Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 8 : optimisation et cônes.

$((E, \|.\|)$ est un evn dans chaque exercice. Si E est un ensemble de Hilbert, on identifie E à son dual. Sauf précision f est une fonction de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Cône normal
Soit K un convexe fermé d'un espace de Hilbert E. Pour tout $x \in K$ on définit le cône normal en x à K par

$$N_K(x) = \{z \in E, \langle z, y| \leq \rangle \, \langle z, x| \; \rangle \, \forall y \in K\}.$$

1. Montrer que $N_K(x)$ est un cône convexe.
2. Montrer que $N_K(x) = \partial i_K(x)$.
3. Montrer que $N_K(x) = \{z,\ \pi_K(x+z) = x\}$, où π_K est la projection sur K.

2. Soit K un convexe fermé d'un espace de Hilbert E et f une fonction convexe continue sur K. Montrer que f admet un minimum en x sur K ssi il existe $w \in \partial i_K(x)$ tel que $\pi_K(x-w) = x$.

3. Soit K un convexe fermé d'un espace de Hilbert E. On cherche à montrer que si $x \in K$ et $w \in \partial i_K(x)$ avec $w \neq 0$, alors $\frac{w}{\|w\|} \in \partial d_K(x)$. C'est à dire que, pour tout $y \in E$,

$$d_K(y) \geq d_K(x) + \left\langle \frac{w}{\|w\|} \middle| y - x \right\rangle$$

1. On pose $H = \{y \in E,\ \langle w|y\rangle \leq \langle w|x\rangle\}$. Montrer l'inégalité pour tout $y \in H$.
2. On suppose $y \notin H$, soit z la projection de y sur H. Montrer que $y - z = \left\langle \frac{w}{\|w\|} \middle| y - x \right\rangle \frac{w}{\|w\|}$.
3. Montrer que $K \subset H$. En déduire que $d_K(y) \geq d_H(y)$ et conclure.
4. Application : soit f une fonction convexe continue sur K et x un minimum global de f sur K. Montrer qu'il existe w tel que $0 \in \partial(f + \|w\| d_K)(x)$. En déduire qu'il existe un réél $\lambda \geq 0$ tel que x est un minimum global sur E du problème pénalisé

$$\min_E f(x) + \lambda d_K(x).$$

4. Soit E un espace de Hilbert et f une fonction α fortement convexe sur E. On rappelle que cela veut dire que pour tout x, la fonction $g(y) = f(y) - \alpha/2\|y-x\|^2$ est convexe.

1. Soit $x \in E$ et $v \in \partial f(x)$. Montrer que $0 \in \partial(f - \langle v|\cdot\rangle)(x)$.

2. En déduire que $0 \in \partial(f - \langle v|\cdot\rangle - \alpha/2\|\cdot - x\|^2)(x)$.
3. En déduire que pour tout y, $f(y) \geq f(x) + \langle v|y-x\rangle + \alpha/2\|y-x\|^2$.
4. Montrer que si $v \in \partial f(x)$ et $v' \in \partial f(x')$ alors $\alpha\|x-x'\| \leq \|v-v'\|$.
5. On suppose f convexe sci. Montrer que si $x \in \partial f^*(v)$ et $v' \in \partial f^*(x')$ alors $\alpha\|x-x'\| \leq \|v-v'\|$.
6. On suppose de plus f^* différentiable. Qu'en déduit on sur la fonction qui a v associe $\nabla f^*(v)$?