
THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS VI

Spécialité :

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée par :

Guillaume VIGERAL

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS VI

Sujet :

**PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES JEUX
RÉPÉTÉS À SOMME NULLE**

Soutenue le 19 novembre 2009 devant le jury composé de :

Patrick Louis COMBETTES	<i>Examineur</i>
Stéphane GAUBERT	<i>Rapporteur</i>
Jean-François MERTENS	<i>Rapporteur</i>
Marc QUINCAMPOIX	<i>Examineur</i>
Jérôme RENAULT	<i>Examineur</i>
Dinah ROSENBERG	<i>Examinatrice</i>
Sylvain SORIN	<i>Directeur de thèse</i>

Équipe Combinatoire et Optimisation - FRE 3232

A mes parents.

Remerciements

Je voudrais bien entendu remercier tout d'abord mon directeur de thèse Sylvain Sorin. Premièrement pour son cours de DEA qui m'a fait découvrir la richesse mathématique de la théorie des jeux et m'a donné envie de commencer une thèse dans ce domaine. Ensuite bien sûr pour l'extrême qualité de son encadrement durant toutes ces années : pour avoir su à la fois me laisser une agréable liberté dans mes recherches tout en étant toujours disponible quand j'en avais besoin ; pour avoir réussi à m'écouter et à me laisser m'exprimer y compris lorsque je n'étais pas forcément très clair tout en me guidant lorsque je m'enfermais ; pour ses conseils toujours éclairés mais jamais péremptoirs. Pour sa disponibilité, son écoute, sa rigueur, et sa capacité à transmettre son enthousiasme mathématique je lui transmets mes respects et mes remerciements les plus profonds.

Je veux remercier vivement Stéphane Gaubert pour l'intérêt qu'il a toujours porté à mes travaux et pour sa participation au jury ; je suis à la fois très fier de l'avoir comme rapporteur et très heureux de faire mon post-doctorat avec lui.

C'est également un grand honneur pour moi d'avoir Jean-François Mertens comme rapporteur et membre du jury, je tiens à le remercier de faire le déplacement depuis Louvain.

C'est un grand plaisir pour moi d'avoir Dinah Rosenberg dans mon jury. Son cours fut lors de mon DEA mon premier contact avec les jeux répétés, et son article avec Sylvain mon premier aperçu de l'"Operator approach" ; je veux donc doublement la remercier pour avoir su me faire entrevoir la beauté et la richesse du domaine. Je suis également très heureux de la présence de Jérôme Renault que je remercie pour les discussions intéressantes que nous avons eues à de nombreuses reprises à propos des jeux répétés, notamment lors du groupe de travail qu'il organisait le vendredi matin et lors de son cours sur les jeux stochastiques. Je remercie aussi Marc Quincampoix d'être venu de Brest pour me faire l'honneur d'être dans mon jury, et pour tout ce que j'ai appris lors de son cours sur les jeux différentiels. Je remercie également Patrick Louis Combettes, qui fût lui aussi un de mes professeurs pendant le DEA ; c'est un grand privilège de le voir dans mon jury.

La majeure partie de mon travail de recherche s'est déroulée à Paris VI, au sein de l'Équipe Combinatoire et Optimisation. Je veux donc remercier Jean Fonlupt qui en était le directeur à mon arrivée, ainsi que l'ensemble de l'équipe pour la bonne ambiance qui y règne. Je tiens à remercier spécialement Jean-Pierre Tacchi et Éric Balandraud pour de nombreuses discussions passionnantes (et même parfois mathématiques), ainsi que Germain Gomes, Michèle Trouvé et Vincent Duquenne pour l'aide informatique et administrative précieuse qu'ils m'ont souvent apportée. Et bien entendu je remercie tout particulièrement Jérôme Bolte pour son aide constante et ô combien appréciable, pour ses remarques toujours intéressantes, pour des discussions enrichissantes sur de nombreux sujets, et pour l'incroyable bonne humeur bougonne dont il fait preuve en toute circonstance.

J'assiste depuis le début de ma thèse au séminaire parisien de théorie des jeux, dont je voudrais remercier les organisateurs et les participants (qui me pardonneront de ne pas tous les nommer) à la fois pour la qualité du séminaire et pour l'ambiance très chaleureuse qui y règne et qui m'a aidée à sortir de mes week-ends avec le sourire. Merci particulièrement à Rida Laraki pour sa capacité à mettre les jeunes à l'aise, et pour toutes les

discussions que nous avons eues ensemble.

Lors de ma première année de thèse j'ai eu la chance de faire un séjour de trois mois au CMM à Santiago du Chili, je tiens à remercier Felipe Alvarez et Roberto Cominetti pour leur accueil et pour les discussions que j'ai eues avec eux là bas et ailleurs.

J'ai été durant une année ATER à Dauphine ; j'adresse toutes mes amitiés aux membres du CEREMADE que j'ai côtoyés : Guillaume Carlier, Filippo Santambrogio et Yannick Viossat.

Mes remerciements vont aussi à Aris Daniilidis pour son invitation à une école d'été à Barcelone et pour des échanges fructueux lors de ses passages à Paris.

Les thésards avec qui j'ai eu la chance de partager mon bureau ont tous contribué à rendre ces années extrêmement agréables à vivre. Je veux remercier en premier lieu Vianney, avec qui j'ai cohabité pendant la majeure partie de ma thèse, pour tous les bons moments passés ensemble, mais merci également à Juan, Luis, Sergueï, Mario, Xavier et aux petits nouveaux Chen et Miquel. Je profite de ce paragraphe spécial thésards pour exprimer des remerciements particuliers à Marie pour sa gentillesse et son aide extrêmement précieuse, notamment lors de la confection des figures de ce manuscrit. Coucou au passage aux participants du séminaire des thésards en théorie des jeux que je n'ai pas encore nommés : Antoine, Fabien, Maël, et Mathieu.

Enfin je n'oublie pas mon entourage, famille et amis, que je remercie chaleureusement pour m'avoir soutenu et supporté durant ces longues années : il n'y a pas suffisamment de place dans l'ensemble des marges de ce manuscrit pour leur exprimer toute ma gratitude.

Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons aux jeux répétés à somme nulle, dont la structure récursive peut s'exprimer au moyen d'un opérateur de Shapley Ψ . Nous étudions le comportement asymptotique de la valeur v_n (resp. v_λ) du jeu en n étapes (resp. du jeu λ -escompté) lorsque n tend vers $+\infty$ (resp. lorsque λ tend vers 0).

Dans une première partie, nous considérons certaines propriétés analytiques vérifiées par les opérateurs de Shapley et leurs itérés. Pour plusieurs catégories de jeux cette approche en terme d'opérateur établit la convergence des deux familles de valeurs vers une limite commune.

Dans une deuxième partie, nous étudions certaines équations d'évolution qui sont des analogues en temps continu des formules caractérisant v_n et v_λ ; on démontre que les solutions de ces équations ont le même comportement asymptotique que celles des équations en temps discret.

Mots-clés : jeux répétés à somme nulle, propriétés asymptotiques, opérateur de Shapley, opérateurs monotones et homogènes additivement, opérateurs contractants dans des espaces de Banach, équations d'évolution non linéaires

Abstract

In this dissertation we consider zero-sum repeated games, whose recursive structure can be expressed by the mean of a Shapley operator Ψ . We investigate the asymptotic behavior of the value v_n (resp. v_λ) of the n stage game (resp. the λ discounted game) as n tends to $+\infty$ (resp. λ tends to 0).

In a first part, we study certain analytic properties of the Shapley operators Ψ and of their iterates. For several classes of games this operator approach establish the convergence of both families of values to a single limit.

In a second part, we consider some evolution equations which are continuous-time analogs of the formulas characterizing v_n and v_λ ; we prove that the solutions of those equations have the same asymptotic behavior than in discrete time.

Keywords : zero-sum repeated games, asymptotic properties, Shapley operator, monotonous and additively homogeneous mappings, contractive operators in Banach spaces, nonlinear evolution equations

Table des matières

1	Introduction et plan	13
1.1	Introduction	13
1.2	Plan de la thèse	13
1.2.1	Modèle des jeux répétés	13
1.2.2	Étude asymptotique	14
1.2.3	Opérateurs monotones et homogènes additivement	14
1.2.4	Itérés d'opérateurs MHa	15
1.2.5	Lien discret/continu	15
2	Modèle des jeux répétés	17
2.1	Jeux stochastiques finis	17
2.1.1	Jeux finiment répétés et jeux escomptés	17
2.1.2	Opérateur de Shapley et structure récursive	18
2.1.3	Autres évaluations du flux de paiements	20
2.1.4	Jeu infiniment répété et valeur uniforme	21
2.2	Structure récursive des jeux répétés	22
2.2.1	Opérateur de Shapley d'un jeu répété	22
2.2.2	Jeux stochastiques : cadre compact/continu	22
2.2.3	Jeux stochastiques : cadre mesurable	23
2.2.4	Jeux à information incomplète et signaux standards	23
2.2.5	Jeux stochastiques à information incomplète d'un côté	24
2.3	Espace Universel des croyances et structure récursive générale	24
2.3.1	Modèle général des jeux répétés.	24
2.3.2	Espace universel des croyances et structures d'informations	25
2.3.3	Jeu en un coup à information incomplète	26
2.3.4	Application aux jeux répétés : formule récursive générale	27
3	Étude asymptotique	29
3.1	Résultats positifs	30
3.1.1	Jeux stochastiques finis	30
3.1.2	Jeux absorbants	31
3.1.3	Jeux rékursifs	32
3.1.4	Jeux à information incomplète et signaux standards	32
3.1.5	Jeux stochastiques à information incomplète	33
3.1.6	Cas de la convergence uniforme dans les jeux à un joueur	33

3.2	Contre-exemples	33
3.2.1	Exemples où v_n et v_λ ne convergent pas	33
3.2.2	Exemples où v_n et v_λ ont un comportement asymptotique différent	35
4	Opérateurs monotones et homogènes additivement	39
4.1	Définitions et propriétés	39
4.2	Propriétés asymptotiques	40
4.2.1	Propriétés de base	40
4.2.2	Convergence de la norme des valeurs et de certaines coordonnées	41
4.2.3	Cas où v_λ est à variation bornée	44
4.2.4	Opérateur de récession	45
4.3	L'approche en termes d'opérateurs	46
4.3.1	Majoration uniforme	46
4.3.2	Majoration locale	47
4.3.3	Opérateur dérivé	48
4.3.4	Opérateur de Shapley réduit	49
4.4	Applications	51
4.4.1	Jeux absorbants	51
4.4.2	Jeux à 3 états	52
4.4.3	Jeux à information incomplète	53
4.4.4	Jeux absorbants à information incomplète	53
4.4.5	Jeux rékursifs	54
4.5	Cas où l'approche initiale ne suffit pas	58
4.5.1	Cas d'un jeu à 0 joueurs où il faut considérer le jeu par bloc de deux étapes	58
4.5.2	Un exemple	59
5	Itérés d'opérateurs MHa	65
5.1	Introduction	67
5.2	Définitions	68
5.2.1	MHa Operators	68
5.2.2	Shapley operators	70
5.2.3	Finite dimension	71
5.3	Axiomatic Approach	71
5.3.1	Property satisfied by Player 1-controlled games	71
5.3.2	Property satisfied by games with a bounded payoff	73
5.3.3	Recession Operator	75
5.4	Iterated Operators	76
5.5	Convergence of v_n and v_λ - Operator Approach	81
5.5.1	MHaC operators : the case of v_n	81
5.5.2	MHaC operators : the case of v_λ	83
5.5.3	A criterion for 2-player games	85
5.6	Appendix	88
5.7	Compléments	92
5.7.1	Contre exemple avec paiement borné ?	92

5.7.2	Opérateurs $\Psi(\cdot + k)$	92
5.7.3	Relation entre les opérateurs Ψ_m et $\Psi(\cdot + k)$	93
6	Lien discret/continu	95
6.1	Introduction	97
6.2	Discrete time model	98
6.2.1	Nonexpansive operators	98
6.2.2	Shapley operators	100
6.2.3	Associated evolution equations	101
6.3	Dynamical system related to the operator J	102
6.3.1	Asymptotic study of the trajectory defined by equation (6.3.1)	104
6.3.2	An exponential formula	106
6.3.3	Comparison of two Eulerian schemes	107
6.3.4	Comparison of an Eulerian scheme to a continuous trajectory	109
6.4	Dynamical systems linked to the family $\Phi(\lambda, \cdot)$	111
6.4.1	Constant case	112
6.4.2	Some generalities on the non-autonomous case	113
6.4.3	Case of $\lambda(t) \simeq \frac{1}{t}$	114
6.4.4	Case of a slow parametrization	115
6.4.5	Back to discrete time	121
6.5	Concluding remarks	123
6.6	Compléments	124
6.6.1	Opérateurs réduits	124
6.6.2	Une conséquence de l'inégalité de Kobayashi	124

Chapitre 1

Introduction et plan

1.1 Introduction

Un jeu à deux joueurs et à somme nulle est un jeu dans lequel les deux adversaires ont des intérêts opposés ; on s'intéresse dans cette thèse à la répétition en temps discret de tels jeux. Ceci n'a d'intérêt que lorsqu'un paramètre du jeu évolue au cours du temps : on étudie donc des modèles dynamiques dans lesquels les actions jouées par chaque joueur n'influent pas que sur le paiement courant. Par exemple dans un jeu stochastique, les actions déterminent également la loi de l'état suivant. Dans un jeu à information incomplète, elles changent les croyances de l'adversaire sur l'état de la nature. Il est également possible de combiner ces deux aspects.

Un problème important dans ce cadre est celui de l'étude du comportement des valeurs de jeux répétés quand le poids relatif de chaque étape devient négligeable. Ceci est le cas pour les jeux répétés un grand nombre d'étapes, ainsi que pour les jeux escomptés avec un faible taux d'escompte (c'est-à-dire lorsque les joueurs sont très patients). Lorsque ces valeurs convergent, on peut également se poser le problème de l'égalité des limites, et de leur caractérisation.

Cette question asymptotique a été résolue pour de nombreux jeux [3, 5, 6, 15, 23, 30], en utilisant des méthodes très diverses. Cependant, la structure asymptotique des valeurs dans chacun de ces cas est très similaire [31, 34] : elle peut s'exprimer au moyen d'un opérateur appelé opérateur de Shapley du jeu. Une idée, appelée l'approche en terme d'opérateurs [53, 64] (ou "Operator Approach"), est d'utiliser des propriétés analytiques de cet opérateur pour démontrer la convergence des valeurs. Ceci permet de trouver de nouvelles preuves dans certains cas [53], et d'établir de nouveaux résultats [51]. Dans cette thèse, on applique et on généralise cette approche.

1.2 Plan de la thèse

1.2.1 Modèle des jeux répétés

Le premier chapitre est consacré à la description du modèle des jeux répétés. Le premier cas traité est celui des jeux stochastiques finis [55] : on rappelle la définition de la valeur

v_n du jeu en n étapes, de la valeur v_λ du jeu λ -escompté, ainsi que celle de l'opérateur de Shapley Ψ . Celui ci décrit la structure récursive du jeu : il permet d'exprimer une relation de récurrence vérifiée par la suite v_n et une équation de point fixe caractérisant la famille v_λ :

$$nv_n = \Psi((n-1)v_{n-1}) \quad (1.2.1)$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda) \quad \text{avec } \Phi(\lambda, f) := \lambda \Psi \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} f \right). \quad (1.2.2)$$

On donne ensuite plusieurs autres exemples [3, 34, 59, 62] de jeux pour lesquels les valeurs vérifient les mêmes relations. On rappelle finalement la construction de [29, 31, 34] qui établit un modèle général dans lequel cette structure récursive est satisfaite.

1.2.2 Étude asymptotique

Dans le deuxième chapitre on présente la problématique générale de la thèse : l'étude du comportement des valeurs v_n et v_λ lorsque n tend vers $+\infty$ et λ tend vers 0, les questions principales étant l'existence des limites, leur égalité, et leur caractérisation.

On rappelle ensuite différents cadres dans lesquels les deux familles de valeurs ont une limite commune : ceci est le cas pour les jeux stochastiques finis [5, 6], les jeux absorbants [22], les jeux récursifs [15], les jeux à informations incomplètes [3, 30], ainsi que pour plusieurs types de jeux stochastiques à information incomplète [47, 51, 54, 62, 63, 66].

On donne finalement plusieurs contre-exemples : dans certain cas [20, 24] les valeurs v_n et v_λ ne convergent pas, tandis que dans d'autres [27, 49] elles convergent vers des limites distinctes.

1.2.3 Opérateurs monotones et homogènes additivement

Ce chapitre décrit diverses propriétés satisfaites par les opérateurs de Shapley. Le fait qu'il soit monotone et additivement homogène entraîne tout d'abord une propriété de contraction pour la norme uniforme. Ceci implique que les normes des valeurs convergent [24], et selon certaines coordonnées [16].

Nous nous intéressons ensuite plus spécifiquement à l'approche en terme d'opérateurs de [53, 64]. L'idée de cette approche est de caractériser la limite des valeurs d'un jeu comme unique solution (si elle existe) d'un système de deux inéquations variationnelles. Cette approche a été appliquée pour démontrer (ou redémontrer) la convergence de v_n et v_λ dans le cas des jeux absorbants [53], des jeux à information incomplète [53], et des jeux absorbants à information incomplète d'un côté [51]. On l'applique ici également au cas des jeux stochastiques à trois états et au cas des jeux récursifs.

On montre cependant que cette approche ne suffit pas pour certains jeux. Premièrement, dans certains cas très simples, le système d'inéquations variationnelles n'a pas de solution malgré la convergence des valeurs. D'autre part, on peut construire deux jeux pour lesquels les systèmes d'inéquations sont les mêmes bien que les limites des valeurs soient différentes : il n'y a donc aucun espoir de pouvoir trouver la valeur asymptotique de tout jeu répété avec la donnée de ce seul système. Cependant, dans ces différents exemples, l'approche en termes d'opérateurs s'applique aux jeux joués par blocs de plusieurs étapes.

1.2.4 Itérés d'opérateurs MHa

Ce chapitre est composé de l'article [69]. L'idée de départ provient de la constatation que les problèmes évoqués dans les exemples précédents disparaissent lorsqu'on s'intéresse aux itérés Ψ^m de Ψ (ce qui correspond à regarder le jeu joué par blocs de m étapes).

On commence par montrer comment certaines caractéristiques d'un jeu répété se traduisent par des propriétés analytiques de l'opérateur de Shapley. Le fait que le paiement d'un jeu soit borné implique ainsi une propriété de Lipschitz sur l'opérateur, tandis que le contrôle des transitions par le joueur 1 provoque une inégalité de convexité.

En appliquant l'approche en terme d'opérateurs aux itérés, et en utilisant ces propriétés analytiques, on démontre alors que dans les jeux où un joueur contrôle les transitions et où le paiement est borné, les familles $\{v_n\}$ et $\{v_\lambda\}$ ont au plus un point d'accumulation. En rajoutant des hypothèses topologiques on établit la convergence vers une limite commune.

Enfin dans le cas des jeux où les deux joueurs contrôlent les transitions, on donne une condition suffisante sur les opérateurs dérivés des itérés Ψ^m pour que les valeurs convergent.

1.2.5 Lien discret/continu

Ce chapitre est composé de l'article [68]. On interprète les équations caractérisant les valeurs v_n et v_λ comme des versions en temps discret des équations d'évolution

$$U'(t) = \Psi(U(t)) - U(t) \quad (1.2.3)$$

$$u'(t) = \Phi(\lambda(t), u(t)) - u(t) \quad (1.2.4)$$

et on établit des équivalences asymptotiques entre les trajectoires en temps discret et en temps continu. Une difficulté provient du fait que dans le cadre des jeux répétés, les opérateurs de Shapley sont contractants pour la norme uniforme, alors qu'en général les équations (1.2.3) et (1.2.4) sont étudiées dans des espaces de Hilbert.

Dans une première partie on s'intéresse à l'équation (1.2.3). On sait [36] que la solution de celle-ci est asymptotiquement proche de nv_n ; on montre que l'on a également des équivalences asymptotiques avec des schémas d'Euler explicites, ce qui donne des résultats sur le comportement asymptotique de jeux avec durée incertaine.

Dans une seconde partie, on étudie l'équation (1.2.4). On établit plusieurs résultats asymptotiques selon la nature de la paramétrisation λ :

- a) Si $\lambda \equiv \lambda$, alors $u(t) \rightarrow v_\lambda$.
- b) Si $\lambda(t) \sim \frac{1}{t}$, alors $u(t)$ a le même comportement asymptotique que la suite v_n .
- c) Si $\frac{\lambda'}{\lambda^2} = o(1)$, alors $u(t)$ a le même comportement asymptotique que la famille v_λ .

Chapitre 2

Modèle des jeux répétés

2.1 Jeux stochastiques finis

2.1.1 Jeux finiment répétés et jeux escomptés

Un jeu stochastique Γ est un jeu répété en temps discret où les actions de chaque joueur à chaque étape déterminent à la fois le paiement de cette étape et la loi de l'état à l'étape suivante. Le modèle le plus simple (d'un tel jeu) est celui d'un jeu stochastique fini à observation complète et signaux standards, défini par les données suivantes :

- Un ensemble fini d'états Ω .
- Un ensemble fini S (resp. T) d'actions du joueur 1 (resp. du joueur 2).
- Une fonction de paiement (que le premier joueur maximise et le second minimise)
 $g : S \times T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- Une probabilité de transition $\rho : S \times T \times \Omega \rightarrow \Delta(\Omega)$, où pour un ensemble fini A , $\Delta(A)$ dénote l'ensemble des probabilités sur A .

Le jeu se déroule comme suit : l'état initial ω_1 est connu des deux joueurs. A chaque étape i , selon l'histoire passée $h_i = (\omega_1, a_1, b_1, \dots, \omega_{i-1}, a_{i-1}, b_{i-1}, \omega_i)$ le joueur 1 (resp. 2) choisit une probabilité x_i dans $\Delta(S)$ (resp. y_i dans $\Delta(T)$) qui est la loi de son a_i (resp. b_i). L'action a_i du joueur 1 (resp. b_i du joueur 2) est tirée selon son action mixte x_i (resp. y_i) et révélée aux deux joueurs. Les réalisations a_i, b_i sont observées par les deux joueurs. Cette donnée détermine le paiement à l'étape i : $g_i = g(a_i, b_i, \omega_i)$. Un nouvel état ω_{i+1} est ensuite tiré selon la loi $\rho(a_i, b_i, \omega_i)$ et est observé par les deux joueurs.

