Université Paris Dauphine,
M1, Année 2016-2017
G. Vigeral

Analyse convexe

Feuille d'exercices 9 : KKT et dualité de Fenchel-Rockafellar.

($(E, \|.\|)$ est un evn dans chaque exercice. Si E est un ensemble de Hilbert, on identifie E à son dual. Sauf précision f est une fonction de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. KKT
Minimiser $(x-2)^2 + 2(y-1)^2$ sous les contraintes $y \leq x$ et $x + 4y \leq 3$.

2. Soit $E = \mathbb{R}^n$, A une matrice carrée de taille n, f et g deux fonctions convexes sur E. On suppose de plus g différentiable sur E. On s'intéresse au problème

$$P = \inf_{x \in E} f(Ax) + g(x).$$

et on suppose que $P > -\infty$.

1. Montrer que $P = D$, où
$$D = \sup_{y \in E} -f^*(y) - g^*(-A^T y).$$
2. On suppose que les deux problèmes ont des solutions, respectivement $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Montrer que $f(A\bar{x}) + f^*(\bar{y}) \geq \langle A\bar{x}|\bar{y}\rangle$ et $g(\bar{x}) + g^*(-A^T\bar{y}) \geq -\langle A\bar{x}|\bar{y}\rangle$. En déduire que ces inégalités sont en fait des égalités.
3. Montrer que $\nabla g(\bar{x}) = -A^T\bar{y}$.
4. On suppose que $g(x) = 1/2\|x - x_0\|_2^2$. Donner $\bar{x}$ en fonction de $\bar{y}$.

3. On se place dans le cadre de l'exercice précédent, avec $g(x) = 1/2\|x - x_0\|_2^2$ et $f(x) = \|y\|_1$. Calculer f^* et g^*. En déduire que

$$D = \frac{1}{2}\|x_0\|_2^2 - \min_{y \in [-1,1]^n} \frac{1}{2}\|A^T y - x_0\|_2^2.$$

Résoudre explicitement les problèmes primaux et duaux dans le cas $n = 2$ et $A = Id$ (on pourra faire un dessin).