Université Paris Dauphine,
L3, Année 2011-2012
G. Vigeral

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 4 : Équilibres de Nash en stratégies pures.

1. Calculer les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,-1) \\ (2,2,2) & (-1,3,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (8,4,2) & (7,7,-2) \\ (9,2,5) & (-10,1,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

2. Même question que dans l'exercice précédent, mais pour le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,0,-1) & (1,1,1) \\ (2,0,3) & (5,-1,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-6,4,-1) & (1,2,3) \\ (-8,0,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

3. Calculer dans chaque cas les équilibres de Nash du jeu $\Gamma = (N, (A_i)_{i\in N}, (g_i)_{i\in N})$, où $N = \{1,2\}$, $A_1 = S_2 = [0,1]$, et, x représentant la stratégie du joueur 1 et y celle du joueur 2 :

a) $g_1(x,y) = 5xy - x - y + 2$; $g_2(x,y) = 5xy - 3x - 3y + 5$.

b) $g_1(x,y) = -(x-y)^2$; $g_2(x,y) = (x+y-1)^2$.

c) $g_1(x,y) = -(x-y)^2$; $g_2(x,y) = (x-y)^2$.

4. Un groupe de n pêcheurs exploite un lac contenant une quantité de poisson considérée comme infinie. Si chaque pêcheur i prend une quantité $a_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix p et cherche à maximiser son revenu (le coût de production est supposé nul).

1. Écrire le revenu du pêcheur i en fonction de $(a_1, ..., a_n)$.

2. Calculer la correspondance de meilleure réponse, les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.
3. Commenter la dépendance en n.

5. Un jeu de marchandage

On note : $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur un point de T, sachant que l'abscisse correspond au paiement du joueur 1, l'ordonnée correspond au paiement du joueur 2, et qu'en cas de désaccord le paiement de chaque joueur sera nul.

Plus précisément, on considère l'interaction suivante. Simultanément, le joueur 1 choisit un réel x et le joueur 2 choisit un réel y. Si $(x, y) \in T$, alors le paiement du joueur 1 est x et celui du joueur 2 est y. Si $(x, y) \notin T$, alors le paiement de chaque joueur est nul.

1. Modéliser ceci par un jeu sous forme stratégique $\Gamma = (N, (A_i)_{i \in N}, (g_i)_{i \in N})$.
2. Soit (x, y) dans T tels que $x + y = 1$. Montrer que (x, y) est un paiement d'équilibre de Nash de G.
3. Déterminer tous les équilibres de Nash de G.