Notons $\mathcal{H}_n = (\Omega \times S \times T)^{n-1} \times \Omega$ l'ensemble des histoires de longueur n , $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}_n$ l'ensemble des histoires de longueur finie et $\mathcal{H}_\infty = (\Omega \times S \times T)^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des histoires de longueur infinie (aussi appelé ensemble des parties). Chaque partie définit un flux de paiements (g_1, \dots, g_n, \dots) que l'on peut évaluer de plusieurs façons.

Pour cela on définit d'abord la notion de stratégie : une stratégie σ (resp. τ) du joueur 1 (resp. du joueur 2) est une application de \mathcal{H} dans $\Delta(S)$ (resp. dans $\Delta(T)$). On note \mathcal{S} (resp. \mathcal{T}) l'ensemble des stratégies du joueur 1 (resp. du joueur 2). Un état initial ω_1 et un couple $(\sigma, \tau) \in (\mathcal{S}, \mathcal{T})$ de stratégies définissent une unique mesure de probabilité $P_{\sigma, \tau}$ sur \mathcal{H}_∞ (muni de la tribu produit). On note $\mathbb{E}_{\sigma, \tau, \omega_1}$ l'espérance associée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; dans le jeu répété en n étapes et avec état initial ω_1 , noté $\Gamma_n(\omega_1)$, le paiement associé au couple de stratégies (σ, τ) est donné par l'espérance de la moyenne

arithmétique des paiements des n premières étapes :

$$\gamma_n(\sigma, \tau, \omega_1) = \mathbb{E}_{\sigma, \tau, \omega_1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\omega_i, a_i, b_i) \right]$$

Le jeu $\Gamma_n(\omega_1)$ est équivalent à un jeu fini puisque les actions jouées après la date n n'ont pas d'influence sur γ_n . Il a donc une valeur, qui est fonction de l'état initial et qu'on note $v_n(\omega_1)$. On appelle valeur de Γ_n le vecteur $v_n = (v_n(\omega))_{\omega \in \Omega}$.

Soit $\lambda \in]0, 1]$. Dans le jeu λ -escompté avec état initial ω_1 , noté $\Gamma_\lambda(\omega_1)$, le paiement associé au couple de stratégies (σ, τ) est donné par l'espérance de la moyenne d'Abel des paiements :

$$\gamma_\lambda(\sigma, \tau, \omega_1) = \mathbb{E}_{\sigma, \tau, \omega_1} \left[\lambda \sum_{i=1}^{+\infty} (1 - \lambda)^{i-1} g(\omega_i, a_i, b_i) \right]$$

Le théorème de Sion [56] entraîne que le jeu $\Gamma_\lambda(\omega_1)$ a une valeur pour tout $\omega_1 \in \Omega$ que l'on note $v_\lambda(\omega_1)$. Comme ci-dessus on note v_λ le vecteur $(v_\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$.

2.1.2 Opérateur de Shapley et structure récursive

À toute fonction réelle f définie sur Ω ($f \in \mathcal{F} = \mathbb{R}^\Omega$) et à tout état $\omega \in \Omega$ on associe le jeu auxiliaire en un coup $\Gamma(f)(\omega)$ défini par les espaces d'actions S et T et la fonction de paiement

$$(s, t) \rightarrow g(s, t, \omega) + \sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | s, t, \omega) f(\omega').$$

D'après le théorème du minimax [39] ce jeu a une valeur, notée $\Psi(f)(\omega)$. Cela permet de définir l'opérateur de Shapley Ψ du jeu stochastique Γ :

Définition 2.1.1 *L'opérateur de Shapley $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ est défini par*

$$\Psi(f)(\omega) = \max_{x \in \Delta(S)} \min_{y \in \Delta(T)} \left[g(x, y, \omega) + \sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | x, y, \omega) f(\omega') \right] \quad (2.1.1)$$

$$= \min_{y \in \Delta(T)} \max_{x \in \Delta(S)} \left[g(x, y, \omega) + \sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | x, y, \omega) f(\omega') \right] \quad (2.1.2)$$

pour chaque $\omega \in \Omega$.

De la même manière, à tout $\lambda \in]0, 1]$, à toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et à tout état $\omega \in \Omega$ on associe le jeu auxiliaire en un coup $\Gamma(\lambda, f)(\omega)$ de paiement

$$(s, t) \rightarrow \lambda g(s, t, \omega) + (1 - \lambda) \sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | s, t, \omega) f(\omega').$$

Ce jeu a une valeur, notée $\Phi(\lambda, f)(\omega)$ ce qui permet de définir une nouvelle famille d'opérateurs :

Définition 2.1.2 Pour $\lambda \in]0, 1]$, $\Phi(\lambda, \cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ est défini par

$$\Phi(\lambda, f)(\omega) = \max_{x \in \Delta(S)} \min_{y \in \Delta(T)} \left[\lambda g(x, y, \omega) + (1 - \lambda) \sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | x, y, \omega) f(\omega') \right] \quad (2.1.3)$$

$$= \min_{y \in \Delta(T)} \max_{x \in \Delta(S)} \left[\lambda g(x, y, \omega) + (1 - \lambda) \sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | x, y, \omega) f(\omega') \right] \quad (2.1.4)$$

pour chaque $\omega \in \Omega$.

On remarque la relation

$$\Phi(\lambda, f) = \lambda \Psi \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} f \right). \quad (2.1.5)$$

L'un des principaux objets de ce travail est d'étudier diverses propriétés des opérateurs de Shapley ainsi que de leurs itérés pour en déduire des résultats sur le comportement asymptotique des valeurs v_n et v_λ . On donne ici quelques premières propriétés vérifiées par ces opérateurs.

Pour simplifier les notations, on note $+$ l'addition sur \mathbb{R}^n , \leq l'ordre partiel naturel sur \mathbb{R}^n et on identifie \mathbb{R} aux vecteurs constants de \mathbb{R}^n .

Il est immédiat de vérifier les énoncés suivants.

Lemme 2.1.3 Ψ vérifie les propriétés suivantes de monotonie et d'homogénéité additive :

$$(M) \quad f_1 \leq f_2 \implies \Psi(f_1) \leq \Psi(f_2).$$

$$(Ha) \quad \text{Si } c \in \mathbb{R}, \Psi(f + c) = \Psi(f) + c.$$

Corollaire 2.1.4 L'opérateur Ψ est contractant (1-Lipschitzien), et l'opérateur $\Phi(\lambda, \cdot)$ est $1 - \lambda$ contractant.

Le résultat suivant, dû à [55], est fondamental : la suite v_n (resp. la famille v_λ) vérifie une formule récursive (resp. de point fixe) faisant intervenir l'opérateur de Shapley Ψ .

Proposition 2.1.5 Les valeurs $v_n \in \mathcal{F}$ satisfont la relation de récurrence

$$v_n = \Phi \left(\frac{1}{n}, v_{n-1} \right) = \frac{\Psi^n(0)}{n} \quad (2.1.6)$$

et les valeurs v_λ vérifient la condition de point fixe

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda). \quad (2.1.7)$$

Démonstration. On reprend ici la démonstration de [34]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$. En jouant à la première étape une action optimale dans le jeu en un coup $\Gamma \left(\frac{1}{n}, f \right) (\omega)$, puis en jouant de manière optimale dans le jeu $\Gamma_{n-1}(\omega_2)$ le joueur 1 assure un paiement supérieur à $\Phi \left(\frac{1}{n}, v_{n-1} \right) (\omega)$ dans $\Gamma_n(\omega)$. Un argument symétrique implique la formule (2.1.6).

Soient maintenant $\lambda \in]0, 1]$ et w_λ un point fixe de $\Phi(\lambda, \cdot)$ (qui existe et est même unique puisque $\Phi(\lambda, \cdot)$ est strictement contractante). Pour tout $\omega \in \Omega$ on note $x_\lambda(\omega)$ une action

optimale dans $\Gamma(\lambda, w_\lambda)$. On montre qu'en jouant la stratégie stationnaire $\sigma_\lambda(h_i) = x_\lambda(\omega_i)$ le joueur 1 assure un paiement supérieur à $\Phi(\lambda, v_\lambda)(\omega)$ dans le jeu $\Gamma_\lambda(\omega)$.

En effet, pour tout n et toute stratégie τ du joueur 2 on a par définition de σ_λ

$$E_{\sigma_\lambda, \tau} \{ \lambda g_n + (1 - \lambda) w_\lambda(\omega_{n+1}) | \mathcal{H}_n \} \geq w_\lambda(\omega_n).$$

En multipliant par $(1 - \lambda)^{n-1}$, en prenant l'espérance et en sommant sur \mathbb{N}^* on obtient

$$\gamma_\lambda(\sigma_\lambda, \tau, \omega_1) \geq w_\lambda(\omega_1).$$

En utilisant un argument symétrique on montre que $w_\lambda(\omega_1)$ est la valeur de $\Gamma_\lambda(\omega_1)$, ce qui établit la formule (2.1.7). \blacksquare

Remarque 2.1.6 *La démonstration de la proposition 2.1.5 a établi l'existence de stratégies optimales stationnaires dans Γ_λ . En raisonnant par récurrence on montre de même qu'il existe des stratégies markoviennes optimales dans Γ_n . En conséquence, si l'on suppose que les joueurs n'observent pas les coups passés de leur adversaire mais observent tout de même l'état courant, les valeurs des jeux escomptés ou finiment répétés ne varient pas par rapport au modèle exposé dans cette section.*

Remarque 2.1.7 *L'opérateur $\Phi(\lambda, \cdot)$ étant strictement contractant de \mathcal{F} dans lui même, la relation (2.1.7) caractérise v_λ . De plus, toute suite $w_n \in X$ satisfaisant*

$$w_n = \Phi(\lambda, w_{n-1}) \tag{2.1.8}$$

converge vers v_λ quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 2.1.8 *On peut également définir l'opérateur $\Phi(0, \cdot)$ de manière analogue à la définition 2.1.2 :*

$$\Phi(0, f)(\omega) = \max_{x \in \Delta(S)} \min_{y \in \Delta(T)} \left[\sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | x, y, \omega) f(\omega') \right] \tag{2.1.9}$$

$$= \min_{y \in \Delta(T)} \max_{x \in \Delta(S)} \left[\sum_{\omega' \in \Omega} \rho(\omega' | x, y, \omega) f(\omega') \right]. \tag{2.1.10}$$

Cet opérateur de récession (voir section 4.2.4) est 1-Lipschitzien mais pas strictement contractant.

2.1.3 Autres évaluations du flux de paiements

Une généralisation naturelle de la définition des valeurs v_n et v_λ est la suivante [59, 60]. À toute probabilité μ sur les entiers strictement positifs et à tout état initial ω_1 , on associe le jeu $\Gamma_\mu(\omega_1)$ de paiement

$$\gamma_\mu(\sigma, \tau, \omega_1) = \mathbb{E}_{\sigma, \tau, \omega_1} \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(i) g(\omega_i, a_i, b_i) \right]$$

Ce jeu admet alors une valeur généralisée v_μ , et lorsque μ est à support fini on montre de la même manière que la formule (2.1.6) que l'on a une relation de récurrence

$$v_\mu = \Phi(\mu(1), v_{\mu'})$$

où $\mu'(i) := \frac{\mu(i+1)}{1-\mu(1)}$.

Ceci conduit à s'intéresser également à une généralisation de la formule (2.1.6) : une suite w_n de \mathbb{R}^Ω est dite admissible [64] si elle vérifie la relation de récurrence

$$w_n = \Phi(\lambda_n, w_{n-1}) \tag{2.1.11}$$

pour une suite λ_n de réels tendant vers 0 et telle que $\sum_{\mathbb{N}^*} \lambda_n = +\infty$.

Enfin une idée fortement reliée à ces concepts de valeur généralisée et de suite admissible est celle de jeux à durée incertaine [40, 42] dans lesquels une horloge aléatoire publique donne la probabilité que le jeu s'arrête après chaque étape.

Remarque 2.1.9 *Le jeu λ -escompté Γ_λ peut s'interpréter comme un jeu à durée incertaine. Considérons en effet le jeu dans lequel après chaque étape la partie s'arrête avec probabilité $1 - \lambda$ et où le paiement est la somme des paiements d'étapes avant l'arrêt du jeu; la valeur ce jeu est $\frac{v_\lambda}{\lambda}$.*

2.1.4 Jeu infiniment répété et valeur uniforme

Par souci d'exhaustivité on décrit ici le cas du jeu en horizon infini non escompté $\Gamma_\infty(\omega_1)$, même si le sujet principal de ce manuscrit est l'étude asymptotique de v_n et v_λ (voir chapitre 3 et suivants).

L'approche d'origine [18] consiste à considérer le jeu de paiement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(\sigma, \tau, \omega_1)$. Cette limite existe si on se restreint à des stratégies stationnaires mais ce n'est pas forcément le cas pour des stratégies générales. Pour pallier à cela, on suit l'approche uniforme [34] : on ne définit pas un paiement pour le jeu infini, mais la valeur est définie à partir de propriétés uniformes des stratégies.

Définition 2.1.10 *Le joueur 1 garantit $v(\omega)$ dans le jeu $\Gamma_\infty(\omega)$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma \in \mathcal{S}, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall \tau \in \mathcal{T}, \forall n \geq N, \gamma_n(\sigma, \tau, \omega) \geq v(\omega) - \varepsilon.$$

Le joueur 2 garantit $v(\omega)$ dans le jeu $\Gamma_\infty(\omega)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{T}, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall \sigma \in \mathcal{S}, \forall n \geq N, \gamma_n(\sigma, \tau, \omega) \leq v(\omega) + \varepsilon.$$

Le jeu $\Gamma_\infty(\omega)$ a une valeur $v_\infty(\omega_1)$ si chaque joueur peut garantir $v_\infty(\omega)$.

D'après la définition 2.1.10, si la valeur uniforme $v_\infty(\omega)$ existe alors $v_n(\omega)$ converge vers $v_\infty(\omega)$ quand n tend vers $+\infty$. En utilisant le fait que tout paiement escompté $\gamma_\lambda(\sigma, \tau, \omega)$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $\{\gamma_n(\sigma, \tau, \omega)\}$ on montre [34] que l'existence de $v_\infty(\omega)$ entraîne également la convergence de $v_\lambda(\omega)$ lorsque λ tend vers 0.

Il existe par contre des exemples où la réciproque n'est pas vérifiée [27, 30], nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre 2.

2.2 Structure récursive des jeux répétés

2.2.1 Opérateur de Shapley d'un jeu répété

De nombreux jeux répétés possèdent une structure récursive similaire à celle des jeux stochastiques finis : il existe un ensemble Ω (ensemble d'états), un cône convexe fermé de fonctions réelles sur Ω $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0 = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_\infty < \infty\}$ contenant les fonctions constantes, deux ensembles X et Y , et deux fonctions $g : X \times Y \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\rho : X \times Y \times \Omega \rightarrow \Delta_f(\Omega)$ tels que les opérateurs

$$\Psi(f)(\omega) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} [g(x, y, \omega) + \mathbb{E}_{\rho(x, y, \omega)} f] \quad (2.2.1)$$

$$= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} [g(x, y, \omega) + \mathbb{E}_{\rho(x, y, \omega)} f] \quad (2.2.2)$$

$$\Phi(\lambda, f)(\omega) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} [\lambda g(x, y, \omega) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_{\rho(x, y, \omega)} f] \quad (2.2.3)$$

$$= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} [\lambda g(x, y, \omega) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_{\rho(x, y, \omega)} f] \quad (2.2.4)$$

soient bien définis de \mathcal{F} dans lui même, et tels que les valeurs des jeux finiment répétés ou escomptés vérifient respectivement

$$v_n = \Phi\left(\frac{1}{n}, v_{n-1}\right) = \frac{\Psi^n(0)}{n} \quad (2.2.5)$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda). \quad (2.2.6)$$

Comme dans la section 2.1 on vérifie que Ψ vérifie alors les relations de monotonie et d'homogénéité additive

$$(M) \quad f_1 \leq f_2 \implies \Psi(f_1) \leq \Psi(f_2).$$

$$(Ha) \quad \text{Si } c \in \mathbb{R}, \Psi(f + c) = \Psi(f) + c.$$

où \leq est l'ordre partiel canonique sur \mathcal{F}_0 . On a également toujours la relation

$$\Phi(\lambda, f) = \lambda \Psi\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} f\right). \quad (2.2.7)$$

On donne ci-dessous plusieurs exemples de classes de jeux pour lesquelles ces propriétés sont vérifiées.

2.2.2 Jeux stochastiques : cadre compact/continu

Γ est un jeu stochastique avec un ensemble métrique d'états Ω , des ensembles d'actions compacts métriques S et T pour le premier et deuxième joueur respectivement, un paiement borné g de $S \times T \times \Omega$ dans \mathbb{R} , et une transition ρ de $S \times T \times \Omega$ dans $\Delta(\Omega)$. On suppose que la fonction g est bornée et continue sur $S \times T \times \Omega$, et que la fonction $\mathbb{E}_{\rho(a, b, \omega)} f$ est continue sur $S \times T \times \Omega$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur Ω .

Alors la section 2.2.1 s'applique [34, 59] en prenant $X = \Delta(S)$ et $Y = \Delta(T)$ et en prenant les extensions bilinéaires de g et ρ sur ces ensembles.

2.2.3 Jeux stochastiques : cadre mesurable

On donne ici un cadre relativement simple, voir [43] pour un modèle plus général.

Γ est un jeu stochastique avec un espace d'états (Ω, \mathcal{A}) mesurable standard, des ensembles d'actions compacts S et T pour le premier et deuxième joueur respectivement, un paiement mesurable g de $S \times T \times \Omega$ dans \mathbb{R} , et une transition mesurable ρ de $S \times T \times \Omega$ dans $\Delta(\Omega)$. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$ et $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, les fonctions $g(\cdot, \omega)$ et $\rho(\mathcal{A}|\cdot, \omega)$ sont séparément continues sur $S \times T$.

Alors la section 2.2.1 s'applique [34] avec $X = \Delta(S)$, $Y = \Delta(T)$, et en prenant les extensions bilinéaires de g et ρ sur ces ensembles. Dans ce cas \mathcal{F} est l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur Ω .

2.2.4 Jeux à information incomplète et signaux standards

Ici on quitte le cadre des jeux stochastiques et l'on considère une situation où les joueurs ne connaissent pas l'état. On suit le modèle de [3] : on se donne un ensemble fini $\Omega_0 = K \times L$ d'états, des ensembles finis S et T d'actions, et une fonction de paiement $g_0 : S \times T \times K \times L$ dans \mathbb{R} . L'état (k, l) est tiré suivant une loi de probabilité jointe $p \otimes q$ sur $K \times L$ connue des 2 joueurs, le joueur 1 est informé uniquement de k et le joueur 2 uniquement de l . Les joueurs jouent alors indéfiniment le jeu de paiement $g_0(\cdot, \cdot, k, l)$ en n'observant à la fin de chaque étape que les actions de l'autre joueur et non pas le paiement réalisé.

On montre alors [53] que l'opérateur de Shapley est bien défini, en prenant $\Omega = \Delta(K) \times \Delta(L)$, $X = \Delta(S)^K$, $Y = \Delta(T)^L$, et

$$\begin{aligned} g(x, y, p, q) &= \sum_{a,b,k,l} p^k q^l x_a^k y_b^l g_0(a, b, k, l) \\ \rho(x, y, p, q) &= \sum_{a,b,k,l} p^k q^l x_a^k y_b^l \delta_{(p(a), q(b))} \end{aligned}$$

où on a noté $p(a)$ la probabilité conditionnelle induite par x sur K sachant a :

$$p(a)^k = \frac{p^k x_a^k}{\sum_{k'} p^{k'} x_a^{k'}}$$

et de même

$$q(b)^l = \frac{q^l y_b^l}{\sum_{l'} q^{l'} y_b^{l'}}.$$

Dans ce cas on peut prendre \mathcal{F} égal à l'ensemble des fonctions séparément continues et concaves/convexes de $\Delta(K) \times \Delta(L)$ dans \mathbb{R} .

Il est important de remarquer que bien que ceci implique que le jeu à information incomplète initial soit équivalent au jeu stochastique $\Gamma(\Omega, X, Y, g, \rho)$ en termes de valeurs et de meilleures réponses, dans le jeu initial lorsque le joueur 1 observe b il ne peut pas calculer la croyance a posteriori $q(b)$. Cette construction repose sur le fait que les valeurs ne changent pas si les croyances sont révélées à chaque étape, mais ne donne aucune information sur les stratégies optimales de chaque joueur dans le jeu initial à information incomplète.

2.2.5 Jeux stochastiques à information incomplète d'un côté

Il est naturel de considérer des jeux dans lesquels il y a à la fois une dynamique sur l'état et un manque d'information sur celui-ci. On reprend ici le modèle des jeux stochastiques à information incomplète d'un coté décrit dans [62] : on se donne un ensemble fini K d'états, des ensembles finis S et T d'actions, une fonction de paiement $g_0 : S \times T \times K$ dans \mathbb{R} , une fonction de transition $\rho_0 : S \times T \times K$ dans $\Delta(K)$, et une probabilité initiale $p \in \Delta(K)$.

L'état initial k_1 est tiré selon p , et le joueur 1 en est informé. À chaque étape i , les joueurs choisissent simultanément une stratégie x_i dans $\Delta(S)$ (resp. y_i dans $\Delta(T)$). L'action a_i du joueur 1 (resp. b_i du joueur 2) est tirée selon son action mixte x_i (resp. y_i) et révélée aux deux joueurs. Cela donne le paiement à l'étape i $g_i = g_0(a_i, b_i, \omega_i)$, qui n'est pas observé. Un nouvel état k_{i+1} est ensuite tiré selon $\rho_0(a_i, b_i, k_i)$ et n'est observé que par le premier joueur.

