

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 5 : Équilibres de Nash en stratégies mixtes.

1. Soit un jeu fini $\Gamma = \{N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in I}\}$. Pour chaque $i \in I$, soit $c_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $f^i : A^{-i} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit le jeu $\Gamma' = \{N, (A^i)_{i \in I}, (g^i)_{i \in I}\}$, où pour tout $a \in A = \prod_{i \in I} A^i$, $g^i(a) = c_i g^i(a) + f^i(a^{-i})$.

1. Soit $x \in \prod_{i \in I} \Delta(A^i)$, $i \in I$, et $y^i \in \Delta(S^i)$. Montrer que $g^i(x) - g^i(y^i, x^{-i}) = c_i [g^i(x) - g^i(y^i, x^{-i})]$.
2. En déduire que Γ et Γ' ont les mêmes équilibres mixtes.
3. Montrez que tous les jeux suivants ont les mêmes équilibres mixtes :

$$a) \begin{pmatrix} 1, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 3, 3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2, 2 & 0, 0 \\ 0, 0 & 6, 6 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 3, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 9, 3 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 101, 101 & 0, 100 \\ 100, 0 & 3, 3 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 102, 1 & 0, 0 \\ 100, 0 & 6, 3 \end{pmatrix}$$

4. On suppose qu'avant de jouer, les joueurs peuvent discuter, et éventuellement se mettre d'accord sur ce qu'ils vont jouer (mais l'accord n'est pas contraignant : au moment de jouer, ils sont libres de respecter ou de ne pas respecter l'accord). Que pensez-vous qu'ils joueront dans le jeu a) ? dans le jeu d) ?
2. Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux suivants.

$$a) \begin{pmatrix} 1, 2 & 0, 0 \\ 0, 0 & 2, 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 6, 6 & 2, 7 \\ 7, 2 & 0, 0 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 2, -2 & -1, 1 \\ -3, 3 & 4, -4 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 0, 0 \end{pmatrix}$$

3. Dans les jeux suivants, déterminer les stratégies itérativement strictement dominées (par des stratégies mixtes), puis calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes.

$$a) \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{ccc} g & c & d \\ \left(\begin{array}{ccc} 4, 2 & 2, 3 & -2, -1 \\ 6, -1 & 0, 0 & 5, -3 \\ -1, 5 & -1, 0 & 10, -1 \end{array} \right) \end{array} \quad b) \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{ccc} g & c & d \\ \left(\begin{array}{ccc} (1, 1) & (0, 0) & (8, 0) \\ (0, 0) & (3, 3) & (0, 0) \\ (0, 8) & (0, 0) & (6, 6) \end{array} \right) \end{array}$$

4. Déterminer les équilibres de Nash mixtes du jeu à trois joueurs suivant

$$\begin{array}{cc} G & D \\ H & \left(\begin{array}{cc} (1, 1, -1) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \end{array} \right) \\ B & \end{array} \quad \begin{array}{cc} G & D \\ \left(\begin{array}{cc} (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (1, 1, -1) \end{array} \right) & \\ O & E \end{array}$$