Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 7 : Sous-différentiel.

($(E, \|.\|)$ est un evn dans chaque exercice. Si E est de dimension finie muni de la norme 2, on identifie E à son dual. Sauf précision f est une fonction de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Sous différentiel d'une somme.

1. Soit f et g quelconques, montrer que $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$.
2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse, même avec f et g convexes sci. On pourra considérer $f = i_{]-\infty,0]}$ et $g(x) = -\sqrt{x} + i_{[0,+\infty[}$.

2. Soit A une fonction linéaire continue de E dans lui même. On définit $A^* : E^* \to E^*$ par $A(\phi)(x) = \phi(Ax)$. Montrer que $A^*(\partial f(Ax)) \subset \partial(f \circ A)(x)$.

3. Montrer que si $\phi \in \partial f(x)$ et $\psi \in \partial f(y)$ alors $\langle \phi - \psi | x - y \rangle \geq 0$.

4. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f = \max f_i$. Pour tout $x \in E$ on note $I(x) = \{i, f(x) = f_i(x)\}$. Montrer que

$$Adh\left(conv\left(\cup_{i \in I(x)} \partial f_i(x)\right)\right) \subset \partial f(x).$$

5. Fonctions strictement convexes.

1. Montrer que $\phi \in \partial f(x)$ si et seulement si x est un minimum global de $f - \phi$.
2. Dans cette question f est sci et strictement convexe. Montrer que $Card(\partial f^*(\phi)) \leq 1$ pour tout ϕ dans $dom(f^*)$.
3. Dans cette question f est strictement convexe et E est de dimension finie. Montrer que f^* est différentiable sur l'intérieur de son domaine.

6. On suppose E espace de Banach, f continue et $\phi_n \in \partial f(x_n)$, avec x_n convergeant vers x et ϕ_n convergeant vers ϕ (pour la topologie faible-*). Montrer que $\phi \in \partial f(x)$.