On montre alors que l'opérateur de Shapley est bien défini, en prenant $\Omega = \Delta(K)$, $X = \Delta(S)^K$, $Y = \Delta(T)$, et

$$\begin{aligned} g(x, y, p) &= \sum_{a,b,k} p^k x_a^k y_b g_0(a, b, k) \\ \rho(x, y, p) &= \sum_{a,b,k} p^k x_a^k y_b \delta_{(p(a,b))} \end{aligned}$$

où on a noté $p(a, b)$ la probabilité conditionnelle induite par x sur K sachant a et b :

$$p(a, b)^k = \frac{\sum_{k'} p^{k'} x_a^{k'} \rho_0(k|a, b, k')}{\sum_{k'} p^{k'} x_a^{k'}}.$$

Dans ce cas on peut prendre \mathcal{F} égal à l'ensemble des fonctions continues et concaves de $\Delta(K)$ dans \mathbb{R} .

2.3 Espace Universel des croyances et structure réursive générale

On a vu dans la section précédente plusieurs exemples de jeux répétés admettant une structure réursive. Le but de cette section est de montrer que ceci se généralise dans un cadre encore plus vaste. L'ensemble de cette section suit une présentation faite dans [65] des résultats de [29, 31, 34].

2.3.1 Modèle général des jeux répétés.

On généralise le modèle des sections 2.1, 2.2.4 et 2.2.5 : soient un espace d'états K , des espaces de signaux A et B pour les joueurs 1 et 2 respectivement, des espaces d'actions S et T pour chaque joueur, une fonction de paiement g_0 définie sur $K \times S \times T$ et à valeurs dans \mathbb{R} , et une dynamique ρ_0 de $K \times S \times T$ dans $\Delta(K \times A \times B)$. Tous les ensembles sont supposés finis.

Le jeu se déroule de la manière suivante : le triplet (k_1, a_1, b_1) est tiré selon une probabilité initiale $\mathbb{P} \in \Delta(K \times A \times B)$; a_1 est annoncé au joueur 1 et b_1 au joueur 2. A chaque étape i , le joueur 1 (resp. le joueur 2) choisit une action mixte $x_i \in \Delta(S)$ (resp. $t_i \in \Delta(T)$) selon son information privée (a_1, \cdot, a_i) (resp. (b_1, \cdot, b_i)). Des actions s_i et t_i sont tirées selon x_i et y_i respectivement, ce qui donne un paiement à l'étape i $g_i = g_0(k_i, s_i, t_i)$ qui n'est pas observé. Un triplet $(k_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+1})$ est tiré selon la distribution $\rho_0(k_i, s_i, t_i)$; a_{i+1} est annoncé au joueur 1 et b_{i+1} au joueur 2. On suppose que le signal reçu par chaque joueur contient son action. Les histoires sont privées et décrites à l'étape n par un point dans A^n pour le joueur 1 et dans B^n pour le joueur 2.

Les signal que reçoit le joueur 1 à l'étape i peut lui donner des informations sur le passé de l'état, sur l'état courant, ou sur les coups passés du joueur 2.

2.3.2 Espace universel des croyances et structures d'informations

Il existe plusieurs niveaux de croyance : à chaque étape, le joueur 1 à une croyance sur l'état de la nature, mais aussi une croyance sur les croyances du joueur 2 sur l'état de la nature, et ainsi de suite; il y a donc une hiérarchie infinie des croyances pour chaque joueur. Pour résumer ce que les joueurs savent à l'étape i on va utiliser le concept de types :

Proposition 2.3.1 *Il existe des ensemble de types du joueur 1 et 2, notés Θ^1 et Θ^2 , tels que pour tout i Θ^i soit homéomorphe à $\Delta(S \times \Theta^{3-i})$.*

Le type de chaque joueur est donc une croyance sur l'état de la nature et sur le type de l'autre joueur.

Définition 2.3.2 *Posons $\Omega = K \times \Theta^1(S) \times \Theta^2(S)$; Ω est l'espace universel des croyances construit sur K .*

À l'état du monde $\omega = (k, \theta^1, \theta^2) \in \Omega$ sont associés l'état de la nature $p(\omega) = k$ et les deux types $p^i(\omega) = \theta^i$.

Il est utile d'introduire l'extension canonique : $\theta^i \rightarrow \bar{\theta}^i = \theta^i \otimes \delta_{\theta^i} \in \Delta(\Omega)$, ainsi que $\bar{p}^i(\omega) := \bar{\theta}^i$.

Définition 2.3.3 *Une distribution de probabilités $Q \in \Delta(\Omega)$ est consistante si pour tout $B \subset \Omega$ mesurable,*

$$Q(B) = \int_{\Omega} \bar{p}^i(\omega)(B) Q(d\omega), \quad i = 1, 2.$$

Une interprétation est qu'en moyenne, l'idée que se fait chaque joueur sur le monde est la bonne.

Proposition 2.3.4 *Si Q est une distribution de probabilité consistante sur Ω , alors, pour $B \subset \Omega$:*

$$\bar{p}^i(\omega)(B) = Q(B | \mathcal{F}^i)(\omega)$$

où \mathcal{F}^i est la σ -algèbre de Ω engendrée par θ^i .

On note \mathcal{Q} l'ensemble des distributions de probabilités consistantes et on montre que \mathcal{Q} est un ensemble fermé et convexe, et que les probabilités à support fini sont denses dans \mathcal{Q} .

Définition 2.3.5 Structure d'information Une structure d'information sur un espace d'états K est la donnée d'un espace de probabilités (E, \mathcal{E}, ρ) , de sous-tribus \mathcal{E}^1 et \mathcal{E}^2 , et d'une application mesurable $\psi : (E, \mathcal{E}, \rho) \rightarrow K$.

\mathcal{E}^i décrit l'information du joueur i : elle peut par exemple être générée par une application (signal de i) α^i de (E, \mathcal{E}, ρ) dans un espace de signaux A^i .

Le théorème suivant établit que toute structure d'information génère une représentation canonique qui est une distribution de probabilités consistante sur Ω .

Proposition 2.3.6 Il existe $\phi : E \rightarrow \Omega$, telle que :

a) Pour tout $C \subset K$,

$$(p \circ \phi)^{-1}(C) = \psi^{-1}(C) \quad \rho\text{-presque partout.}$$

b) $\rho \circ \phi^{-1} \in \mathcal{Q}$.

c) Pour tout $B \subset \Omega$ mesurable et $i = 1$ ou 2

$$\bar{p}^i(\phi(e))(B) = \rho(\phi^{-1}(B)|\mathcal{E}^i)(e) \quad \rho\text{-presque partout.}$$

On notera $Q[\rho]$ la probabilité associée à ρ par le précédent théorème.

Remarque 2.3.7 Les résultats de cette sous-section s'étendent au cas de n joueurs.

2.3.3 Jeu en un coup à information incomplète

Soit \mathcal{J} une structure d'information. On considère un jeu à deux joueurs, avec S et T comme espace d'actions et $g_0 : K \times I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ pour fonction de paiement. Une stratégie du joueur 1 est définie par $\sigma : E \rightarrow \Delta(S)$ \mathcal{E}^1 mesurable, et de même pour une stratégie τ du joueur 2. Le paiement induit par les stratégies σ et τ est :

$$g(\rho, \sigma, \tau) = \int_E g_0(\psi(e), \sigma(e), \tau(e)) \rho(de).$$

Exemple 2.3.8 Modèle d'Harsanyi

Soit $(E, \mathcal{E}^i, \rho) = (\Omega, p^i, Q)$ avec Q une distribution de probabilités consistante. On a alors :

$$g(Q, \sigma, \tau) = \int_{\Omega} g_0(p(\omega), \sigma(\omega), \tau(\omega)) Q(d\omega). \quad (2.3.1)$$

Comme $\sigma(\omega)$ et $\tau(\omega)$ ne dépendent respectivement que de $\theta^1(\omega)$ et $\theta^2(\omega)$, on peut écrire :

$$g(Q, \sigma, \tau) = \int_{\Omega} g_0(k, \sigma(\theta^1), \tau(\theta^2)) dQ(k \times \theta^1 \times \theta^2)$$

Dans le cas où l'on suppose S et T compacts et g continue sur $K \times S \times T$, on note $[g, Q]$ le jeu avec la structure d'information canonique $\mathcal{J} = (\Omega, p^i, Q)$.

Proposition 2.3.9

- a) Pour tout $Q \in \mathcal{Q}$, le jeu $[g, Q]$ a une valeur $v_g(Q)$ et les deux joueurs ont, pour tout $\epsilon > 0$, des stratégies ϵ -optimales à support fini.
- b) $v_g(Q)$ est affine et continue en Q sur \mathcal{Q} .

Proposition 2.3.10 Soit \mathcal{J} une structure d'information et g un paiement. On suppose que le jeu en un coup à information incomplète associé a une valeur $v(\mathcal{J}, g)$. Alors

$$v(\mathcal{J}, g) = v_g(Q[\rho])$$

2.3.4 Application aux jeux répétés : formule récursive générale

On applique les résultats des sections 2.3.2 et 2.3.3 au modèle général décrit dans la section 2.3.1. On définit \mathcal{J} de la manière suivante à l'étape n : E est l'ensemble des parties de longueur n de la forme $(k_1, a_1, b_1, s_1, t_1, \dots, k_{n+1}, a_{n+1}, b_{n+1})$ et $\mathcal{E}^1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ (resp. $\mathcal{E}^2 = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$) représente l'information connue du joueur 1 (resp. du joueur 2). On considère ρ générée par la loterie initiale \mathbb{P} , la dynamique ρ_0 , et les stratégies des deux joueurs restreintes aux n premières étapes.

On étudie alors le jeu en un coup donnant le paiement à l'étape $n + 1$ en fonction de l'information passée, en résumant la structure d'information \mathcal{J} par $\mathbb{P}_n \in \mathcal{Q}$ l'état du monde à l'étape n . À partir de \mathbb{P}_n , $\sigma(e)$ et $\tau(e)$ sont les actions mixtes jouées dans l'état du monde e , elles déterminent les lois de s_{i+1} et t_{i+1} . Avec k_{i+1} on obtient alors la loi du triplet $k_{n+2}, a_{n+2}, b_{n+2}$ ce qui donne une nouvelle distribution consistante $\mathbb{P}_{n+1} = H(\mathbb{P}_n, \sigma, \tau)$. On montre alors, via le théorème du minimax, que la valeur du jeu ne change pas si chaque joueur est informé de la stratégie de son adversaire, ce qui entraîne la formule récursive générale valable pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} v_\lambda(\mathbb{P}) &= \sup_{\sigma} \inf_{\tau} \{ \lambda g(\mathbb{P}, \sigma, \tau) + (1 - \lambda) v_\lambda(H(\mathbb{P}, \sigma, \tau)) \} \\ &= \inf_{\tau} \sup_{\sigma} \{ \lambda g(\mathbb{P}, \sigma, \tau) + (1 - \lambda) v_\lambda(H(\mathbb{P}, \sigma, \tau)) \} \\ v_n(\mathbb{P}) &= \sup_{\sigma} \inf_{\tau} \left\{ \frac{1}{n} g(\mathbb{P}, \sigma, \tau) + \frac{n-1}{n} v_{n-1}(H(\mathbb{P}, \sigma, \tau)) \right\} \\ &= \inf_{\tau} \sup_{\sigma} \left\{ \frac{1}{n} g(\mathbb{P}, \sigma, \tau) + \frac{n-1}{n} v_{n-1}(H(\mathbb{P}, \sigma, \tau)) \right\} \end{aligned}$$

où g est la fonction définie par la formule (2.3.1)

Remarque 2.3.11 Dans le cas d'un jeu stochastique fini, \mathbb{P}_n se réduit à une probabilité sur l'état courant et on retrouve donc la proposition 2.1.5. Dans le cas d'un jeu à information incomplète où l'ensemble des états de la nature est $K \times L$, l'état ne varie pas au cours du jeu et les actions sont observées donc \mathbb{P}_n se réduit aux croyances de chaque joueur sur l'état de la nature $(p, q) \in \Delta(K) \times \Delta(L)$ et on retrouve alors les formules de la section 2.2.4.

Remarque 2.3.12 *On peut étendre ce modèle au cas d'une durée incertaine [42] : on considère un jeu répété avec une horloge aléatoire publique qui donne la probabilité que le jeu s'arrête à chaque étape. La durée du jeu est donc une variable aléatoire entière définie sur un arbre indépendant du déroulement du jeu. Alors une formule récursive similaire est vérifiée.*

Chapitre 3

Étude asymptotique

La question que l'on se pose est celle de l'étude des valeurs d'un jeu répété lorsque la durée du jeu tend vers $+\infty$ (et que le poids relatif de chaque étape tend donc vers 0). On étudie ainsi les valeurs v_n lorsque le nombre d'étape n tend vers $+\infty$, et les valeurs v_λ lorsque le taux d'escompte λ tend vers 0 (c'est à dire quand l'espérance de la durée aléatoire du jeu tend vers $+\infty$, voir remarque 2.1.9). Les trois questions principales sont celles :

- de l'existence des limites,
- de leur égalité,
- et de leur identification.

Cette étude asymptotique est aussi appelée "compact case" [59] : l'idée est de voir Γ_n (resp Γ_λ) comme un jeu en temps continu sur l'intervalle $[0,1]$ où le paiement est $\int_0^1 g_t dt$ et où les joueurs sont contraints de jouer des actions constantes sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ (resp. sur chaque intervalle $[\lambda \sum_{i=1}^k (1-\lambda)^{k-1}, \lambda \sum_{i=1}^{k+1} (1-\lambda)^{i-1}]$). Les tailles de ces intervalles tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et λ vers 0, on peut donc s'attendre à ce que v_n et v_λ tendent vers la valeur d'un jeu limite joué en temps continu sur $[0,1]$.

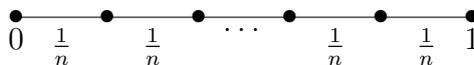


FIG. 3.1 – Jeu Γ_n

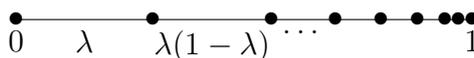


FIG. 3.2 – Jeu Γ_λ

Cela a été fait explicitement dans le cas du Big Match (section 5.3.2 de [59]); il est intéressant de remarquer que dans ce cas, les discrétisations des stratégies optimales dans le jeu en temps continu conduisent à des stratégies ε -optimales dans les jeux en temps

discret. Une telle approche a également été conduite dans le cas du Big Match avec information incomplète [57, 62].

Dans d'autre cas on peut montrer la convergence des valeurs en passant par un jeu différentiel auxiliaire. Par exemple dans [67] on considère un jeu répété avec paiement vectoriel où le but du joueur 1 est que le paiement moyen $\bar{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_k$ soit proche d'un ensemble K tandis que le joueur 2 veut le contraire (ce jeu a été introduit, et résolu dans le cas d'un ensemble convexe, dans [7]). En considérant un jeu différentiel limite et en utilisant un argument d'unicité des solutions de viscosité on montre alors que tout ensemble est soit faiblement approchable (pour n grand le joueur 1 peut assurer que \bar{g}_n soit proche de K avec grande probabilité) soit faiblement repoussable (pour n grand le joueur 2 peut assurer que \bar{g}_n soit loin de K avec grande probabilité).

Un dernier exemple provient du cadre des jeux répétés avec information incomplète d'un côté et de l'étude de leurs duaux définis dans [13]. En considérant un jeu différentiel sur $[0, 1]$ dont les valeurs des discrétisations uniformes en temps sont exactement les valeurs du dual du jeu en n étapes, on trouve [26] une nouvelle démonstration de la convergence des valeurs primales, de la vitesse de convergence et de la caractérisation de la limite.

Remarque 3.0.13 *On peut généraliser l'étude asymptotique au cadre plus général de la section 2.1.3. On peut par exemple considérer le comportement des valeurs v_μ lorsque $\mu(i)$ est petit pour tout i (en se restreignant en général au probabilités μ décroissantes sur \mathbb{N}^*) : voir par exemple [59] pour le cas des jeux à 0 ou 1 joueur. Il existe également des résultats sur le comportement asymptotique des suites admissibles [64] et des jeux avec durée incertaine [40, 42].*

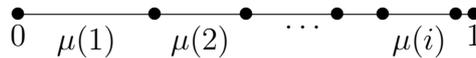


FIG. 3.3 – Jeu Γ_μ

Remarque 3.0.14 *On étudie principalement la convergence de v_n et v_λ dans $(\mathcal{F}_0, |||_\infty)$, et quand il n'y a pas plus de précisions les résultats concerneront donc toujours la convergence uniforme. Néanmoins dans certains cas on s'intéressera à la convergence de certaines coordonnées des valeurs (sections 3.2.2 et 4.2.2).*

3.1 Résultats positifs

On donne ici des exemples de classes de jeux où v_n et v_λ convergent et vers la même limite.

3.1.1 Jeux stochastiques finis

Dans le cadre de la section 2.1, il est démontré dans [5, 6] le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 *Pour tout jeu stochastique fini, les valeurs v_n et v_λ convergent, et la limite est la même.*

Idée de la démonstration. On reprend ici la preuve de [34,59]. A $\lambda > 0$ fixé, l'équation de point fixe $v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda)$ se ramène à un nombre fini d'inéquations polynomiales en un nombre fini de variables réelles qui sont :

- pour chaque $\omega \in \Omega$, la valeur $v_\lambda(\omega)$.
- Pour chaque couple $(a, \omega) \in S \times \Omega$, la probabilité $x_\lambda(\omega, a)$ que le joueur 1 joue l'action a avec sa stratégie stationnaire optimale dans l'état ω .
- Pour chaque couple $(b, \omega) \in T \times \Omega$, la probabilité $y_\lambda(\omega, b)$ que le joueur 2 joue l'action b avec sa stratégie stationnaire optimale dans l'état ω .
- Le paramètre λ .

Ceci implique que l'ensemble $\{\lambda, v_\lambda, x_\lambda, y_\lambda\}$ est semi-algébrique donc entraîne, d'après le théorème d'élimination de Tarski-Seidenberg, que pour tout ω la fonction $\lambda \rightarrow v_\lambda(\omega)$ est semi-algébrique et admet par conséquent un développement en série de Puiseux : il existe $\lambda_0 > 0$, $Z \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}$, et pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ un vecteur $r_i \in \mathbb{R}^\Omega$ tels que pour tout $\omega \in \Omega$ et $\lambda \in]0, \lambda_0]$:

$$v_\lambda(\omega) = \sum_{i \geq Z} r_i(\omega) \lambda^{\frac{i}{M}}. \quad (3.1.1)$$

De plus, les fonctions $\lambda \rightarrow v_\lambda(\omega)$ étant bornées au voisinage de 0, on peut prendre $Z = 0$. En faisant tendre λ vers 0 dans l'équation 3.1.1, on en déduit alors que v_λ converge vers r_0 lorsque λ tend vers 0.

Par ailleurs, en dérivant l'équation 3.1.1, on montre que v_λ est à variation bornée et donc que la suite v_n converge également vers r_0 (voir section 4.2.3). ■

Remarque 3.1.2 *Dans ce cadre il y a même existence de la valeur uniforme. Ceci a été démontré [9] d'abord pour le cas particulier du "Big Match" (introduit dans [18]), puis dans le cas général [32].*

3.1.2 Jeux absorbants

Définition 3.1.3 *Dans un jeu stochastique $\Gamma = (\Omega, X, Y, g, \rho)$, un état $\omega \in \Omega$ est dit absorbant avec paiement de continuation $c \in \mathbb{R}$ si pour tout $(a, b) \in S \times T$,*

$$\begin{aligned} g(a, b, \omega) &= c \\ \rho(\omega|a, b, \omega) &= 1. \end{aligned}$$

Un jeu est dit absorbant si au plus un des états n'est pas absorbant.

Le théorème suivant est démontré dans [23] :

Proposition 3.1.4 *Soit Γ un jeu stochastique fini et absorbant. Alors v_n et v_λ convergent vers la même limite.*

Le résultat est toujours vrai si on suppose que les ensembles d'actions sont compacts et que les fonctions de paiements et de transitions sont continues ; on donnera la démonstration de [53] dans la section 4.4.1. Dans ce cas il faut noter qu'on peut même montrer l'existence d'une valeur uniforme [33].

3.1.3 Jeux récurrents

Un jeu récurrent est un jeu où l'ensemble d'état Ω est la réunion d'un ensemble d'états absorbants Ω^* et d'un ensemble fini Ω_0 sur lequel la fonction de paiement g est identiquement nulle. Sans perte de généralité on peut supposer que $\Omega^* = \{\bar{\omega}, \underline{\omega}\}$ et que $\bar{\omega}$ et $\underline{\omega}$ ont un paiement de continuation de 1 et -1 respectivement.

Soit $\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{|\Omega|}$. L'opérateur de Shapley d'un jeu récurrent est donné par :

$$\begin{aligned}\Psi(f)(\bar{\omega}) &= f(\bar{\omega}) + 1 \\ \Psi(f)(\underline{\omega}) &= f(\underline{\omega}) - 1\end{aligned}$$

tandis que si $\omega \in \Omega_0$,

$$\begin{aligned}\Psi(f)(\omega) &= \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \mathbb{E}_{\rho(x,y,\omega)} f \\ &= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \mathbb{E}_{\rho(x,y,\omega)} f.\end{aligned}$$

Everett considère dans [15] le jeu dont le paiement est la limite du paiement d'étape g_n du jeu répété, et démontre que ce jeu a une valeur dès que l'opérateur de Shapley est bien défini. Ceci n'entraîne pas automatiquement la convergence de v_n et v_λ . Cependant, [63] reprend des arguments de la démonstration de [15] (existence d'un "vecteur critique") pour démontrer :

Proposition 3.1.5 *Soit Γ un jeu récurrent avec des ensembles d'actions compacts, et des fonctions de paiement et de transition continues. Alors v_n et v_λ convergent, et la limite est la même.*

On donnera une nouvelle démonstration de la Proposition 3.1.5 dans la section 4.4.5, en utilisant l'approche en termes d'opérateurs et sans reprendre d'arguments de [15].

3.1.4 Jeux à information incomplète et signaux standards

On a également convergence des valeurs dans le cadre de la section 2.2.4 :

Proposition 3.1.6 *Pour tout jeu à information incomplète et signaux standards, les valeurs v_n et v_λ convergent, la limite est la même et est l'unique fonction v continue concave en p et continue convexe en q telle que*

$$v = \text{Cav}_p[\min(\Psi(0), v)] = \text{Vex}_q[\max(\Psi(0), v)]$$

où on note $\text{Cav}_p[f]$ la plus petite fonction concave en p supérieure à f , et $\text{Vex}_q[f]$ la plus grande fonction convexe en q inférieure à f .

