Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 5 : séparation des convexes.

1. Soit E un espace de Hilbert. On rappelle que pour tout convexe fermé C et tout $x \notin C$, x admet un unique projeté sur C.

1. Soit un convexe fermé C et $x \notin C$. Montrer qu'on peut séparer strictement C et x.
2. Soit maintenant A un convexe compact n'intersectant pas C. Montrer que $A - B$ est fermé et ne contient pas 0. En déduire qu'on peut séparer strictement A et B.

2. Soit C un convexe compact de $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|$. On définit le rayon R de C par :

$$R = \inf\{r > 0, \exists x \in E, C \subset B_f(x, r)\}$$

On appelle boule circonscrite à C toute boule fermée de rayon R contenant C.

1. Montrer qu'il existe une boule circonscrite à C.
2. Dans cette question uniquement $n = 2$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Donner un exemple où il existe une infinité de boule circonscrite et où il existe des boules circonscrites de centre $x \notin C$.
3. A partir de maintenant n est quelconque et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Montrer que la boule circonscrite est unique (on pourra raisonner par l'absurde).
4. On cherche à montrer que son centre x est dans C. Par l'absurde, supposons $x \notin C$. Montrer qu'il existe un vecteur v et $\epsilon > 0$ tels que $\langle v|x - c\rangle < -\epsilon$ pour tout c dans C. Aboutir à une contradiction en majorant $\|tv + x - c\|$ pour $t > 0$ petit et $c \in C$ quelconque.

3. Soit E est un espace vectoriel normé et E^* l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur$E$. Pour tout A dans E on appelle orthogonal de A dans E l'ensemble

$$A^\perp = \{\phi \in E^*, \phi(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

1. Montrer que $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E^*.
2. On suppose que $adh(Vect(A)) = E$. Montrer que $A^\perp = \{0\}$.
3. On suppose que $adh(Vect(A)) \neq E$. En utilisant le théorème de Hahn Banach, montrer que $A^\perp \neq \{0\}$. Indication : montrer que la fonction distance à un sous espace fermé est convexe.
4. Montrer que $A \subset B$ entraîne $B^\perp \subset A^\perp$.
5. En s'inspirant de la question 5, montrer que $B^\perp \subset A^\perp$ entraîne $A \subset adh(Vect(B))$.