, 1]$. Montrer que si $x > 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme B. Montrer que si $x < 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme A.
2. Montrer que si $p_B - p_A > 1/2$, on a $g_A(p_A, p_B) = p_A - 1/2$ et $g_B(p_A, p_B) = 0$. Calculer $g_A(p_A, p_B)$ et $g_B(p_A, p_B)$ dans le cas où $p_A - p_B > 1/2$.
3. On suppose $p_B - p_A \in [-1/2, +1/2]$. Montrer que :

$$g_A(p_A, p_B) = (1/2 + p_B - p_A)(p_A - 1/2) \text{ et } g_B(p_A, p_B) = (1/2 + p_A - p_B)(p_B - 1/2).$$

B) Calcul des meilleures réponses

Fixons le prix p_B de l'entreprise B. Montrer que la meilleure réponse de l'entreprise A est de fixer un prix p_A tel que (on pourra faire 3 cas, selon que $p_B \in [1/2, 1]$, $p_B \in [1, 2]$ ou $p_B \geq 2$) :

$$p_A = \frac{1+p_B}{2} \text{ si } p_B \leq 2, \; p_A = p_B - 1/2 \text{ si } p_B \geq 2.$$

Enoncer la meilleure réponse de l'entreprise B au prix de l'entreprise A (par symétrie, il est inutile de refaire les calculs).

C) Calculer le ou les équilibres de Nash du jeu, et les paiements associés.

7. Un jeu de congestion

$2N$ familles désirent partir en vacances en allant du point V (la ville) à un point S (la station de ski). Pour cela il y a deux possibilités : passer par le point C ou par le point D. Les trajets de V à C et de D à S se font en téléphérique et mettent 45 minutes quelque soit le nombre de gens qui les empruntent. Le trajet de V à D se fait par la route, et prend un temps égal à $20 + \frac{10k}{N}$ minutes, où k est le nombre de personnes décidant de prendre cette route (cela met donc entre 20 et 40 minutes suivant le traffic). Le trajet de C à S suit une règle similaire. Les vacanciers cherchent à minimiser leur temps de trajet.

1. Faire un dessin et modéliser le jeu sous forme stratégique.
2. Donner la correspondance de meilleure réponse et trouver les équilibres de Nash. Quel est le temps mis par chaque vacancier dans un équilibre de Nash ?
3. Pour que les vacanciers arrivent plus vite à destination les autorités locales décident de creuser un tunnel. Il est désormais possible d'aller de C à D où de D à C en 3 minutes. Répondre à nouveau aux questions précédentes. Commenter.