La démonstration est due à [3] dans le cas d'information incomplète d'un seul côté, et a été généralisée au cas d'information incomplète des deux côtés dans [30]. Il est important de remarquer que la valeur uniforme existe dans le cas d'information incomplète d'un seul côté, mais que ce n'est pas vrai dans le cas général d'information incomplète des deux côtés.

3.1.5 Jeux stochastiques à information incomplète

On donne ici des résultats concernant certains cas de jeux stochastiques à information incomplète d'un côté (voir la section 2.2.5 dont on reprend les notations).

Un premier cas naturel est celui dans lequel la dynamique des états suit une chaîne de Markov, c'est à dire quand la fonction de transition ρ_0 ne dépend pas des actions jouées. Dans ce cas il est démontré dans [47] que le jeu admet une valeur uniforme, d'où la convergence de v_n et v_λ vers une même limite.

D'autres cas où v_n et v_λ convergent vers une limite commune sont divers types de "Big Match" avec information incomplète [57, 58, 66], les jeux absorbants avec information incomplète [51], ainsi que les jeux récursifs avec information incomplète [54].

3.1.6 Cas de la convergence uniforme dans les jeux à un joueur

Dans le cas d'un jeu à un seul joueur, il est démontré dans [27] l'équivalence de la convergence uniforme de v_n et v_λ :

Proposition 3.1.7 *Soit Γ un problème de programmation dynamique : on peut par exemple se placer dans le cadre des sections 2.2.2 ou 2.2.3 avec l'hypothèse supplémentaire que T est réduit à un élément. Alors*

- a) *si v_n converge uniformément, v_λ converge uniformément vers la même limite.*
- b) *si v_λ converge uniformément, v_n converge uniformément vers la même limite.*

Il faut noter que la démonstration ne fait pas appel à des hypothèses topologiques sur les ensembles d'états ou d'actions. D'autre part, l'hypothèse de convergence uniforme est cruciale, comme nous le verrons dans la section 3.2.2.

La convergence uniforme de v_n et v_λ entraîne [38] la convergence uniforme des valeurs associées à certaines évaluations généralisées. Cependant, ceci n'implique pas nécessairement l'existence d'une valeur uniforme [28, 38].

3.2 Contre-exemples

Il y a peu d'exemples de jeux possédants un opérateur de Shapley tels que v_n et v_λ ne convergent pas vers la même valeur. Les deux exemples connus reposent soit sur un espace d'état non compact, soit sur un paiement non borné :

3.2.1 Exemples où v_n et v_λ ne convergent pas

L'exemple que nous allons donner provient de deux exemples dans [24] et [20]. Ces deux exemples sont respectivement basés sur des opérateurs contractants et des fonctions topicales, nous donnons ici un exemple explicite de jeu tel que ni v_n ni v_λ ne converge (voir le chapitre suivant pour le lien entre opérateurs contractants, fonctions topicales et opérateurs de Shapley).

Soit h une fonction \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans lui-même, telle que $0 \leq h'(t) \leq 1$ pour tout t et $\frac{h(t)}{t}$ ne converge pas quand t tend vers $+\infty$.

On définit le jeu répété Γ comme suit : l'espace d'états est $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, et l'ensemble d'action de chaque joueur est \mathbb{R} . Les états ω_0 et ω_1 sont absorbants de paiement 0 et 1 respectivement. Dans l'état ω_2 , le paiement est donné par

$$g(x, y, \omega_2) = \begin{cases} \frac{yh(x) - xh(y)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ h(x) - xh'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

et la transition est donnée par

$$\rho(\omega_1|x, y, \omega_2) = 1 - \rho(\omega_0|x, y, \omega_2) = \begin{cases} \frac{h(y) - h(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ h'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

et $\rho(\omega_2|x, y, \omega_2) = 0$. L'hypothèse $0 \leq h'(t) \leq 1$ assure que $\rho(x, y, \omega_2)$ est bien dans $\Delta(\Omega)$ pour tout x et y .

On remarque que l'hypothèse $h \in \mathcal{C}^1$ entraîne que la fonction g est continue ; mais celle-ci n'est pas bornée. En effet sinon en particulier on a $h(x) - xh'(x) = O(1)$, ce qui implique

$$\left(\frac{h(x)}{x}\right)' = \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ce qui contredit l'hypothèse de non convergence de $\frac{h(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

On montre ensuite que pour tout $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} [g(x, y, \omega_2) + \mathbb{E}_{\rho(x, y, \omega_2)} f] &= \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} [g(x, y, \omega_2) + \mathbb{E}_{\rho(x, y, \omega_2)} f] \\ &= f(\omega_0) + h(f(\omega_1) - f(\omega_0)). \end{aligned}$$

qui résulte du fait que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$g(f(\omega_1) - f(\omega_0), y, \omega_2) + \mathbb{E}_{\rho(f(\omega_1) - f(\omega_0), y, \omega_2)} f = f(\omega_0) + h(f(\omega_1) - f(\omega_0))$$

et d'une égalité symétrique.

Ceci entraîne que l'opérateur de Shapley Ψ de Γ est bien défini, et est donné par

$$\Psi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b + 1 \\ a + h(b - a) \end{pmatrix}$$

En particulier

$$v_n = \frac{\Psi^n(0)}{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{h(n-1)}{n} \end{pmatrix}$$

et $v_n(\omega_2)$ ne converge pas. De même,

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda h\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \end{pmatrix}$$

et $v_\lambda(\omega_2)$ ne converge pas.

3.2.2 Exemples où v_n et v_λ ont un comportement asymptotique différent

L'exemple qui suit provient de [27]. On considère un jeu stochastique à un seul joueur, avec $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et où le joueur 1 n'a que deux actions : $S = \{d, h\}$. Le paiement ne dépend pas de l'action joué et vaut :

$$g(d, \omega) = g(h, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = (i, j) \text{ avec } 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transition est déterministe :

$$\begin{aligned} \rho(h, (i, j)) &= (i, j + 1) && \text{pour tout } i \text{ et } j \\ \rho(d, (i, j)) &= (i, j + 1) && \text{si } 1 \leq j \\ \rho(d, (i, 0)) &= (i + 1, 0) \end{aligned}$$

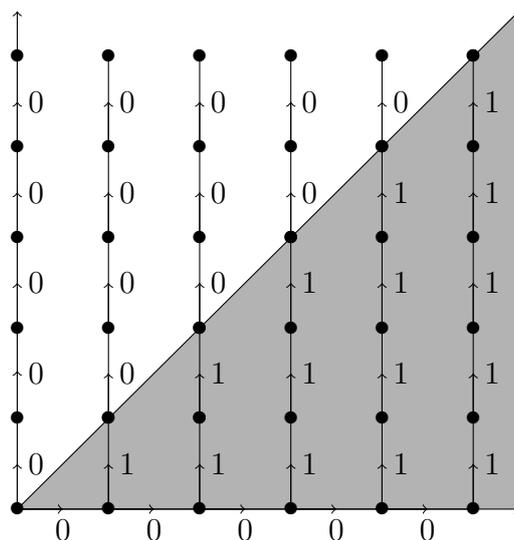


FIG. 3.4 – Exemple tiré de [27]

On considère l'état initial $\omega_0 = (0, 0)$. Le joueur 1 ne contrôle plus rien dès qu'il a joué h une fois, une stratégie pure dans le jeu infiniment répété est donc le choix d'une date $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ à laquelle il joue h pour la première fois.

On en déduit que

$$\begin{aligned} v_n(\omega_0) &= \frac{1}{n} \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{l=k+1}^{\min(n, 2k)} 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4n} \end{aligned}$$

et donc que $v_n(\omega_0)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

D'autre part

$$\begin{aligned}
 v_\lambda(\omega_0) &= \lambda \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{l=k+1}^{2k} (1-\lambda)^{l-1} \\
 &= \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (1-\lambda)^k (1 - (1-\lambda)^k)
 \end{aligned}$$

et $v_\lambda(\omega_0)$ converge donc vers $\frac{1}{4}$. Les valeurs $v_n(\omega_0)$ et $v_\lambda(\omega_0)$ convergent donc vers des limites différentes. On peut également remarquer que pour toute stratégie le paiement vaut 0 à partir d'une certaine étape, et que le joueur ne peut ainsi pas garantir un paiement strictement positif dans le jeu infini. D'autre part, conformément à la proposition 3.1.7, ni v_n ni v_λ ne convergent uniformément.

Dans ce contre exemple l'espace d'état est dénombrable mais non compact, une adaptation avec un ensemble d'état compact est donné dans [49]. On prend $\Omega = \{\omega_0\} \cup [0, 1]^2$, et $S = [0, 1]$. Le paiement est une fonction continue en l'état et qui ne dépend pas de l'action jouée :

$$g(\omega_0) = 0$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{4} \text{ ou } x \geq \frac{3}{4} \\ 12x - 3 & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 9 - 12x & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

La transition est déterministe et ne dépend pas de l'action jouée si l'état courant n'est pas ω_0 :

$$\begin{aligned}
 \rho(a, \omega_0) &= (0, a) \\
 \rho(x, y) &= (\min(1, x + y), y)
 \end{aligned}$$

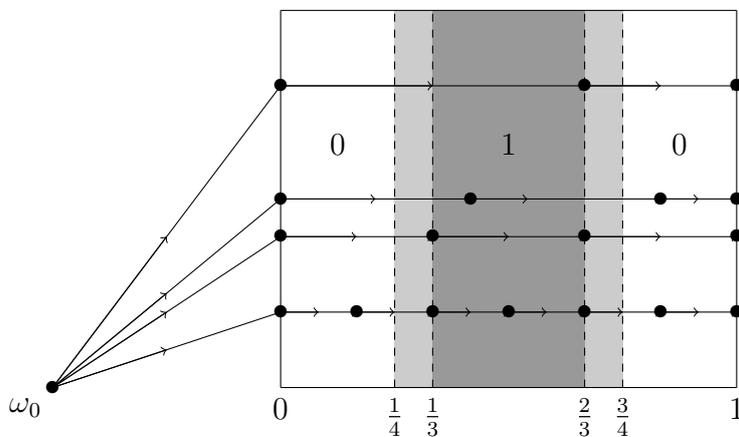


FIG. 3.5 – Exemple tiré de [49]

On peut alors calculer que $\lim v_n(\omega_0) = 9 - \sqrt{71}$; on se borne ici à remarquer que $\lim v_n(\omega_0) \geq \frac{1}{2}$ puisque le joueur peut garantir un paiement $\frac{1}{2}$ dans le jeu en n étapes en choisissant a de telle sorte qu'il arrive à un point d'abscisse $\frac{2}{3}$ à l'étape n .

Le calcul explicite de $\lim v_\lambda$ est fastidieux, mais on remarque que $\lim v_\lambda(\omega_0) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{2}$. En effet en majorant par 1 le paiement reçu dans la bande d'abscisse comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, on voit qu'en jouant l'action a le joueur ne gagne pas plus de

$$\sum_{m=\frac{1}{4a}}^{\frac{3}{4a}} \lambda(1-\lambda)^{m-1} = (1-\lambda)^{\frac{1}{4a}} \left(1 - \left((1-\lambda)^{\frac{1}{4a}} \right)^2 \right) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

On a donc également dans cet exemple $\lim v_n(\omega_0) \neq \lim v_\lambda(\omega_0)$. De plus, comme dans l'exemple précédent on remarque que le joueur ne peut pas garantir un paiement strictement positif dans le jeu infini.

Chapitre 4

Opérateurs monotones et homogènes additivement

Dans ce chapitre on étudie certaines conséquences des propriétés de monotonie et d'homogénéité additive vérifiées par tout opérateur de Shapley (voir section 2.2.1) sur le comportement asymptotique des valeurs. On expose en particulier l'approche en termes d'opérateurs [53, 64] qu'on applique à différentes familles de jeux répétés. On commence par généraliser le cadre de la section 2.2.1 : on considère Ω un ensemble quelconque, on note $\mathcal{F}_0 = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_\infty < \infty\}$ l'ensemble des fonctions bornées de Ω dans \mathbb{R} muni de la norme uniforme, et \leq l'ordre partiel naturel sur \mathcal{F}_0 . Dans toute la suite \mathcal{F} est un cône convexe fermé contenant les fonctions constantes et contenu dans \mathcal{F}_0 , et Ψ est un opérateur de \mathcal{F} dans lui même.

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1.1 Ψ est un opérateur MHa s'il vérifie les propriétés suivantes de monotonie et d'homogénéité additive :

$$(M) \quad f_1 \leq f_2 \implies \Psi(f_1) \leq \Psi(f_2).$$

$$(Ha) \quad Si \quad c \in \mathbb{R}, \quad \Psi(f + c) = \Psi(f) + c.$$

On remarque que tout opérateur MHa est en particulier un opérateur contractant :

$$\|\Psi(f_1) - \Psi(f_2)\|_\infty \leq \|f_1 - f_2\|_\infty$$

pour tout f_1 et f_2 dans \mathcal{F} .

Ceci permet de définir comme dans le chapitre précédent

$$\Phi(\lambda, f) = \lambda \Psi \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} f \right) \tag{4.1.1}$$

$$v_n = \Phi \left(\frac{1}{n}, v_{n-1} \right) = \frac{\Psi^n(0)}{n} \tag{4.1.2}$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda). \tag{4.1.3}$$

Les opérateurs MHa définis sur un ensemble de dimension finie sont également appelés "topical operators".

Remarque 4.1.2 *Tout opérateur de Shapley est un opérateur MHa (voir chapitre précédent). En dimension finie, l'inverse est également vrai [25] : tout opérateur topical peut s'exprimer comme l'opérateur de Shapley d'un jeu.*

4.2 Propriétés asymptotiques

4.2.1 Propriétés de base

On démontre ici quelques propriétés bien connues qui seront utiles par la suite. Tout d'abord, on peut donner une borne explicite de la suite v_n et de la famille v_λ :

Lemme 4.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, 1]$,*

$$\|v_n\|_\infty \leq \|\Psi(0)\|_\infty \quad (4.2.1)$$

$$\|v_\lambda\|_\infty \leq \|\Psi(0)\|_\infty \quad (4.2.2)$$

Démonstration. L'opérateur Ψ étant contractant,

$$\begin{aligned} \|\Psi^n(0)\|_\infty &\leq \|\Psi^{n-1}(0)\|_\infty + \|\Psi^{n-1}(\Psi(0)) - \Psi^{n-1}(0)\|_\infty \\ &\leq \|\Psi^{n-1}(0)\|_\infty + \|\Psi(0)\|_\infty \end{aligned}$$

et donc en faisant une somme télescopique,

$$\|nv_n\|_\infty = \|\Psi^n(0)\|_\infty \leq n\|\Psi(0)\|_\infty.$$

D'autre part, toujours à cause du caractère contractant de Ψ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_\lambda}{\lambda} \right\|_\infty - \|\Psi(0)\|_\infty &\leq \left\| \frac{v_\lambda}{\lambda} - \Psi(0) \right\|_\infty \\ &= \left\| \Psi \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda \right) - \Psi(0) \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1-\lambda}{\lambda} \|v_\lambda\|_\infty \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\|v_\lambda\|_\infty \leq \|\Psi(0)\|_\infty. \quad \blacksquare$$

Les deux prochains lemmes établissent que v_n et v_λ varient lentement :

Lemme 4.2.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité*

$$\|v_n - v_{n-1}\|_\infty \leq \frac{2}{n} \|\Psi(0)\|_\infty$$

Démonstration. Ψ étant contractant,

$$\begin{aligned} \|nv_n - (n-1)v_{n-1}\|_\infty &= \|\Psi^n(0) - \Psi^{n-1}(0)\|_\infty \\ &\leq \|\Psi(0)\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.2.1 ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \|nv_n - nv_{n-1}\|_\infty &\leq \|nv_n - (n-1)v_{n-1}\|_\infty + \|v_{n-1}\|_\infty \\ &\leq 2\|\Psi(0)\|_\infty. \end{aligned}$$

■

Lemme 4.2.3 *Pour tous λ et μ dans $]0, 1]$,*

$$\|v_\lambda - v_\mu\|_\infty \leq 2\|\Psi(0)\|_\infty \frac{|\lambda - \mu|}{\lambda}$$

Démonstration. Ψ étant contractant,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_\lambda}{\lambda} - \frac{v_\mu}{\mu} \right\|_\infty &= \left\| \Psi \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda \right) - \Psi \left(\frac{1-\mu}{\mu} v_\mu \right) \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda - \frac{1-\mu}{\mu} v_\mu \right\|_\infty \\ &\leq (1-\lambda) \left\| \frac{v_\lambda}{\lambda} - \frac{v_\mu}{\mu} \right\|_\infty + \frac{|\lambda - \mu|}{\mu} \|v_\mu\|_\infty \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\left\| \frac{v_\lambda}{\lambda} - \frac{v_\mu}{\mu} \right\|_\infty \leq \frac{|\lambda - \mu|}{\lambda\mu} \|v_\mu\|_\infty$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\lambda v_\lambda - \lambda v_\mu\|_\infty &\leq \|\mu v_\lambda - \lambda v_\mu\|_\infty + |\lambda - \mu| \|v_\lambda\|_\infty \\ &\leq |\lambda - \mu| (\|v_\lambda\|_\infty + \|v_\mu\|_\infty) \end{aligned}$$

et le lemme 4.2.1 permet de conclure. ■

4.2.2 Convergence de la norme des valeurs et de certaines coordonnées

Dans cette sous-section on donne plusieurs résultats de convergence de suites réelles reliées à $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou de familles de réels liées à $\{v_\lambda\}_{\lambda \in]0,1]}$. En dimension finie ces résultats entraînent la convergence de certaines coordonnées des valeurs.

Le premier résultat provient de [24] :

Proposition 4.2.4 *Soit $\Psi : C \rightarrow C$ un opérateur contractant défini sur un sous ensemble convexe d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Il existe $f^* \in X^*$, $\|f^*\|_* = 1$, telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(v_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|v_\lambda\| = \inf_{f \in \mathcal{F}} \|\Psi(f) - f\|$$

Démonstration. voir [24] ■

Dans le cas d'opérateurs MHa on montre qu'on a plus que la convergence en norme : soit \mathbf{t} et \mathbf{b} les semi normes définies sur \mathcal{F}_0 par

$$\mathbf{t}(f) = \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{b}(f) = \inf_{\omega \in \Omega} f(\omega) \quad (4.2.4)$$

alors :

Proposition 4.2.5 *Soit Ψ un opérateur MHa défini sur \mathcal{F} sous ensemble de l'espace de Banach $(\mathcal{F}_0, \|\cdot\|_\infty)$, alors il existe f_t^* et f_b^* deux éléments de norme 1 dans \mathcal{F}_0^* tels que*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_t^*(v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_t^*(v_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{t}(v_\lambda) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_b^*(v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{b}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_b^*(v_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{b}(v_\lambda) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b}(\Psi(f) - f). \end{aligned}$$

De plus, f_t^* et f_b^* vérifient

$$f_t^*(1) = f_b^*(1) = 1$$

où par abus de notation on a noté 1 la fonction constante égale à 1.

Démonstration. Nous allons démontrer les égalités faisant intervenir la semi norme \mathbf{t} , les autres suivent par symétrie.

Définissons l'opérateur $\tilde{\Psi}$ de \mathcal{F} dans lui-même par $\tilde{\Psi}(f) := \Psi(f) + \|\Psi(0)\|_\infty + 1$. On note \tilde{v}_n et \tilde{v}_λ les valeurs liées à $\tilde{\Psi}$. On établit facilement les identités

$$\tilde{v}_n = v_n + \|\Psi(0)\|_\infty + 1 \quad (4.2.5)$$

$$\tilde{v}_\lambda = v_\lambda + \|\Psi(0)\|_\infty + 1. \quad (4.2.6)$$

et donc, en utilisant le lemme 4.2.1,

$$\|\tilde{v}_n\|_\infty = \mathbf{t}(\tilde{v}_n) = \mathbf{t}(v_n) + \|\Psi(0)\|_\infty + 1 \geq 1 \quad (4.2.7)$$

$$\|\tilde{v}_\lambda\|_\infty = \mathbf{t}(\tilde{v}_\lambda) = \mathbf{t}(v_\lambda) + \|\Psi(0)\|_\infty + 1 \geq 1 \quad (4.2.8)$$

$$\mathbf{b}(\tilde{v}_n) = \mathbf{b}(v_n) + \|\Psi(0)\|_\infty + 1 \geq 1 \quad (4.2.9)$$

$$\mathbf{b}(\tilde{v}_\lambda) = \mathbf{b}(v_\lambda) + \|\Psi(0)\|_\infty + 1 \geq 1 \quad (4.2.10)$$

D'autre part, nous pouvons appliquer la proposition 4.2.4 à l'opérateur $\tilde{\Psi}$: il existe $f_t^* \in \mathcal{F}_0^*$, de norme 1, telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_t^*(\tilde{v}_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{v}_n\|_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_t^*(\tilde{v}_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\tilde{v}_\lambda\|_\infty = \inf_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{\Psi}(f) - f\|_\infty \\ &\geq \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\tilde{\Psi}(f) - f) \quad (4.2.11) \end{aligned}$$

Montrons que pour tout $x \in \mathcal{F}_0$ tel que $x \geq 0$, alors $f_t^*(x) \geq 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $x < 1$; la formule (4.2.9) entraîne alors que pour tout n $\mathbf{b}(\tilde{v}_n - x) \geq 0$ et donc que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_n - x\|_\infty &= \mathbf{t}(\tilde{v}_n - x) \\ &\leq \mathbf{t}(\tilde{v}_n) \\ &\leq \|\tilde{v}_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f_t^*(\tilde{v}_n) - f_t^*(x) = f_t^*(\tilde{v}_n - x) \leq \|\tilde{v}_n - x\|_\infty \leq \|\tilde{v}_n\|_\infty$$

et en passant à la limite d'après (4.2.11) on établit bien que $f_t^*(x) \geq 0$. Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_n\|_\infty &\geq f_t^*(\|\tilde{v}_n\|_\infty) \\ &= f_t^*(\tilde{v}_n) + f_t^*(\|\tilde{v}_n\|_\infty - \tilde{v}_n) \\ &\geq f_t^*(\tilde{v}_n) \end{aligned}$$

et toujours d'après (4.2.11), en passant à la limite on obtient

$$f_t^* \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\tilde{v}_n\|_\infty \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\tilde{v}_n\|_\infty$$

et finalement $f_t^*(1) = 1$.

