Université Paris Dauphine,
L3, Année 2010-2011
G. Vigeral

Théorie des Jeux

Feuille d'exercices 9 : Jeux répétés.

1. Observation parfaite vs observation imparfaite

On considère le jeu de base Γ suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,4 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Représenter rapidement le jeu Γ_2 comme un jeu sous forme extensive (pas la peine d'indiquer les paiements). Combien le joueur 1 a-t-il de stratégies pures dans le jeu Γ_2 ? Et le joueur 2 ?
2. On note $\hat{G}_2$ le jeu obtenu en répétant deux fois le jeu G, mais où avant de choisir son action dans la deuxième étape chaque joueur se rappelle son action de l'étape 1 mais n'observe pas l'action de l'autre joueur. Représenter le jeu $\hat{G}_2$ comme un jeu sous forme extensive (pas la peine d'indiquer les paiements). Combien chaque joueur a-t-il de stratégies pures dans le jeu $\hat{G}_2$?

2. Soit Γ le jeu de base suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 10,10 & 0,11 & -1,0 \\ 11,0 & 1,1 & 0,0 \\ 0,-1 & 0,0 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Déterminer les stratégies pures strictement dominées et les équilibres de Nash du jeu G.
2. On note $\hat{G}^T$ le jeu obtenu en répétant T fois le jeu G, mais où, pour tout t dans $\{2,...,T\}$, avant de choisir son action de l'étape t, chaque joueur observe (se souvient de) toutes les actions qu'il a prises mais n'observe aucune des actions prises par l'autre joueur aux étapes précédentes. Montrer qu'il n'existe aucun équilibre en stratégies pures où l'action A soit prise sur le chemin d'équilibre (on pourra raisonner en termes de stratégies réduites).
3. Dans le jeu répété G_T, pour $i \in \{1,2\}$, on note s_i la stratégie pure du joueur i définie ainsi :

   - à l'étape 1 : jouer A ;

   - aux étapes 2 à $T-1$: jouer A si les deux joueurs ont toujours joué A aux étapes précédentes, jouer B sinon ;

- à l'étape T : jouer C si les deux joueurs ont toujours joué A aux étapes précédentes, jouer B sinon.

Dans le cas $T = 2$, le profil (s_1, s_2) est-il un équilibre de Nash ? Un équilibre sous-jeux parfait ? Donner son paiement et commenter.

4. On prend maintenant un T quelconque et on suppose que le joueur 2 joue s_2. Calculer le paiement de s_1. Soit x une autre stratégie pure du joueur 1, et soit n la première étape A n'est pas jouée par le joueur 1 quand x et s_2 sont jouées. Majorer $g_1(x, s_2)$ en fonction de n. Le profil (s_1, s_2) est-il un équilibre ? Un équilibre sous-jeux parfait ? Donner son paiement en fonction de T et commenter.

3. Escompter les paiements avec un facteur d'escompte δ peut être interprété de plusieurs manières, dont celles-ci :

i) le jeu est répété un nombre infini de fois, mais les joueurs attachent plus d'importance à leur paiements d'aujourd'hui qu'à leur paiements de demain.

ii) à chaque étape, on rejoue le jeu de base avec probabilité $1 - \lambda$, et avec probabilité λ le jeu s'arrête. En revanche, conditionnellement au fait que le jeu soit jouée au moins $t + 1$ fois, les joueurs accordent autant d'importance à leur paiements de la date t qu'à leur paiements de la date $t + 1$.

1) Critiquer chacune de ces interprétations.

2) On suppose que, d'une part, à chaque étape, le jeu de base est répété avec probabilité $p \in [0, 1]$, et que d'autre part, conditionnellement au fait que le jeu dure exactement T étapes, le paiement d'un joueur est la somme de ses paiements entre les étapes 1 et T, escomptés avec le taux d'escompte λ. Montrer qu'on peut représenter cette situation par un jeu répété où les paiements sont escomptées avec un taux λ' que l'on précisera.

4. Influence du nombre de firmes concurrentes sur les possibilités de collusion.

On considère un jeu répété un nombre infini de fois et où à chaque période n firmes produisent un bien identique et le vendent à des consommateurs. Le coût de production est nul. La demande au prix p est nulle si $p \geq 1$ et est de $D(p) = 1 - p$ sinon. Les firmes cherchent à maximiser la somme escomptée de leurs profits. Les firmes ont le même taux d'escompte λ.

La concurrence entre les firmes peut se modéliser (notamment) des deux manières suivantes :.

i) Concurrence en prix (à la Bertrand) : simultanément, chaque firme propose un prix de vente. La demande s'adresse entièrement à la firme, ou aux firmes, qui proposent le prix le plus bas. Si k firmes ont choisi le prix le plus bas p, alors elles vendent chacune une quantité $D(p)/k$.

ii) Concurrence en quantité (à la Cournot) : les firmes choisissent de manière indépendante la quantité qu'elles produisent (on notera $q_i(t)$ la quantité produite par la firme i à la période t et $Q_t = \sum_{1 \leq i \leq n} q_i(t)$) ; une fois les quantités produites observées, les firmes vendent toutes le bien au prix p_t tel que $D(p_t) = Q_t$.

1. Dans le modèle de concurrence en prix :
   (a) dans le jeu de base, déterminer le prix de vente qui maximise les profits des firmes ; déterminer le ou les équilibres de Nash en stratégies pures (on ne demande pas de justification précise).
   (b) dans le jeu répété, définir une stratégie de collusion "à gâchette".
   (c) pour quels taux d'escompte le profil de stratégie correspondant est-il un équilibre de Nash du jeu répété ? un équilibre sous-jeux parfait ? Quel est l'influence du nombre de firmes ? Commenter.
2. Même questions pour le modèle de concurrence en quantité.
3. Comparer les facteurs d'escompte critiques pour le modèle de concurrence en prix et le modèle de concurrence en quantité. Commenter.
4. Pourquoi la collusion entre firmes est-elle interdite ? Quels avantages voyez-vous à que les pouvoirs public essaient d'empêcher les situations de concurrence entre un petit nombre de firmes ? Les trois grandes firmes de téléphonie mobile en France ont été accusées d'ententes illégales sur les tarifs pratiqués. Etant donné la structure de cette industrie, fallait-il s'attendre à des ententes illégales entre firmes ?