On en déduit, grâce aux formules (4.2.5) à (4.2.8) et (4.2.11), ainsi qu'en utilisant la linéarité de f , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +0} \mathbf{t}(v_\lambda)$ existent et vérifient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_t^*(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_t^*(v_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{t}(v_\lambda) \geq \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f)$$

Il reste à établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) \leq \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f)$$

Soit $f \in \mathcal{F}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Psi(f) \leq f + c.$$

Il vient par récurrence, en utilisant les propriétés (M) et (Ha),

$$\Psi^n(f) \leq f + nc$$

et donc, puisque Ψ est non dilatant,

$$\begin{aligned} \Psi^n(0) &\leq \Psi^n(f) + \|f\|_\infty \\ &\leq nc + 2\|f\|_\infty. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Le membre de droite de l'inégalité 4.2.12 étant une constante, on a donc

$$\mathbf{t}(\Psi^n(0)) \leq nc + 2\|f\|_\infty$$

ce qui entraîne en divisant par n que l'on fait tendre vers $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) \leq c.$$

Ceci étant vrai pour tout $c > \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f)$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) \leq \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f). \tag{4.2.13}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Un corollaire en dimension finie est :

Proposition 4.2.6 *Soit Ψ une fonction topocale de \mathbb{R}^n dans lui même. Il existe $1 \leq i, j \leq n$ tels que*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\omega_i) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda(\omega_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{t}(v_\lambda) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\omega_j) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda(\omega_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{b}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{b}(v_\lambda) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b}(\Psi(f) - f) \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la proposition 4.2.5, il existe un élément x_t^* dans \mathbb{R}^n , tel que $x_t^* \geq 0$, $\sum_{i=1}^n x_t^*(\omega_i) = 1$, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_t^*, v_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle x_t^*, v_\lambda \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{t}(v_\lambda) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f) \quad (4.2.14)$$

Soit i tel que $x_t^*(\omega_i) > 0$. La positivité de x_t^* entraîne que pour tout n ,

$$\langle x_t^*, v_n \rangle \leq x_t^*(\omega_i) v_n(\omega_i) + (1 - x_t^*(\omega_i)) \mathbf{t}(v_n)$$

et donc en passant à la limite et en utilisant (4.2.14) on obtient

$$x_t^*(\omega_i) \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n(\omega_i) \geq x_t^*(\omega_i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\omega_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n).$$

On montre de la même manière les égalités faisant intervenir v_λ ou \mathbf{b} . ■

Remarque 4.2.7 *On trouve dans [16] une preuve alternative de cette proposition ne reposant pas sur la proposition 4.2.4, mais qui ne concerne que la suite v_n et pas la famille v_λ .*

Une conséquence de la proposition 4.2.6 est :

Corollaire 4.2.8 *Soit Ψ un opérateur topocal de \mathbb{R}^2 dans lui-même. Alors v_n et v_λ convergent, et la limite est la même.*

4.2.3 Cas où v_λ est à variation bornée

Définition 4.2.9 *La famille v_λ est dite à variation bornée si pour toute suite λ_i décroissant vers 0,*

$$\sum_i \|v_{\lambda_{i+1}} - v_{\lambda_i}\|_\infty < +\infty.$$

On trouve la proposition suivante dans [40] :

Proposition 4.2.10 *Si v_λ est à variation bornée, alors v_λ et v_n convergent tous deux, et la limite est la même.*

Démonstration. La famille v_λ étant à variation bornée, toute suite v_{λ_n} est de Cauchy et donc converge. Ceci entraîne l'existence de $v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda$.

Soit x_n la valeur du jeu $\frac{1}{n}$ -escompté : $x_n = v_{\frac{1}{n}}$, et donc par définition $nx_n = \Psi((n-1)x_n)$. La suite x_n converge vers v , et pour tout n ,

$$\begin{aligned} \|\Psi^n(0) - nx_{n+1}\|_\infty &\leq \|\Psi^n(0) - \Psi((n-1)x_n)\|_\infty + \|\Psi((n-1)x_n) - nx_{n+1}\|_\infty \\ &\leq \|\Psi^{n-1}(0) - (n-1)x_n\|_\infty + n\|x_n - x_{n+1}\|_\infty. \end{aligned}$$

On montre donc par récurrence que

$$\|\Psi^n(0) - nx_{n+1}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n i \|x_i - x_{i+1}\|_\infty$$

d'où

$$\|v_n - x_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \|x_i - x_{i+1}\|_\infty. \quad (4.2.15)$$

La famille v_λ étant de variation bornée, on a $\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i - x_{i+1}\|_\infty < +\infty$ ce qui entraîne que le membre de droite de 4.2.15 tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc que la suite v_n converge également vers v . ■

Remarque 4.2.11 *La même démonstration se généralise [64] pour établir la convergence de toute suite admissible (définie dans la section 2.1.3) dès que v_λ est à variation bornée.*

4.2.4 Opérateur de récession

Définition 4.2.12 *Un opérateur $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ admet un opérateur de récession $\mathbf{R}(\Psi) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ si pour tout $f \in \mathcal{F}$,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| t\Psi\left(\frac{f}{t}\right) - \mathbf{R}(\Psi)(f) \right\|_\infty = 0$$

Remarque 4.2.13 *Dans le cas où Ψ est l'opérateur de Shapley d'un jeu à paiements bornés, Ψ admet un opérateur de récession et de plus $\mathbf{R}(\Psi)(f) = \Phi(0, f)$ pour tout f où $\Phi(0, f) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi(\lambda, f)$.*

Remarque 4.2.14 *Tout opérateur de récession $\mathbf{R}(\Psi)$ est un opérateur MHA, et est de plus multiplicativement homogène : pour tout $c \in \mathbb{R}^+$ $\mathbf{R}(\Psi)(cx) = c\mathbf{R}(\Psi)(x)$.*

L'intérêt de l'opérateur de récession réside dans la proposition suivante :

Proposition 4.2.15 *Soit Ψ un opérateur MHA admettant un opérateur de récession $\mathbf{R}(\Psi)$. Alors tout point d'accumulation de $\{v_n\}$ ou $\{v_\lambda\}$ pour la norme uniforme est un point fixe de $\mathbf{R}(\Psi)$.*

Démonstration. Soit v point d'accumulation de $\{v_n\}$. Comme $(n+1)v_{n+1} = \Psi(nv_n)$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \Psi(nv) - v \right\|_{\infty} &= \left\| \frac{1}{n} (\Psi(nv) - \Psi(nv_n)) + \frac{1}{n} \Psi(nv_n) - v \right\|_{\infty} \\ &\leq \|v - v_n\|_{\infty} + \left\| \frac{n+1}{n} v_{n+1} - v \right\|_{\infty} \\ &\leq 2\|v - v_n\|_{\infty} + \frac{n+1}{n} \|v_{n+1} - v_n\|_{\infty} + \frac{1}{n} \|v_n\|_{\infty} \\ &\leq 2\|v - v_n\| + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

d'après les lemmes 4.2.1 and 4.2.1. puisque v est un point d'accumulation de la suite v_n , on en déduit que $v = \mathbf{R}(\Psi)(v)$.

Soit maintenant v point d'accumulation de $\{v_{\lambda}\}$ et soit $\lambda \in]0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\lambda}{1-\lambda} \Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}v\right) - v \right\|_{\infty} &\leq \left\| \frac{\lambda}{1-\lambda} \Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}v\right) - \frac{v_{\lambda}}{1-\lambda} \right\|_{\infty} + \left\| v - \frac{v_{\lambda}}{1-\lambda} \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\| \Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}v\right) - \Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}v_{\lambda}\right) \right\|_{\infty} \\ &\quad + \frac{\|v - v_{\lambda}\|_{\infty}}{1-\lambda} + \frac{\lambda\|v\|_{\infty}}{1-\lambda} \\ &\leq \frac{(2-\lambda)\|v - v_{\lambda}\|_{\infty} + \lambda\|v\|_{\infty}}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Puisque v est un point d'accumulation de la famille v_{λ} , on en déduit que $\mathbf{R}(\Psi)(v) = v$.

■

La proposition 4.2.15 donne une condition nécessaire pour être point d'accumulation de v_n ou v_{λ} , mais celle-ci est en général trop faible pour être utile. L'idée de l'approche en termes d'opérateurs, que l'on va expliquer en détail dans la section suivante, est d'étudier le comportement de $\Phi(\lambda, \cdot)$ pour λ petit et pas seulement celui de $\Phi(0, \cdot)$.

4.3 L'approche en termes d'opérateurs

L'ensemble de cette section reprend les résultats de [53, 64].

4.3.1 Majoration uniforme

On note \mathcal{L}^+ l'ensemble des éléments de \mathcal{F} pour lesquels il existe $L_0 > 0$ tel que

$$\Psi(Lf) \leq (L+1)f$$

pour tout $L \geq L_0$. Symétriquement \mathcal{L}^- est l'ensemble des éléments de \mathcal{F} pour lesquels il existe $L_0 > 0$ tel que $\Psi(Lf) \geq (L+1)f$ pour tout $L \geq L_0$.

Remarque 4.3.1 *L'identité (2.2.7) implique que \mathcal{L}^+ est également l'ensemble des éléments de \mathcal{F} qui vérifient $\Phi(\lambda, f) \leq f$ pour λ suffisamment petit.*

Pour toute famille f_i de fonctions dans \mathcal{F} on note $\limsup f_i$ la fonction g telle que pour tout ω , $g(\omega) = \limsup f_i(\omega)$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.3.2 *Si $f \in \mathcal{L}^+$, alors*

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n &\leq f \\ \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda &\leq f\end{aligned}$$

Symétriquement, si $f \in \mathcal{L}^-$, alors

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n &\geq f \\ \liminf_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda &\geq f\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^+$, on montre par récurrence que $\Psi^n(L_0 f) \leq (L_0 + n)f$, d'où

$$\begin{aligned}\Psi^n(0) &\leq \Psi^n(L_0 f) + \|\Psi^n(L_0 f) - \Psi^n(0)\| \\ &\leq (L_0 + n)f + L_0 \|f\|.\end{aligned}$$

On voit donc que

$$v_n = \frac{\Psi^n(0)}{n} \leq f + 2 \frac{L_0}{n} \|f\|.$$

D'autre part, on a $\Phi(\lambda, f) \leq f$ pour λ assez petit d'après la remarque 4.3.1. Pour un tel λ on a alors $\Phi^n(\lambda, f) \leq f$ pour tout n , et donc $v_\lambda \leq f$ d'après la remarque 2.1.7. ■

Un corollaire immédiat est :

Corollaire 4.3.3 *Si f appartient à l'intersection $\overline{\mathcal{L}^+} \cap \overline{\mathcal{L}^-}$, alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda$.*

4.3.2 Majoration locale

On note \mathcal{S}^+ l'ensemble des éléments de \mathcal{F} tels que

$$\limsup_{L \rightarrow +\infty} [\Psi(Lf) - (L+1)f] \leq 0$$

ou de manière équivalente,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\lambda, f) - f}{\lambda} \right] \leq 0 \quad (4.3.1)$$

et on définit \mathcal{S}^- de façon symétrique. Il est clair que $\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{S}^+$, et que quand Ω est fini, $\overline{\mathcal{S}^+} = \overline{\mathcal{L}^+}$. On en déduit

Proposition 4.3.4 *Si Ω est fini et f appartient à l'intersection $\overline{\mathcal{S}^+} \cap \overline{\mathcal{S}^-}$, alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda$.*

On peut également montrer un principe du maximum [53] :

Lemme 4.3.5 Soient f_1 et f_2 dans \mathcal{F} , et $\omega \in \Omega$ tel que

$$(f_2 - f_1)(\omega) = \max_{\omega' \in \Omega} (f_2 - f_1)(\omega').$$

Alors pour tout $L > 0$,

$$[\Psi(Lf_1)(\omega) - (L+1)f_1(\omega)] - [\Psi(Lf_2)(\omega) - (L+1)f_2(\omega)] \geq (f_2 - f_1)(\omega).$$

Ceci entraîne le principe de comparaison suivant :

Corollaire 4.3.6 Supposons Ω compact, et soient f_1 et f_2 deux fonctions continues appartenant à \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^- respectivement. Alors $f_1 \geq f_2$.

On a donc un théorème d'unicité dans ce cadre :

Proposition 4.3.7 Supposons Ω compact. Soit \mathcal{S}_0^+ (resp. \mathcal{S}_0^-) l'ensemble des fonctions continues sur Ω contenues dans \mathcal{S}^- . L'intersection $\mathcal{S}_0^+ \cap \mathcal{S}_0^-$ a au plus un élément.

4.3.3 Opérateur dérivé

D'après la Proposition 4.2.15, tout point d'accumulation v de v_λ ou de v_n satisfait $\Phi(0, v) = v$. Ceci nous incite à écrire le membre de gauche de (4.3.1) comme

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\lambda, f) - \Phi(0, f)}{\lambda} + \frac{\Phi(0, f) - f}{\lambda} \right]$$

et à traiter chacun des deux termes entre crochets séparément.

Définition 4.3.8 Soit Ψ un opérateur MHa. On dit que φ est l'opérateur dérivé de Ψ si pour tout f dans \mathcal{F} il existe $\varphi(f) \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\lambda, f)(\omega) - \Phi(0, f)(f)(\omega)}{\lambda} \right] = \varphi(f)(\omega). \quad (4.3.2)$$

Il est démontré dans [53] qu'un résultat de [34] (généralisant [35]) entraîne :

Proposition 4.3.9 Supposons que Ψ soit l'opérateur de Shapley d'un jeu stochastique dans le cadre compact/continu (modèle de la section 2.2.2). Alors Ψ admet un opérateur dérivé φ , et de plus on a la caractérisation :

$$\varphi(f)(\omega) + f(\omega) = \sup_{x \in X(0, f)(\omega)} \inf_{y \in Y(0, f)(\omega)} g(x, y, \omega) \quad (4.3.3)$$

$$= \inf_{y \in Y(0, f)(\omega)} \sup_{x \in X(0, f)(\omega)} g(x, y, \omega) \quad (4.3.4)$$

où l'on a noté $X(0, f)(\omega)$ (resp. $Y(0, f)(\omega)$) l'ensemble des stratégies optimales du joueur 1 (resp. du joueur 2) dans $\Gamma(0, f)(\omega)$.

L'intérêt de l'opérateur dérivé réside dans le fait qu'on peut exprimer \mathcal{S}^+ uniquement à l'aide de l'opérateur de récession et l'opérateur dérivé (quand ils existent) :

$$\mathcal{S}^+ = \{f \in \mathcal{F}, \forall \omega \in \Omega, \varphi^*(f)(\omega) \leq 0\}$$

où l'on a noté

$$\varphi^*(f)(\omega) = \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\lambda, f)(\omega) - f(\omega)}{\lambda} \right] \quad (4.3.5)$$

$$= \begin{cases} \varphi(f)(\omega) & \text{si } \Phi(0, f)(\omega) = f(\omega) \\ +\infty & \text{si } \Phi(0, f)(\omega) > f(\omega) \\ -\infty & \text{si } \Phi(0, f)(\omega) < f(\omega) \end{cases} \quad (4.3.6)$$

On en déduit, grâce aux propositions 4.3.4 et 4.3.7, la caractérisation variationnelle suivante :

Proposition 4.3.10 *Soit Ψ un opérateur admettant un opérateur dérivé φ , et soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose que f est continue sur Ω , et que φ change de signe en f : il existe deux suites f_n et f'_n dans \mathcal{F} toutes deux de limite f telles que pour tout n*

$$\varphi^*(f_n) \leq 0 \leq \varphi^*(f'_n).$$

Alors, si Ω est compact, f est unique. Si Ω est fini, on a de plus $f = \lim v_n = \lim v_\lambda$.

Remarque 4.3.11 *La limite dans l'équation (4.3.2) n'est en général pas uniforme en f , et la fonction φ n'est donc pas nécessairement continue. Par conséquent, un f vérifiant les hypothèses de la proposition 4.3.10 n'est pas forcément un zéro de φ .*

4.3.4 Opérateur de Shapley réduit

Dans le cas d'un jeu avec des états absorbants, le déroulement du jeu une fois qu'on a atteint un de ces états est trivial, il peut donc être utile de définir un opérateur réduit qui ne tient pas compte des états absorbants.

Soit un opérateur de Shapley Ψ d'un jeu répété Γ avec un ensemble d'états Ω . On rappelle que Ψ est défini de \mathcal{F} dans lui même, où \mathcal{F} est un cône convexe fermé contenant les fonctions constantes et contenu dans $\mathcal{F}_0 = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_\infty < +\infty\}$.

Soit Ω^* l'ensemble des états absorbants et $\widehat{\Omega}$ son complémentaire. On note $\widehat{\mathcal{F}}_0 = \{\widehat{f} : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \|\widehat{f}\|_\infty < +\infty\}$ et on définit Υ l'injection de $\widehat{\mathcal{F}}_0$ dans \mathcal{F}_0 qui à tout \widehat{f} associe la fonction $\Upsilon(\widehat{f})$ égale à \widehat{f} sur $\widehat{\Omega}$ et égale au paiement de continuation $g(\omega^*)$ sur Ω^* . Son inverse Υ^{-1} est la restriction à $\Upsilon(\widehat{\mathcal{F}}_0)$ de la projection canonique de \mathcal{F}_0 sur $\widehat{\mathcal{F}}_0$.

Soit $\widehat{\mathcal{F}} = \Upsilon^{-1}(\mathcal{F})$; on définit la famille d'opérateur réduits $\widehat{\Phi}(\lambda, \cdot) : \widehat{\mathcal{F}} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ par

$$\widehat{\Phi}(\lambda, f) = \Upsilon^{-1}(\Phi(\lambda, \Upsilon(f))). \quad (4.3.7)$$

L'intérêt de cet opérateur est qu'il agit sur un ensemble plus petit et que la structure dynamique des valeurs est préservée. Pour simplifier les notations on note $\widehat{f} = \Upsilon^{-1}(f)$ pour tout $f \in \Upsilon(\widehat{\mathcal{F}})$; on a alors le lemme

Proposition 4.3.12 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0, 1]$, les valeurs réduites vérifient*

$$\begin{aligned}\widehat{v}_n &= \widehat{\Phi} \left(\frac{1}{n}, \widehat{v_{n-1}} \right) \\ \widehat{v}_\lambda &= \widehat{\Phi} (\lambda, \widehat{v}_\lambda)\end{aligned}$$

Démonstration. Par définition d'un état absorbant, il est clair que $v_n(\omega^*) = v_\lambda(\omega^*) = g(\omega^*)$ pour tout $n \in \mathbb{N}, \lambda \in]0, 1]$ et ω^* absorbant et donc que \widehat{v}_n et \widehat{v}_λ sont bien définis. En appliquant l'égalité (4.3.7) à \widehat{v}_λ on trouve

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi} (\lambda, \widehat{v}_\lambda) &= \Upsilon^{-1} (\Phi(\lambda, v_\lambda)) \\ &= \widehat{v}_\lambda\end{aligned}$$

et l'autre identité se montre de la même manière. ■

Remarque 4.3.13 *Les opérateurs $\Phi(\lambda, \cdot)$ sont monotones et $1 - \lambda$ contractants, mais il est important de noter qu'on n'est pas dans le cadre classique de la section 2.2.1. En effet premièrement l'ensemble $\widehat{\mathcal{F}}$ est bien un convexe fermé, mais il n'est pas certain qu'il contienne les constantes ou que ce soit un cône. Deuxièmement, il n'existe pas d'opérateur $\widehat{\Psi}$ tel qu'une relation du type de (2.2.7) soit vérifiée. Pour cette raison, les résultats de la section 4.2.2 par exemple ne s'appliquent pas aux valeurs réduites (voir l'exemple de la section 3.2.1).*

Cependant, on va montrer que la section 4.3.1 s'applique aux opérateurs réduits.

Soit $\widehat{\mathcal{L}}^+$ l'ensemble des fonctions $f \in \widehat{\mathcal{F}}$ qui vérifient $\widehat{\Phi}(\lambda, f) \leq f$ pour tout λ suffisamment petit, et soit $\widehat{\mathcal{L}}^-$ défini de manière symétrique. On montre alors le lemme

Lemme 4.3.14 *Si $f \in \widehat{\mathcal{L}}^+$, alors*

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow +\infty} \widehat{v}_n &\leq f \\ \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{v}_\lambda &\leq f\end{aligned}$$

Symétriquement, si $f \in \widehat{\mathcal{L}}^-$, alors

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow +\infty} \widehat{v}_n &\geq f \\ \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{v}_\lambda &\geq f\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in \widehat{\mathcal{L}}^+$. Par définition de $\widehat{\mathcal{L}}^+$ et $\widehat{\Phi}$, f vérifie pour tout λ suffisamment petit

$$\Upsilon^{-1} (\Phi(\lambda, \Upsilon(f))) \leq f.$$

Autrement dit, puisque Υ^{-1} est la projection sur $\widehat{\mathcal{F}}_0$, on a pour tout λ suffisamment petit et tout $\omega \in \widehat{\Omega}$,

$$\Phi(\lambda, \Upsilon(f))(\omega) \leq f(\omega) = \Upsilon(f)(\omega).$$

D'autre part pour tout $\lambda \in]0, 1]$ et tout $\omega \in \Omega^*$,

$$\Phi(\lambda, \Upsilon(f))(\omega^*) = \lambda g(\omega^*) + (1 - \lambda)\Upsilon(f)(\omega^*) = \Upsilon(f)(\omega^*)$$

d'où $\Upsilon(f) \in \mathcal{L}^+$. Le lemme 4.3.2 s'applique donc à $\Upsilon(f)$, et on en déduit le résultat. ■
Un corollaire immédiat est l'analogie du corollaire 4.3.3 :

Corollaire 4.3.15 *Si f appartient à l'intersection $\overline{\mathcal{L}^+} \cap \overline{\mathcal{L}^-}$, alors*

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{v}_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{v}_\lambda$$

et

$$\Upsilon(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda.$$

4.4 Applications

4.4.1 Jeux absorbants

On reprend ici la démonstration de [53] du raffinement suivant de la proposition 3.1.4 :

Proposition 4.4.1 *Soit Γ un jeu compact/continu (voir section 2.2.2). Si Γ est absorbant, alors v_n et v_λ convergent vers la même limite. On a de plus une caractérisation de la limite au moyen de l'opérateur dérivé.*

Démonstration.

Soit Γ un tel jeu, soit ω_0 l'unique état non absorbant et notons Ω^* l'ensemble des états absorbants. On va utiliser l'opérateur dérivé $\widehat{\Phi}$ qui est dans ce cas défini de \mathbb{R} dans lui-même. On utilise les mêmes notations que dans la section 4.3.4 : pour $f \in \mathbb{R}$ on note $\widehat{\varphi}(f) = \Upsilon^{-1}(\varphi(\Upsilon(f)))$ et $\widehat{\varphi}^*(f) = \Upsilon^{-1}(\varphi^*(\Upsilon(f)))$ qui sont deux fonctions de \mathbb{R} dans lui-même.

On remarque premièrement que le lemme 4.3.5 entraîne que la fonction $\widehat{\varphi}^*$ est strictement croissante. D'autre part, soit M une borne des paiements et soit $f \geq M$. On a alors $\widehat{\varphi}(f) \leq 0$ d'après le lemme 4.3.9, et également

$$\widehat{\Phi}(0, f) \leq \max(f, M) \leq f.$$

La formule (4.3.6) entraîne donc que $\widehat{\varphi}^*(f)$ est négative pour $f \geq M$. De même $\widehat{\varphi}^*(f)$ est positive pour $f \leq -M$.

Tout ceci implique donc que $\widehat{\varphi}^*$ change exactement une fois de signe sur \mathbb{R} , en un point que l'on appelle v . On a donc $f > v \implies f \in \widehat{\mathcal{L}^+}$, de même $f < v \implies f \in \widehat{\mathcal{L}^-}$, et d'après le corollaire 4.3.15 v_n et v_λ convergent vers $\Upsilon(v)$. ■

4.4.2 Jeux à 3 états

On a vu dans le corollaire 4.2.8 que dans le cas d'un jeu stochastique avec 2 états dont l'opérateur de Shapley est bien défini, les valeurs convergent. Une conséquence de la proposition 4.4.1 est le résultat suivant concernant les jeux à 3 états :

Proposition 4.4.2 *Pour tout jeu compact/continu (voir section 2.2.2) à 3 états, v_λ et v_n convergent vers la même limite.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4.3 *Soit Γ un jeu stochastique avec espace d'états Ω fini, d'opérateur de Shapley $\Psi : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^\Omega$. Étant donné Ω^* un sous ensemble de Ω et $v : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ on considère le jeu stochastique Γ^* obtenu à partir de Γ en changeant chaque état $w \in \Omega^*$ en un état absorbant de paiement de continuation $v(w)$. On note v_n^* (resp. v_λ^*) la valeur du jeu en n étapes (resp. λ -escompté). Les inégalités suivantes sont alors vérifiées :*

$$\|v_\lambda^* - v_\lambda\|_\infty \leq \sup_{\omega \in \Omega^*} |v(\omega) - v_\lambda(\omega)| \quad (4.4.1)$$

$$\|v_n^* - v_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \sup_{i \leq n} \sup_{\omega \in \Omega^*} |iv_i(\omega) - (i-1)v_{i-1}(\omega) - v(\omega)| \quad (4.4.2)$$

Démonstration. On vérifie que l'opérateur de Shapley de Γ^* , $\Psi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfait pour tout f

$$\Psi^*(f)(\omega) = \begin{cases} \Psi(f)(\omega) & \text{si } \omega \notin \Omega^* \\ v(\omega) + f(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega^* \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Ceci implique que pour tout $\lambda \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|\Phi^*(\lambda, v_\lambda) - v_\lambda\|_\infty &\leq \sup_{\omega \in \Omega^*} |\lambda v(\omega) + (1-\lambda)v_\lambda(\omega) - v_\lambda(\omega)| \\ &\leq \lambda \sup_{\omega \in \Omega^*} |v(\omega) - v_\lambda(\omega)| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|v_\lambda^* - v_\lambda\|_\infty &\leq \|\Phi^*(\lambda, v_\lambda) - v_\lambda\|_\infty + \|\Phi^*(\lambda, v_\lambda) - \Phi^*(\lambda, v_\lambda^*)\|_\infty \\ &\leq \lambda \sup_{\omega \in \Omega^*} |v(\omega) - v_\lambda(\omega)| + (1-\lambda)\|v_\lambda^* - v_\lambda\|_\infty \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité (4.4.1).

D'autre part, en utilisant une nouvelle fois la caractérisation (4.4.3), on voit que si $\omega \in \Omega^*$,

$$\begin{aligned} n|v_n(\omega) - v_n^*(\omega)| &= |nv_n(\omega) - \Psi^*((n-1)v_{n-1}^*)(\omega)| \\ &= |nv_n(\omega) - (n-1)v_{n-1}^*(\omega) - v(\omega)| \end{aligned}$$

tandis que si $\omega \notin \Omega^*$,

$$\begin{aligned} n|v_n(\omega) - v_n^*(\omega)| &= |\Psi((n-1)v_{n-1})(\omega) - \Psi^*((n-1)v_{n-1}^*)(\omega)| \\ &= |\Psi((n-1)v_{n-1})(\omega) - \Psi((n-1)v_{n-1}^*)(\omega)| \\ &\leq (n-1)\|v_{n-1} - v_{n-1}^*\|_\infty. \end{aligned}$$

Ceci permet de démontrer la formule (4.4.2) en raisonnant par récurrence. ■

On peut maintenant démontrer la proposition 4.4.2 :

Démonstration de la proposition 4.4.2. D'après la proposition 4.2.6, il existe i et j tels que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\omega_i) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda(\omega_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{t}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{t}(v_\lambda) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\omega_j) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda(\omega_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{b}(v_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{b}(v_\lambda) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b}(\Psi(f) - f) \end{aligned}$$

Si $i = j$, v_n et v_λ convergent vers la constante $\inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f)$. On peut donc supposer que $i = 1$ et $j = 2$. On pose $\Omega^* = \{\omega_1, \omega_2\}$, on définit $v : \Omega^*$ dans \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} v(\omega_1) &= \inf_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{t}(\Psi(f) - f) \\ v(\omega_2) &= \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b}(\Psi(f) - f) \end{aligned}$$

ce qui nous donne un jeu auxiliaire Γ^* comme dans le lemme 4.4.3. Le jeu Γ^* possède 3 états dont 2 absorbants, d'après la proposition 4.4.1 les valeurs v_n^* et v_λ^* convergent donc vers une valeur commune v^* . Les inégalités (4.4.1) et (4.4.2) entraîne alors que v_λ et v_n convergent également vers v^* . ■

4.4.3 Jeux à information incomplète

On donne ici une idée de la preuve de [53] de la proposition 3.1.4.

On rappelle que dans ce cas Ψ est défini de \mathcal{F} dans lui même, où \mathcal{F} est l'ensemble des fonctions séparément continues et concaves/convexes de $\Delta(K) \times \Delta(L)$ dans \mathbb{R} . Un premier résultat, conséquence de l'inégalité de Jensen, est que tout élément de f est point fixe de l'opérateur de récession $\Phi(0, \cdot)$. On montre également que l'ensemble des stratégies optimales pour le premier joueur dans $\Phi(0, f)$ est le même (égal à l'ensemble des stratégies non révélatrices) pour toute fonction f strictement concave en p .

L'opérateur de Shapley admet un opérateur dérivé φ , et puisque l'ensemble $\Delta(K) \times \Delta(L)$ est compact et infini, on utilise la proposition 4.3.10. Soit v un point d'accumulation de v_λ , on montre en utilisant la caractérisation 4.3.3 de φ que pour toute fonction positive, continue et strictement concave $h : \Delta(K) \rightarrow \mathbb{R}$ l'inégalité $\varphi(v + h) \leq 0$ est vérifiée. Grâce à un argument symétrique on montre que φ change de signe en v , qui est donc unique par la proposition 4.3.10. On montre de la même manière que v_n a un unique point d'accumulation et que $\lim v_n = \lim v_\lambda$. Par ailleurs, ces inégalités variationnelles permettent de retrouver la caractérisation classique de v :

$$\begin{aligned} v &= Cav_p[\min(\Psi(0), v)] \\ &= Vex_q[\max(\Psi(0), v)]. \end{aligned}$$

4.4.4 Jeux absorbants à information incomplète

L'approche en terme d'opérateurs est également utilisée dans [51] pour le cas des jeux absorbants à observation incomplète d'un côté. La preuve est complexe et nous nous contenterons d'en donner un bref aperçu.

Comme dans la section 4.4.3, on utilise l'approche de la majoration locale et on démontre que tout point d'accumulation v de v_λ appartient à l'ensemble $\overline{\mathcal{S}^+}$ défini dans la section 4.3.2. Mais à cause de l'asymétrie d'information cela permet pas d'en déduire immédiatement que v est également dans $\overline{\mathcal{S}^-}$. Par contre, on peut déduire du fait que $v \in \overline{\mathcal{S}^+}$ l'inégalité

$$v \geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda$$

ce qui entraîne l'unicité du point d'accumulation v et donc la convergence de v_λ vers v . On montre de la même manière que tout point d'accumulation w de v_n est dans $\overline{\mathcal{S}^+}$ et vérifie donc

$$w \geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda = v.$$

Un dernier argument entraîne l'inégalité inverse et donc la convergence de v_n vers la même limite v .

4.4.5 Jeux récurrents

On se place dans le cadre de la section 3.1.3, on va donner une nouvelle preuve de la proposition 3.1.5 en utilisant l'approche en termes d'opérateurs.

Soit Γ un jeu récurrent, soit Ω^* l'ensemble des états absorbants et Ω^0 l'ensemble des états non absorbants. Pour $\omega \in \Omega^*$ on note $g(\omega)$ le paiement de continuation dans l'état ω . Sans perte de généralité on supposera $\Omega^* = \{\bar{\omega}, \underline{\omega}\}$, $g(\bar{\omega}) = 1$ et $g(\underline{\omega}) = -1$.

Soit $\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{|\Omega|}$. On rappelle que l'opérateur de Shapley $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ d'un tel jeu est donné par :

$$\begin{aligned} \Psi(f)(\bar{\omega}) &= f(\bar{\omega}) + 1 \\ \Psi(f)(\underline{\omega}) &= f(\underline{\omega}) - 1 \end{aligned}$$

tandis que si $\omega \in \Omega_0$,

$$\begin{aligned} \Psi(f)(\omega) &= \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \mathbb{E}_{\rho(x,y,\omega)} f \\ &= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \mathbb{E}_{\rho(x,y,\omega)} f. \end{aligned}$$

En particulier pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\omega \in \Omega^0$, $L > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$ les égalités

$$\Psi(Lf)(\omega) = L\Psi(f)(\omega) \tag{4.4.4}$$

$$\Phi(\lambda, f)(\omega) = (1 - \lambda)\Psi(f)(\omega) \tag{4.4.5}$$

sont vérifiées.

On en déduit la caractérisation suivante :

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ f \in \mathcal{F}, \begin{array}{l} \Psi(f)(\omega) \leq f(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \\ \Psi(f)(\omega) < f(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \text{ tel que } f(\omega) < 0 \\ f(\bar{\omega}) \geq 1 \\ f(\underline{\omega}) \geq -1 \end{array} \right\} \tag{4.4.6}$$

et symétriquement

$$\mathcal{L}^- = \left\{ f \in \mathcal{F}, \begin{array}{l} \Psi(f)(\omega) \geq f(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \\ \Psi(f)(\omega) > f(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \text{ tel que } f(\omega) > 0 \\ f(\bar{\omega}) \leq 1 \\ f(\underline{\omega}) \leq -1 \end{array} \right\}$$

À l'aide de cette caractérisation on peut établir de la façon suivante que v_n et v_λ convergent vers une limite commune :

Démonstration de la Proposition 3.1.5. Soit v un point d'accumulation de la famille v_λ , d'après le corollaire 4.3.3 il suffit de démontrer que v est dans l'intersection $\overline{\mathcal{L}^+} \cap \overline{\mathcal{L}^-}$ pour établir que v_n et v_λ convergent tous deux vers v .

Puisque v est point d'accumulation de v_λ , il est immédiat que $v(\bar{\omega}) = 1$ et $v(\underline{\omega}) = -1$, et d'autre part la proposition 4.2.15 et l'équation (4.4.5) entraînent que pour tout $\omega \in \Omega_0$,

$$v(\omega) = \Phi(0, v)(\omega) = \Psi(v)(\omega). \quad (4.4.7)$$

Soit $\varepsilon > 0$; on va construire $v' \in \mathcal{L}^+$ tel que $\|v - v'\|_\infty \leq \varepsilon$. Ceci se fait en plusieurs étapes.

Première étape.

Dans cette étape on construit v' , les étapes ultérieures nous assureront que $v' \in \mathcal{L}^+$. On cherche un vecteur v' vérifiant les conditions suivantes :

- a) $v(\omega) \leq v'(\omega) \leq v(\omega) + \varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega$.
- b) $v'(\bar{\omega}) = 1$ et $v'(\underline{\omega}) = -1$.
- c) Si $\omega \in \Omega_0$, $\Psi(v')(\omega) \leq v'(\omega)$.
- d) Si $\omega \in \Omega_0$, $\Psi(v')(\omega) = v'(\omega) \Leftrightarrow v'(\omega) = v(\omega) + \varepsilon$.

Pour cela, considérons tout d'abord le vecteur v_1 égal à v sur Ω^* et à $v + \varepsilon$ sur Ω_0 . Il vérifie les conditions a) et b), ainsi que la condition c) puisque Ψ est contractant et que l'équation (4.4.7) est vérifiée. S'il vérifie également d), on prend $v' = v_1$.

Sinon, il existe $\omega_1 \in \Omega_0$ tel que $\Psi(v_1)(\omega_1) < v_1(\omega_1)$. Par continuité de Ψ , il existe un vecteur v_2 tel que $v_2 = v_1$ sur $\Omega \setminus \{\omega_1\}$, $v(\omega_1) \leq v_2(\omega_1) < v_1(\omega_1) = v(\omega_1) + \varepsilon$, et $\Psi(v_2)(\omega_1) < v_2(\omega_1)$. Par construction v_2 vérifie les propriétés a) et b), ainsi que c) et d) en ω_1 . De plus pour $\omega \in \Omega_0 \setminus \{\omega_1\}$, on a par monotonie de Ψ

$$\begin{aligned} \Psi(v_2)(\omega) &\leq \Psi(v_1)(\omega) \\ &\leq v_1(\omega) \\ &= v_2(\omega) \end{aligned}$$

et c) est donc vérifiée. Si d) est vérifiée, on prend $v' = v_2$.

Sinon, il existe $\omega_2 \in \Omega_0 \setminus \{\omega_1\}$ tel que $\Psi(v_2)(\omega_2) < v_2(\omega_2)$. Par continuité de Ψ , il existe un vecteur v_3 tel que $v_3 = v_2$ sur $\Omega \setminus \{\omega_2\}$,

$$\begin{aligned} v(\omega_1) &\leq v_3(\omega_1) < v(\omega_1) + \varepsilon \\ v(\omega_2) &\leq v_3(\omega_2) < v(\omega_2) + \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi(v_3)(\omega_1) &< v_3(\omega_1) \\ \Psi(v_3)(\omega_2) &< v_3(\omega_2)\end{aligned}$$

On vérifie que v_3 vérifie les conditions a) b) et c). S'il vérifie c) on prend $v' = v_3$ sinon on continue. L'ensemble Ω_0 étant fini, on est assuré que cette construction se termine et donc de l'existence de v' vérifiant les conditions a) b) c) et d).

On a $\|v' - v\|_\infty \leq \varepsilon$, il nous reste à démontrer que $v' \in \mathcal{L}^+$. Soit

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega_0, \Psi(v')(\omega) = v'(\omega)\} = \{\omega \in \Omega, v'(\omega) = v(\omega) + \varepsilon\} \quad (4.4.8)$$

Puisque v' vérifie b) c) et d), la caractérisation (4.4.6) nous assure que $v' \in \mathcal{L}^+$ si et seulement si $v'(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega'$. Il suffit donc d'établir que $v(\omega) \geq 0$ sur Ω' et c'est ce que l'on va faire dans le reste de la démonstration.

Il est intéressant de remarquer que si le joueur 2 n'a aucune influence sur les transitions (et donc sur le jeu) les propriétés c) et d) entraînent que pour tout état dans Ω' le Joueur 1 a une action qui lui assure de rester dans Ω' , et peut donc s'assurer un paiement nul indéfiniment si l'état initial est dans Ω' . Ainsi, tout v point d'accumulation de v_λ est nécessairement positif sur Ω' . Dans le cas général il n'est pas vrai que le Joueur 1 peut s'assurer de rester dans Ω' au cours de la partie, mais on va montrer analytiquement que v est tout de même positif. Une interprétation est que si le Joueur 2 joue bien, alors le joueur 1 peut s'assurer de rester dans Ω' .

Deuxième étape.

Soit k le vecteur égal à 1 sur Ω' et à 0 sur $\Omega \setminus \Omega'$, et soit

$$\eta := \inf_{\omega \in \Omega \setminus \Omega'} \{v(\omega) + \varepsilon - v'(\omega)\}.$$

Par définition de Ω' , η est strictement positif. On montre que pour tout $\alpha \in [0, \eta]$ et tout $\omega \in \Omega_0$, l'inégalité

$$\Psi(v + \alpha k)(\omega) \geq (v + \alpha k)(\omega) \quad (4.4.9)$$

est vérifiée. C'est le cas si $\omega \notin \Omega'$ puisqu'alors par monotonie de Ψ

$$\Psi(v + \alpha k)(\omega) \geq \Psi(v)(\omega) = v(\omega) = (v + \alpha k)(\omega).$$

Si $\omega \in \Omega'$, Ψ étant contractant,

$$\begin{aligned}\Psi(v')(\omega) - \Psi(v + \alpha k)(\omega) &\leq \|\Psi(v') - \Psi(v + \alpha k)\|_\infty \\ &\leq \|v' - v - \alpha k\|_\infty \\ &= \max(\varepsilon - \alpha, \varepsilon - \eta) \\ &= \varepsilon - \alpha\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\Psi(v + \alpha k)(\omega) &\geq \Psi(v')(\omega) + \alpha - \varepsilon \\ &= (v + \alpha k)(\omega).\end{aligned}$$

Supposons un instant que l'inégalité (4.4.9) soit également vérifiée en $\bar{\omega}$ et $\underline{\omega}$, on aurait alors pour tout $L > 0$

$$\Psi(L \cdot 0 + v + \eta k) \geq (L + 1) * 0 + v + \eta k$$

autrement dit pour tout $\lambda = \frac{1}{L+1}$ on aurait

$$\Phi(\lambda, \lambda(v + \eta k)) \geq \lambda(v + \eta k).$$

En itérant cette relation à λ fixé, on trouverait

$$v_\lambda \geq \lambda(v + \eta k)$$

d'où $v \geq 0$ en faisant tendre λ vers 0 puisque v est point d'accumulation de v_λ .

Troisième étape.

Cependant, en réalité on a $\Psi(v + \eta k)(\underline{\omega}) < v(\underline{\omega})$. Il nous faut donc faire un raisonnement plus fin en rajoutant des termes d'erreur.

On montre que pour tout $\lambda \in]0, 1]$ et $\alpha \in [0, \eta]$,

$$\Phi(\lambda, v + \alpha k) \geq (1 - \lambda)v + (\lambda + (1 - \lambda)\alpha)k - \lambda. \quad (4.4.10)$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, v + \alpha k)(\bar{\omega}) &= 1 > 1 - 2\lambda = (1 - \lambda)v(\bar{\omega}) + (\lambda + (1 - \lambda)\alpha)k(\bar{\omega}) - \lambda \\ \Phi(\lambda, v + \alpha k)(\underline{\omega}) &= -1 = (1 - \lambda)v(\underline{\omega}) + (\lambda + (1 - \lambda)\alpha)k(\underline{\omega}) - \lambda \end{aligned}$$

tandis que pour $\omega \in \Omega_0$, les équations (4.4.5) et (4.4.9) entraînent

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, v + \alpha k)(\omega) &= (1 - \lambda)\Psi(v + \alpha k)(\omega) \\ &\geq (1 - \lambda)v(\omega) + (1 - \lambda)\alpha k(\omega) \\ &\geq (1 - \lambda)v(\omega) + (1 - \lambda)\alpha k(\omega) + \lambda(k(\omega) - 1) \\ &= (1 - \lambda)v(\omega) + (\lambda + (1 - \lambda)\alpha)k(\omega) - \lambda. \end{aligned}$$

Quatrième étape.

On montre par récurrence sur n que pour tout $\lambda \in]0, 1]$ vérifiant $(1 - \lambda)^{n-1} \geq \frac{1}{1+\eta}$,

$$\Phi^n(\lambda, v) \geq (1 - \lambda)^n v + (1 - (1 - \lambda)^n)k + (1 - \lambda)^n - 1. \quad (4.4.11)$$

Le cas $n = 1$ se déduit de l'inégalité (4.4.10) avec $\alpha=0$.

Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$. On vérifie que

$$\begin{aligned} \Phi^n(\lambda, v)(\bar{\omega}) &= 1 > 2(1 - \lambda)^n - 1 = (1 - \lambda)^n v(\bar{\omega}) + (1 - (1 - \lambda)^n)k(\bar{\omega}) + (1 - \lambda)^n - 1 \\ \Phi^n(\lambda, v)(\underline{\omega}) &= -1 = (1 - \lambda)^n v(\underline{\omega}) + (1 - (1 - \lambda)^n)k(\underline{\omega}) + (1 - \lambda)^n - 1 \end{aligned}$$

tandis que pour $\omega \in \Omega_0$, l'hypothèse de récurrence et la monotonie de Φ entraînent

$$\begin{aligned} \Phi^n(\lambda, v)(\omega) &= \Phi(\lambda, \Phi^{n-1}(\lambda, v))(\omega) \\ &\geq \Phi\left(\lambda, (1 - \lambda)^{n-1}v + (1 - (1 - \lambda)^{n-1})k + (1 - \lambda)^{n-1} - 1\right)(\omega) \\ &= (1 - \lambda)^{n-1}\Phi\left(\lambda, v + \frac{1 - (1 - \lambda)^{n-1}}{(1 - \lambda)^{n-1}}k\right)(\omega) + (1 - \lambda)^n - (1 - \lambda). \end{aligned}$$

On a supposé $(1 - \lambda)^{n-1} \geq \frac{1}{1+\eta}$ donc $\frac{1-(1-\lambda)^{n-1}}{(1-\lambda)^{n-1}} \leq \eta$, on peut donc appliquer l'inégalité (4.4.10) qui implique

$$\begin{aligned} \Phi^n(\lambda, v)(\omega) &\geq (1 - \lambda)^{n-1} \left[(1 - \lambda)v(\omega) + (\lambda + (1 - \lambda)\frac{1 - (1 - \lambda)^{n-1}}{(1 - \lambda)^{n-1}})k(\omega) - \lambda \right] \\ &\quad + (1 - \lambda)^n - (1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)^n v(\omega) + (1 - (1 - \lambda)^n)k(\omega) + (1 - \lambda^n) - 1 \\ &\quad + \lambda(1 - (1 - \lambda)^{n-1})(1 - k(\omega)) \\ &\geq (1 - \lambda)^n v(\omega) + (1 - (1 - \lambda)^n)k(\omega) + (1 - \lambda^n) - 1 \end{aligned}$$

Cinquième étape.

Soit $\lambda \in]0, 1]$ et n tel que

$$(1 - \lambda)^n < \frac{1}{1 + \eta} \leq (1 - \lambda)^{n-1}.$$

L'inégalité 4.4.11 entraîne que pour tout $\omega \in \Omega'$,

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^n v(\omega) &\leq \Phi^n(\lambda, v)(\omega) \\ &\leq \Phi^n(\lambda, v_\lambda)(\omega) + (1 - \lambda)^n \|v - v_\lambda\|_\infty \\ &\leq v_\lambda(\omega) + \|v - v_\lambda\|_\infty \\ &\leq v(\omega) + 2\|v - v_\lambda\|_\infty \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} v(\omega) &\geq -2 \frac{\|v - v_\lambda\|_\infty}{1 - (1 - \lambda)^n} \\ &\geq -2 \frac{\|v - v_\lambda\|_\infty}{1 - \frac{1}{1+\eta}}. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout λ ; puisque v est point d'accumulation de v_λ on en déduit finalement que v est positif sur Ω' , ce qui achève la démonstration. ■

4.5 Cas où l'approche initiale ne suffit pas

4.5.1 Cas d'un jeu à 0 joueurs où il faut considérer le jeu par bloc de deux étapes

On considère le jeu stochastique fini Γ avec espace d'états $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, des ensembles d'actions réduits à un élément chacun (jeu à 0 joueur), un paiement $g(\omega_i) = i$ et une transition déterministe $\rho(\omega_i|\omega_i) = 0$. Il est clair que dans un tel jeu v_n et v_λ convergent vers le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

L'opérateur de Shapley de ce jeu est donné par

$$\Psi \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 + 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que les ensembles donnés par l'approche en termes d'opérateurs sont :

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ \binom{c}{c}, c \geq 1 \right\}$$

et

$$\mathcal{L}^- = \left\{ \binom{c}{c}, c \leq 0 \right\}.$$

et l'intersection $\overline{\mathcal{L}^+} \cap \overline{\mathcal{L}^-}$ est vide : l'approche initiale en termes d'opérateur ne permet donc pas de conclure. On peut cependant remarquer que si on considère le jeu Γ_2 par blocs de deux étapes, celui a pour opérateur de Shapley

$$\Psi^2 \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 + 1 \\ c_1 + 1 \end{pmatrix}$$

et les ensembles donnés par l'approche en termes d'opérateurs sont :

$$\mathcal{L}_2^+ = \left\{ \binom{c}{c}, c \geq 1 \right\}$$

et

$$\mathcal{L}_2^- = \left\{ \binom{c}{c}, c \leq 1 \right\}.$$

On applique le corollaire 4.3.3 à cet opérateur Ψ^2 , ce qui établit que dans le jeu par blocs de deux étapes les valeurs des jeux finiment répétés ou escomptés convergent vers le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ceci entraîne immédiatement que dans le jeu Γ initial les valeurs v_n et v_λ convergent vers le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il semble donc naturel de généraliser l'approche opératorielle en une approche opératorielle itérée où l'on étudie non seulement les ensembles \mathcal{L}^+ et \mathcal{L}^- associés à un opérateur Ψ , mais également les ensembles \mathcal{L}_m^+ et \mathcal{L}_m^- associés aux opérateurs itérés Ψ^m . Ceci était déjà suggéré dans l'appendice de [64], et est l'objet de l'article présenté dans le chapitre 5 de ce manuscrit.

4.5.2 Un exemple

Le but de cette section est de montrer que la limite des valeurs d'un jeu ne dépend pas uniquement de la donnée de l'opérateur de récession $\Phi(0, \cdot)$ et de l'opérateur dérivé φ . Nous allons établir qu'il existe deux jeux, chacun à deux états et deux actions, d'opérateurs de Shapley Ψ_1 et Ψ_2 , tels que pour tout x on a $\Phi_1(\lambda, x) = \Phi_2(\lambda, x)$ dès que $\lambda < \lambda_0(x)$, et ayant des valeurs uniformes distinctes. Ceci implique que les résultats de la section 4.3, qui ne prennent en compte que le comportement de Φ pour λ petit, ne peuvent s'appliquer à ces jeux.

On considère la famille de jeux stochastiques Γ_c , paramétrée par $c \in]2, 10[$: on a deux états ω_1 et ω_2 et deux actions P (Part) et R (Reste) pour chaque joueur. Les paiements dans les deux états en fonctions des actions sont donnés par les tableaux suivants :

	P	R
P	-6	10
R	-2	10

dans l'état 1 et

	P	R
P	c	2
R	-10	-10

dans l'état 2.

Les transitions sont données comme suit : si les deux joueurs jouent P , alors l'état change, sinon il reste le même.

Soit Ψ_c l'opérateur de Shapley de Γ_c . Montrons la proposition

Proposition 4.5.1 $\Phi_c(0, \cdot)$ et φ_c ne dépendent pas de c .

Démonstration. Il est clair que $\Phi_c(0, x) = x$ pour tout x dans \mathbb{R}^2 puisque chaque joueur peut forcer l'état à rester le même en jouant R .

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; on calcule que

$$\begin{aligned} \Phi_c(\alpha, x)(\omega_1) &= \text{Val} \begin{pmatrix} -6\alpha + (1-\alpha)x_2 & 10\alpha + (1-\alpha)x_1 \\ -2\alpha + (1-\alpha)x_1 & 10\alpha + (1-\alpha)x_1 \end{pmatrix} \\ \Phi_c(\alpha, x)(\omega_2) &= \text{Val} \begin{pmatrix} -c\alpha + (1-\alpha)x_1 & 2\alpha + (1-\alpha)x_2 \\ -10\alpha + (1-\alpha)x_2 & -10\alpha + (1-\alpha)x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on en déduit que

- a) Si $x_1 \geq x_2$, alors pour tout $\alpha > 0$, $\Phi_c(\alpha, x) = \begin{pmatrix} -2\alpha + (1-\alpha)x_1 \\ 2\alpha + (1-\alpha)x_2 \end{pmatrix}$.
- b) Si $x_1 < x_2$ alors $\Phi_c(\alpha, x) = \begin{pmatrix} 10\alpha + (1-\alpha)x_1 \\ -10\alpha + (1-\alpha)x_2 \end{pmatrix}$ pour tout $\alpha < \frac{x_2 - x_1}{20 + x_2 - x_1}$.

Donc pour tout x il existe $\alpha_0(x)$ tel que $\Phi_c(\alpha, x)$ ne dépend pas de c dès que $\alpha \leq \alpha_0(x)$. Ceci entraîne que φ_c ne dépend pas de c . ■

D'autre part on montre que

Proposition 4.5.2 Dans le jeu Γ_c , on a $\lim v_n = \lim v_\lambda = (\frac{c-6}{2}; \frac{c-6}{2})$

Démonstration. On va établir que $(\frac{c-6}{2}; \frac{c-6}{2})$ est la valeur uniforme du jeu en démontrant que pour chaque joueur, jouer P à chaque étape est une stratégie ε -optimale dans tout jeu assez long.

En effet, si le joueur 1 joue toujours P , ses gains d'étapes sont contenus dans l'ensemble $\{2, 10, -6, c\}$. De plus les paiements c et -6 ne sont obtenus que lorsque l'état change, il y a donc au plus un écart de 1 entre le nombre d'étapes où le gain est -6 et le nombre d'étapes où le gain est c . On a par hypothèse $c < 10$ donc $\frac{c-6}{2} < 2$, cette stratégie assure donc au joueur 1 le paiement $\frac{n-1}{n} \frac{c-6}{2} - \frac{6}{n}$ dans le jeu en n étapes. Un argument symétrique

montre que le joueur 2 peut garantir un paiement inférieur à $\frac{n-1}{n} \frac{c-6}{2} + \frac{c}{n}$ dans le jeu en n étapes, ce qui permet de conclure que $(\frac{c-6}{2}; \frac{c-6}{2})$ est la valeur uniforme du jeu. ■

Pour comprendre ce qui se passe, nous allons étudier plus en détail les opérateurs Ψ_c en fonction de c .

Le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\Phi_c(\lambda, x)$ ne dépend pas de c pour λ petit peut se réécrire en terme de Ψ_c : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ la quantité $\Psi_c(Lx)$ ne dépend pas de c lorsque le réel L est suffisamment grand.

Considérons par exemple le cas de $c = 4$ et $c = 8$ (voir figure 4.1). On vérifie que

$$\begin{aligned} \Psi_4(x)(\omega_2) &= \text{Val} \begin{pmatrix} 4 + x_1 & 2 + x_2 \\ -10 + x_2 & -10 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 2 + x_2 & \text{si } x_2 - x_1 \leq 2 \\ 4 + x_1 & \text{si } 2 \leq x_2 - x_1 \leq 14 \\ -10 + x_2 & \text{si } x_2 - x_1 \geq 14 \end{cases} \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \Psi_8(x)(\omega_2) &= \text{Val} \begin{pmatrix} 8 + x_1 & 2 + x_2 \\ -10 + x_2 & -10 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 2 + x_2 & \text{si } x_2 - x_1 \leq 6 \\ 8 + x_1 & \text{si } 6 \leq x_2 - x_1 \leq 18 \\ -10 + x_2 & \text{si } x_2 - x_1 \geq 18 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $\Psi_c(x)(\omega_1)$ ne dépend pas de c , on en déduit que $\Psi_4(x) = \Psi_8(x)$ dès que x est en dehors de la bande $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x_2 - x_1 \leq 18\}$. Cette bande ne contenant aucune demi droite passant par 0, on retrouve donc bien le fait que pour tout x dans \mathbb{R}^2 l'identité

$$\Psi_4(Lx) = \Psi_8(Lx)$$

est vérifiée pour tout réel L assez grand. Considérons maintenant les quantités $V_n = \Psi_4^n(0)$ et $V'_n = \Psi_8^n(0)$. On a $V_0 = V'_0$ et $V_1 = V'_1$, mais à partir de $n = 2$ ces valeurs restent dans la bande \mathcal{B} et peuvent donc suivre des trajectoires différentes, ce qui explique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n} = -1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V'_n}{n} = 1$.

Il est intéressant de noter que la bande \mathcal{B} contient des droites ne passant pas par 0, on a par exemple

$$\Psi_4 \left(L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \neq \Psi_8 \left(L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$$

pour tout $L \in \mathbb{R}$.

On peut également remarquer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(\Psi_4)^2 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 4 \\ a + 2 \end{pmatrix}$$

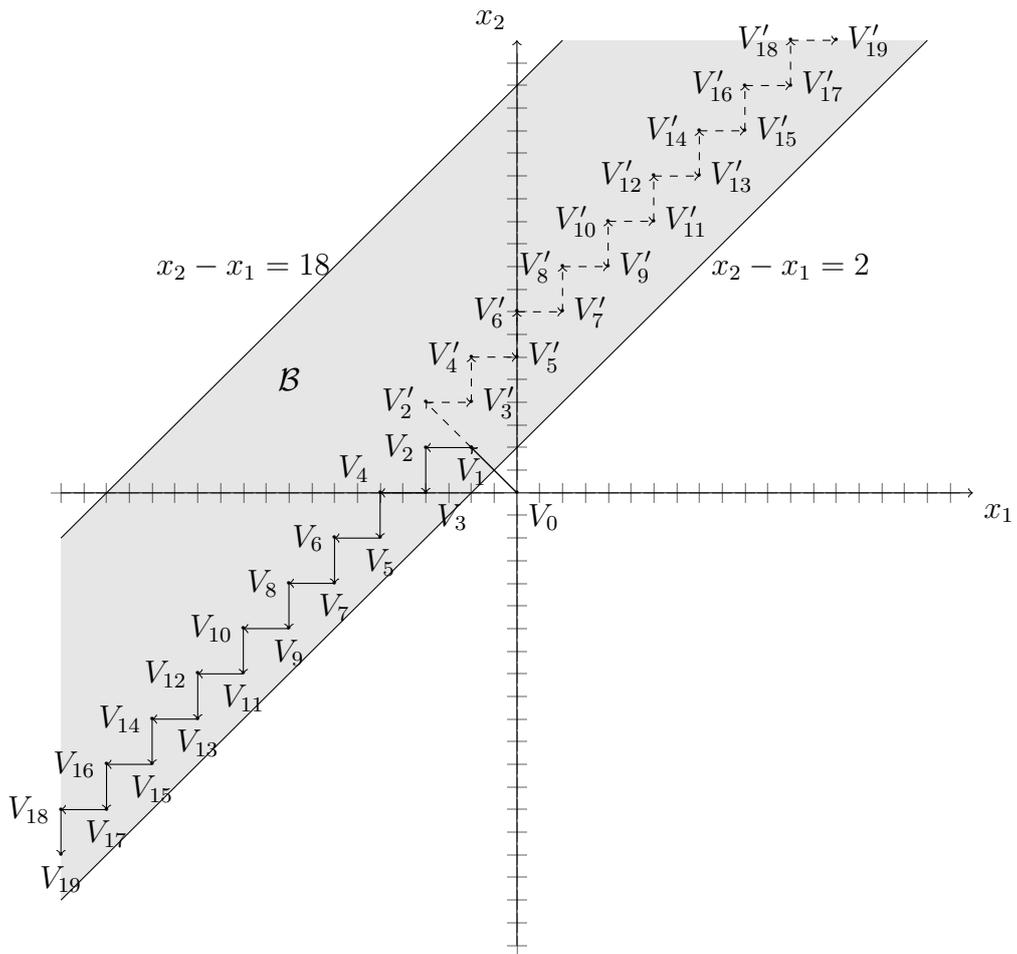


FIG. 4.1 – Trajectoires de V_n et V'_n

tandis que

$$(\Psi_8)^2 \binom{a}{a} = \binom{a-4}{a+4}$$

et pour $x = \binom{1}{1}$ les opérateurs itérés ne vérifient donc pas

$$(\Psi_4)^2(Lx) = (\Psi_8)^2(Lx)$$

pour tout L assez grand.

Remarque 4.5.3 *Cela soulève les deux questions suivantes :*

- a) *Soient 2 opérateurs de Shapley Ψ et Ψ' de \mathcal{F} dans lui même. On suppose que pour tout x et k dans \mathcal{F} , l'égalité*

$$\Psi(Lx + k) = \Psi'(Lx + k)$$

est satisfaite dès que L est assez grand. Est-il possible que les valeurs v_n et v'_n convergent vers des limites distinctes ?

- b) *Soient 2 opérateurs de Shapley Ψ et Ψ' de \mathcal{F} dans lui même. On suppose que pour tout x dans $\widehat{\mathcal{F}}$ et m dans \mathbb{N}^* , l'égalité*

$$\Psi^m(Lx) = \Psi'^m(Lx)$$

est satisfaite dès que L est assez grand. Est-il possible que les valeurs v_n et v'_n convergent vers des limites distinctes ?

Chapitre 5

Itérés d'opérateurs MHa

Ce chapitre est constitué de l'article "Values of stochastic games and iterated monotonic nonexpansive operators" ainsi que de compléments.

Values of stochastic games and iterated monotonic nonexpansive operators

Abstract

We consider an operator Ψ defined on a set of real valued functions and satisfying two properties of monotonicity and additive homogeneity. This is motivated by the case of zero sum stochastic games, for which the Shapley operator is monotone and additively homogeneous. We study the asymptotic of the trajectories defined by $v_n = \frac{\Psi^n(0)}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty$) and $v_\lambda = \lambda \Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda\right)$ ($\lambda \in (0, 1], \lambda \rightarrow 0$). Examining the iterates of Ψ , we exhibit analytical conditions on the operator that imply that v_n and v_λ have at most one accumulation point for the uniform norm. In particular this establishes the uniform convergence of v_n and v_λ to the same limit for a large subclass of the class of games where only one player control the transitions. We also study the general case of two players controlling the transitions, giving a sufficient condition for convergence.

5.1 Introduction

An important topic in the theory of two-player zero-sum repeated games is the asymptotic behavior of the values of finitely repeated (resp. discounted) games when the number of stage becomes large (resp. when the discount factor tends to 0). Three main questions in this framework are: existence of the limits, their equality, and their identification. Positive results have been obtained for different class of games, for example absorbing games [22], recursive games [15], games with incomplete information [3, 30], finite stochastic games [5, 6], and Markov chain games [47] but the original proofs in each case are specific.

In this paper we follow the operator approach based of the recursive structure of repeated games. This was used in [53] and [64] to give new proofs in the case of both absorbing games and games with incomplete information. The idea is to split the problem in two parts: on the first hand, one can derive from some characteristics of a repeated zero-sum game (*e.g.* number of states, topology of the sets of action, nature of the transition function) analytical properties of its Shapley operator. On the other hand, the asymptotic behavior of some trajectories defined by such an operator can be inferred by these analytical properties. Following an idea evoked in the appendix of [64], we extend methods of [53] to study iterates of Shapley operators.

Section 2 is devoted to the first definitions and results.

In section 3 we consider two class of stochastic games: the case where one player controls the transition; as well as the case of a bounded payoff function. We prove that the Shapley operator of a game in which one player controls the transition (resp. in which the payoff is bounded) satisfy a convexity inequality (resp. a Lipschitz condition). In the finite dimensional case, there are inverse properties: an operator satisfying this convex inequality (resp. this Lipschitz condition) is the Shapley operator of a game in which one player controls the transition (resp. in which the payoff is bounded).

In section 4 we establish that some properties of Shapley operators induce the same properties on their iterates.

In section 5 we use this to prove the convergence of v_n and v_λ for some particular operators, hence for some classes of games. We establish that for any game where only one player control the transitions, both family v_n and v_λ have at most one accumulation point for the uniform norm. In particular when the state space is precompact and when the v_n and v_λ are uniformly equicontinuous there is convergence of both families to the same limit.

Section 6 is an appendix consisting of technical results.

5.2 Definitions

5.2.1 MHa Operators

Given a set Ω , define \mathcal{F}_0 as the set of bounded real functions on Ω endowed with the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$, and with the usual partial order: $f_1 \leq f_2$ if and only if $f(\omega) \leq g(\omega)$ for all ω in Ω .

From now on \mathcal{F} is a closed (hence complete) convex cone in \mathcal{F}_0 containing the constants. A mapping Ψ from \mathcal{F} to itself is a MHa (Monotone Homogeneous additively) operator if it satisfies both property:

$$(M) \quad \text{Monotonicity :} \quad f \leq g \implies \Psi(f) \leq \Psi(g)$$

$$(Ha) \quad \text{Homogeneous additivity} \quad \Psi(f + c) = \Psi(f) + c \text{ for } c \in \mathbb{R}$$

It is immediate to check that any MHa operator satisfies the following additional property:

$$(Ne) \quad \text{Nonexpansiveness} \quad \|\Psi(x) - \Psi(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty \quad \forall (x, y) \in X^2$$

We consider, for $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in]0, 1]$, the following iterates and fixed points:

$$V_n = \Psi(V_{n-1}) = \Psi^n(0) \tag{5.2.1}$$

$$V_\lambda = \Psi((1 - \lambda)V_\lambda) \tag{5.2.2}$$

Notice that V_λ is well-defined since the nonexpansiveness of Ψ implies that $\Psi((1 - \lambda)\cdot)$ is strictly contracting on the complete set \mathcal{F} , hence has a unique fixed point

Example 5.2.1 For any $c \in \mathbb{R}$, the mapping J from \mathbb{R} to itself defined by $J(x) = x + c$ is nonexpansive. In that case, $V_n = nc$ and $V_\lambda = \frac{c}{\lambda}$.

These quantities being unbounded in general (see previous example), we also introduce their normalized versions

$$v_n = \frac{V_n}{n} \quad (5.2.3)$$

$$v_\lambda = \lambda V_\lambda \quad (5.2.4)$$

In the previous example, one gets $v_n = v_\lambda = c$ for all n and λ . In general it is easy to prove that these normalized quantities are bounded:

Lemma 5.2.2 For any nonexpansive operator Ψ , sequences v_n and v_λ are bounded by $\|\Psi(0)\|$.

Proof. Since Ψ is non expansive,

$$\|V_n - V_{n-1}\| = \|\Psi(V_{n-1}) - \Psi(V_{n-2})\| \leq \|V_{n-1} - V_{n-2}\|.$$

By induction this implies that

$$\|V_n\| \leq n\|V_1\| = n\|\Psi(0)\|.$$

On the other hand, again using the fact that Ψ is nonexpansive,

$$\begin{aligned} \|V_\lambda\| - \|\Psi(0)\| &\leq \|V_\lambda - \Psi(0)\| \\ &= \|\Psi((1-\lambda)V_\lambda) - \Psi(0)\| \\ &\leq (1-\lambda)\|V_\lambda\| \end{aligned}$$

and so

$$\|v_\lambda\| = \lambda\|V_\lambda\| \leq \|\Psi(0)\|.$$

■

A consequence is that the family v_n is of slow variation:

Lemma 5.2.3 If Ψ satisfies (Ne), then $\|v_{n+1} - v_n\| = O(1/n)$

Proof.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Psi^{n+1}(0)}{n+1} - \frac{\Psi^n(0)}{n} \right\|_\infty &\leq \frac{\|\Psi^{n+1}(0)\|_\infty}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \|\Psi^{n+1}(0) - \Psi^n(0)\|_\infty \\ &\leq \frac{2}{n} \|\Psi(0)\|_\infty \end{aligned}$$

■

To point out the link between the families $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and $\{v_\lambda\}_{\lambda \in]0,1]}$ it is also of interest to introduce the family of strictly contracting operators $\Phi(\alpha, \cdot)$, $\alpha \in]0, 1]$, defined by

$$\Phi(\alpha, x) = \alpha \Psi \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} x \right). \quad (5.2.5)$$

Then v_n and v_λ satisfy the relations

$$v_n = \Phi \left(\frac{1}{n}, v_{n-1} \right); \quad v_0 = 0 \quad (5.2.6)$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda) \quad (5.2.7)$$

5.2.2 Shapley operators

A typical example of such an operator is obtained in the framework of zero-sum two player stochastic games [55]: Ω is a metric space of states, A and B are compact metric action sets for player 1 and 2 respectively, g is the continuous payoff from $A \times B \times \Omega$ to \mathbb{R} , and ρ is the continuous transition probability from $A \times B \times \Omega$ to $\Delta_f(\Omega)$, the set of probabilities on Ω with finite support. Denote by \mathcal{F} the set of continuous bounded real functions on Ω . We suppose in addition that for each $f \in \mathcal{F}$ and each $b \in B$ (resp. and each $a \in A$), $\int_{\Omega} f(\cdot) d\rho(\cdot|a, b, \omega)$ is jointly continuous on $A \times \Omega$ (resp. on $B \times \Omega$).

The game is played as follow: an initial stage $\omega_1 \in \Omega$ is given, known by each player. At each stage m , knowing past history and current state ω_m , player 1 (resp. player 2) chooses $\sigma \in \Delta(A)$ (resp. $\tau \in \Delta(B)$). A move a_m of player 1 (resp. b_m of player 2) is drawn accordingly to σ (resp. τ). The payoff g_m at stage m is then $g(a_m, b_m, \omega_m)$ and ω_{m+1} , the state at stage $m+1$, is drawn accordingly to $\rho(a_m, b_m, \omega_m)$.

There are several ways of evaluating a payoff for a given infinite history:

- a) $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g_m$ is the payoff of the n -stage game
- b) $\lambda \sum_{m=1}^{+\infty} (1 - \lambda)^{m-1} g_m$ is the payoff of the λ -discounted game.

For a given initial state ω , we denote the values of those games by $v_n(\omega)$ and $v_\lambda(\omega)$ respectively; v_n and v_λ are thus functions from Ω into \mathbb{R} .

The Shapley operator Ψ of this stochastic game is the mapping from \mathcal{F} to itself defined by, for each $f \in \mathcal{F}$ and $\omega \in \Omega$,

$$\Psi(f)(\omega) = \sup_{\sigma \in \Delta(A)} \inf_{\tau \in \Delta(B)} \left\{ g(\sigma, \tau, \omega) + \int_{\Omega} f(\omega') d\rho(\omega'|\sigma, \tau, \omega) \right\} \quad (5.2.8)$$

$$= \inf_{\tau \in \Delta(B)} \sup_{\sigma \in \Delta(A)} \left\{ g(\sigma, \tau, \omega) + \int_{\Omega} f(\omega') d\rho(\omega'|\sigma, \tau, \omega) \right\} \quad (5.2.9)$$

where we still denote by g and ρ the multilinear extensions from $A \times B$ to $\Delta(A) \times \Delta(B)$ of the corresponding function.

Such a Shapley operator is a MHA operator, and the value v_n of the n -stage game (resp. the value v_λ of the λ -discounted game) satisfy relation (5.2.6) (resp. (5.2.7)), see [59] for example.

This recursive structure holds in a wide class of games [34]; more generally we will thus say that an operator from \mathcal{F} to itself is a Shapley operator if there are two sets X and Y , and two functions $g : X \times Y \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and $\rho : X \times Y \times \Omega \rightarrow \Delta_f \Omega$ such that for any $f \in \mathcal{F}$ and $\omega \in \Omega$,

$$\Psi(f)(\omega) = \sup_{\sigma \in X} \inf_{\tau \in Y} \left\{ g(\sigma, \tau, \omega) + \int_{\Omega} f(\omega') d\rho(\omega'|\sigma, \tau, \omega) \right\} \quad (5.2.10)$$

$$= \inf_{\tau \in Y} \sup_{\sigma \in X} \left\{ g(\sigma, \tau, \omega) + \int_{\Omega} f(\omega') d\rho(\omega'|\sigma, \tau, \omega) \right\}. \quad (5.2.11)$$

Notice that any such operator is MHa.

The asymptotic behavior of v_n (resp. v_λ) as n tends to $+\infty$ (resp. as λ tends to 0) is a major topic in game theory: one study properties of a stochastic game through a family of games with expected duration converging to infinity. This approach is also called the compact case since we can interpret v_n and v_λ as values of some time-discretizations of a game played in continuous time between time 0 and 1 [59]. In that framework letting n go to infinity or λ to 0 gives a finer and finer discretization of the continuous interval $[0, 1]$, hence it is natural to expect convergence of those values.

5.2.3 Finite dimension

When Ω is finite with cardinal k , we identify it to $\{1, \dots, k\}$ and \mathcal{F} to \mathbb{R}^k . To simplify the notations in that case, we will write Δ_k instead of $\Delta_f(\Omega)$, and we will write the state as an index in Ψ , g and ρ . For example formula (5.2.8) will be written as

$$\Psi_i(x) = \sup_{\sigma \in \Delta(A)} \inf_{\tau \in \Delta(B)} \{g_i(\sigma, \tau) + \langle \rho_i(\sigma, \tau), x \rangle\} \quad (5.2.12)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the usual scalar product.

In that finite dimensional case MHa operators are known as topical operators and have been widely studied [16, 17, 20]. In particular it is known that properties (M) and (Ha) provide a characterization of Shapley operators [25]:

Proposition 5.2.4 *An operator Ψ from \mathbb{R}^k to itself is the Shapley Operator of a k -states stochastic game if and only if it is a MHa operator.*

Even in that finite dimensional case, there are examples of nonexpansive operators [24] or MHa operators [20] such that neither v_n nor v_λ does converge.

5.3 Axiomatic Approach

The aim of this part is to link the characteristics of a game to some properties of its Shapley operator.

5.3.1 Property satisfied by Player 1-controlled games

Definition 5.3.1 *A stochastic game is Player 1-controlled if the first player controls the transitions, that is if the transition function ρ does not depend on the action $v \in V$ of the second player.*

We will characterize Player 1-controlled games by introducing a new property of operators:

Definition 5.3.2 *An operator Ψ from \mathcal{F} to itself satisfies property (C) if for every ω in Ω the function $\Psi(\cdot)(\omega)$ is a convex mapping from \mathcal{F} to \mathbb{R} : for any f_1, f_2 in \mathcal{F} and $t \in [0, 1]$,*

$$\Psi(tf_1 + (1-t)f_2) \leq t\Psi(f_1) + (1-t)\Psi(f_2)$$

A MHaC operator is an operator satisfying properties (M) (Ha) and (C) ; we prove the following Proposition:

Proposition 5.3.3 *Any Shapley operator of a Player 1-controlled game is MHaC.*

Proof. Since Ψ is a Shapley operator, we already know that it is MHa. Since the first player controls the transitions, then for every $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \Psi(tx + (1-t)y) &= \sup_{u \in \Delta(A)} \inf_{v \in \Delta(B)} \{g(u, v, \omega) + E_{\rho(u, \omega)}(tx + (1-t)y)\} \\ &= \sup_{u \in \Delta(A)} \left\{ t \left[\inf_{v \in \Delta(B)} \{g(u, v, \omega)\} + E_{\rho(u, \omega)}x \right] \right. \\ &\quad \left. + (1-t) \left[\inf_{v \in \Delta(B)} \{g(u, v, \omega)\} + E_{\rho(u, \omega)}y \right] \right\} \\ &\leq t \sup_{u \in \Delta(A)} \inf_{v \in \Delta(B)} \{g(u, v, \omega) + E_{\rho(u, \omega)}x\} \\ &\quad + (1-t) \sup_{u \in \Delta(A)} \inf_{v \in \Delta(B)} \{g(u, v, \omega) + E_{\rho(u, \omega)}y\} \\ &= t\Psi(x) + (1-t)\Psi(y) \end{aligned}$$

■

When Ω is finite the reverse holds:

Proposition 5.3.4 *An operator Ψ from \mathbb{R}^k to itself is the Shapley operator of a player 1-controlled game iff it is MHaC.*

Proof. Let Ψ be a MHaC operator from \mathbb{R}^k to itself, and let Ψ_i be the i -th coordinate of Ψ . Let $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$ be the set on which every Ψ_i is differentiable and let $\mathcal{P}_i = \{\nabla \Psi_i(x), x \in \mathcal{D}\}$. Since any MHa operator is nonexpansive, Rademacher's theorem implies that $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^k$.

For any $f \in \mathcal{D}$, monotonicity of Ψ implies that

$$\Psi_i(f + te_j) \geq \Psi_i(f)$$

for all $1 \leq i, j \leq k$ and $t > 0$, hence that $\frac{\partial \Psi_i}{\partial j}(f) \geq 0$. Homogeneous additivity implies that for any $c \in \mathbb{R}$,

$$\Psi_i(f + c) = \Psi_i(f) + c$$

hence that $\sum_{j=1}^k \frac{\partial \Psi_i}{\partial j}(f) = 1$, which prove that $\mathcal{P}_i \subset \Delta_k$ for every i .

Moreover, Property (C) implies that for any i ,

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathcal{D}, \quad \langle \nabla \Psi_i(y), x - y \rangle \leq \Psi_i(x) - \Psi_i(y). \quad (5.3.1)$$

For any $y \in \mathcal{D}$ let $g_i(y) = \Psi_i(y) - \langle \nabla \Psi_i(y), y \rangle$. Let us prove that

$$\Psi_i(x) = \sup_{y \in \mathcal{D}} \{g_i(y) + \langle \nabla \Psi_i(y), x \rangle\}. \quad (5.3.2)$$

Notice first that inequality (5.3.1) is

$$\Psi_i(x) \geq \sup_{y \in \mathcal{D}} \{g_i(y) + \langle \nabla \Psi_i(y), x \rangle\}.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathcal{D}} \{\Psi_i(y) + \langle \nabla \Psi_i(y), x - y \rangle\} &= \Psi_i(x) + \sup_{y \in \mathcal{D}} \{\Psi_i(y) - \Psi_i(x) + \langle \nabla \Psi_i(y), x - y \rangle\} \\ &\geq \Psi_i(x) + \sup_{y \in \mathcal{D}} \{-2\|y - x\|_\infty\} \end{aligned}$$

because Ψ is nonexpansive and $\Psi_i(y) \in \Delta_k$. Since $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^k$ this proves (5.3.2).

Equation (5.3.2) establish that Ψ is the Shapley operator of a Player 1-controlled game where the action set of the first player is \mathcal{D} , payoff is g , and transitions are given by $\rho_i(y) = \nabla \Psi_i(y)$. \blacksquare

5.3.2 Property satisfied by games with a bounded payoff

Let us introduce a new property of operators:

$$(L) \quad \text{Lipschitz} \quad \exists K > 0, \forall x \in \mathcal{F}, \forall t, t' > 0, \left\| t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - t'\Psi\left(\frac{x}{t'}\right) \right\|_\infty \leq K|t - t'|$$

An operator is MHaL if it satisfies properties (M) (Ha) and (L) ; we show that assumption (L) characterizes Shapley operators of games with bounded payoff:

Lemma 5.3.5 *If Ψ is the Shapley operator of a game with bounded payoff, then Ψ is MHaL.*

Proof. It is enough to prove that if Ψ is a Shapley Operator it satisfies (L), which is a consequence of the fact that Val is nonexpansive for the supremum norm: if g_1 and g_2 are two functions from $A \times B$ to \mathbb{R} then

$$\left| \text{Val}_{(\sigma, \tau) \in A \times B} \{g_1(\sigma, \tau)\} - \text{Val}_{(\sigma, \tau) \in A \times B} \{g_2(\sigma, \tau)\} \right| \leq \sup_{(\sigma, \tau) \in A \times B} |g_1(\sigma, \tau) - g_2(\sigma, \tau)|.$$

For any ω , applying this inequality to $g_1(\sigma, \tau) = tg(\sigma, \tau, \omega) + E_{p(\sigma, \tau, \omega)}x$ and $g_2(\sigma, \tau) = t'g(\sigma, \tau, \omega) + E_{p(\sigma, \tau, \omega)}x$ gives:

$$\left| t\Psi\left(\frac{x}{t}\right)(\omega) - t'\Psi\left(\frac{x}{t'}\right)(\omega) \right| \leq \sup_{\Delta(A) \times \Delta(B)} |g(\sigma, \tau, \omega)| \cdot |t - t'|$$

By hypothesis there is a $K > 0$ such that $|g(a, b, \omega)| \leq K$ for all $(a, b, \omega) \in U \times V \times \Omega$, so Ψ satisfies (L). \blacksquare

We now prove a weak version of the reverse of Lemma 5.3.5. First define:

Definition 5.3.6 A stochastic game with a Shapley operator Ψ defined in (5.2.10) has a weakly bounded payoff if there exists $K > 0$ such that for every $\varepsilon > 0$, $\omega \in \Omega$ and $f \in \mathcal{F}$, there exists an action $u_\varepsilon \in X$ (resp. $v_\varepsilon \in Y$) of Player 1 (resp. Player 2) which is ε -optimal in $\Psi(f)(\omega)$, and such that $|g(u_\varepsilon, v_\varepsilon, \omega)| \leq K$.

In other terms, in a game with weakly bounded payoff there is a uniform bound K , such that for any state and for any evaluation of the future, there are almost optimal actions for each player which yields an expected payoff bounded by K .

With this new definition we can prove:

Proposition 5.3.7 If Ψ is MHaL from \mathbb{R}^k to itself, then Ψ is the Shapley operator of a game with weakly bounded payoff.

We first prove a preliminary result. As in the proof of Proposition 5.3.4 define $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$ as the set on which every Ψ_i is differentiable. Then

Lemma 5.3.8 If $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ is MHaL for a constant K and if $x \in \mathcal{D}$, then for any i :

$$\|\Psi_i(x) - \langle \nabla \Psi_i(x), x \rangle\| \leq K$$

Proof. For any x and i , $t \rightarrow t\Psi_i\left(\frac{x}{t}\right)$ is K -Lipschitz. If $x \in \mathcal{D}$, this function is differentiable at $t = 1$ and

$$\left| \left(t\Psi_i\left(\frac{x}{t}\right) \right)'_{t=1} \right| \leq K$$

which implies the result. ■

We now prove Proposition 5.3.7:

Proof of Proposition 5.3.7. Suppose Ψ MHaL for a constant K and let $1 \leq i \leq k$. For every a and b in \mathcal{D} define $\Pi_i(a, b) = \int_0^1 \nabla \Psi_i(ta + (1-t)b)dt$. Ψ_i being differentiable almost everywhere on any segment (because of the nonexpansiveness of Ψ), it implies that Π_i is well defined as soon as $a \neq b$, and also when $a = b$ since we supposed that $u \in \mathcal{D}$.

Define $g_i(a, b) = \Psi_i(a) - \langle \Pi_i(a, b), a \rangle$.

We prove that for any $x \in \mathbb{R}^k$

$$\Psi_i(x) = \text{Val}_{a \in \mathcal{D}, b \in \mathcal{D}} \{g_i(a, b) + \langle \Pi_i(a, b), x \rangle\}$$

and that (a, a) is a couple of ε -optimal strategies as soon as $a \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon/2)$.

Let $a \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon/2)$ and $b \in \mathcal{D}$. We have

$$g_i(a, b) + \langle \Pi_i(a, b), x \rangle = \Psi_i(a) + \langle \Pi_i(a, b), x - a \rangle \quad (5.3.3)$$

$$= \Psi_i(x) + (\Psi_i(a) - \Psi_i(x)) + \langle \Pi_i(a, b), x - a \rangle \quad (5.3.4)$$

so

$$\Psi_i(x) - \varepsilon \leq g_i(a, b) + \langle \Pi_i(a, b), x \rangle \leq \Psi_i(x) + \varepsilon.$$

On the other hand $\Psi_i(x) - \Psi_i(y) = \left\langle \int_0^1 \nabla \Psi_i(tx + (1-t)y)dt, x - y \right\rangle$, so $g_i(x, y) = g_i(y, x)$, which implies

$$\Psi_i(x) - \varepsilon \leq g_i(a, b) + \langle \Pi_i(a, b), x \rangle \leq \Psi_i(x) + \varepsilon.$$

for any $u \in \mathcal{D}$ as soon as $b \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon/2)$. The couple (a, a) is thus a couple of ε -optimal strategies.

This prove that Ψ is the Shapley operator of a game with weakly bounded payoff since $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^k$ and $|g_i(a, a)| \leq K$ for every $a \in \mathcal{D}$ according to Lemma 5.3.8. ■

Remark 5.3.9 *The interest of property (L) lies in the fact that one doesn't know if there are stochastic games with finite number of states and bounded payoff where the sequence v_n does not converge. By Lemma 5.3.5 and Proposition 5.3.7 this relates heavily to the study of existence of a cycle time for MHaL Operators defined on a finite dimensional space.*

5.3.3 Recession Operator

Let us define a new property of operators: we say that Ψ satisfies property (R) if Ψ has a reccession operator $\mathbf{R}(\Psi)$, that is

$$\exists \mathbf{R}(\Psi) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{F}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - \mathbf{R}(\Psi)(x) \right\|_{\infty} = 0$$

Remark 5.3.10 *Since $\left\| t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - \Phi(t, x) \right\|_{\infty} \leq t\|x\|_{\infty}$, condition (R) is satisfied if and only if for any $x \in \mathcal{F}$, $\Phi(\lambda, x)$ converges as λ goes to 0.*

In particular, the Shapley operator of a game with bounded payoff satisfies condition (R) and

$$\mathbf{R}(\Psi)(\cdot) = \Phi(0, \cdot).$$

Remark 5.3.11 *The reccession operator $\mathbf{R}(\Psi)$ is additively homogeneous: for any $c \in \mathbb{R}$ $\mathbf{R}(\Psi)(x + c) = \mathbf{R}(\Psi)(x) + c$. It is also positively multiplicatively homogeneous : for any $c \in \mathbb{R}^+$ $\mathbf{R}(\Psi)(cx) = c\mathbf{R}(\Psi)(x)$.*

An interest of the Recession operator lies in the following lemma

Lemma 5.3.12 *Let Ψ be a MHAR operator, then any accumulation point for the uniform norm of either $\{v_n\}$ or $\{v_{\lambda}\}$ is a fixed point of the reccession operator $\mathbf{R}(\Psi)$.*

Proof. Recall that

$$\begin{aligned} v_n &= \Phi\left(\frac{1}{n}, v_{n-1}\right) \\ v_{\lambda} &= \Phi(\lambda, v_{\lambda}) \end{aligned}$$

so the result follow immediately from Remark 5.3.10, and Lemma 5.2.3 in the case of v_n . ■

Remark 5.3.13 *The set of fixed point of $\mathbf{R}(\Psi)$ may however be large, for example in the case of games with incomplete information [53].*

To conclude this section, we prove that either (L), or (C) in the finite dimension case, is a sufficient condition for (R) to hold:

Lemma 5.3.14 *If Ψ is MHaC from \mathbb{R}^k to itself, then Ψ satisfies (R).*

Proof. Given $x \in \mathbb{R}^k$, let $f(t) := t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - t\Psi(0)$ be defined from \mathbb{R}^{+*} to \mathbb{R}^k . Since Ψ is nonexpansive, $\|f(t)\|_\infty \leq t\|x/t\|_\infty = \|x\|_\infty$, which implies that f is bounded. Moreover,

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t')\|_\infty &\leq |t - t'| \cdot \|\Psi(0)\|_\infty + |t - t'| \cdot \left\| \Psi\left(\frac{x}{t}\right) \right\|_\infty + t' \cdot \left\| \Psi\left(\frac{x}{t}\right) - \Psi\left(\frac{x}{t'}\right) \right\|_\infty \\ &\leq |t - t'| \cdot \left(\left\| \Psi\left(\frac{x}{t}\right) \right\|_\infty + \|\Psi(0)\|_\infty + \frac{\|x\|_\infty}{t} \right) \end{aligned}$$

so f is continuous. Finally, Ψ satisfies (C), which implies that for $t' < t$:

$$\begin{aligned} f(t) &= t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - t\Psi(0) \\ &= t\Psi\left(\frac{t'}{t} \cdot \frac{x}{t'} + \left(1 - \frac{t'}{t}\right) \cdot 0\right) - t\Psi(0) \\ &\leq t'\Psi\left(\frac{x}{t'}\right) + (t - t')\Psi(0) - t\Psi(0) \\ &= f(t'). \end{aligned}$$

We have established that each coordinate f_i of f is nonincreasing and bounded, it follows that each $f_i(t)$ converges as t goes to 0, which implies that Ψ satisfies (R). ■

Lemma 5.3.15 *Any MHaL Operator satisfies property (R).*

Proof. Suppose that Ψ is MHaL and let $x \in \mathcal{F}$. Let h be the function defined on $]0, 1[$ by $h(t) = t\Psi\left(\frac{x}{t}\right)$. Since Ψ satisfies (L), for any sequence t_n in $]0, 1[$ converging to 0 the corresponding sequence $h(t_n)$ is Cauchy, hence converges. This prove that the function h converges as t goes to 0, which implies that Ψ satisfies (R). ■

The following corollary follows immediately from lemmas 5.3.5 and 5.3.15:

Corollary 5.3.16 *If Ψ is the Shapley operator of a game with bounded pay off, Ψ is MHaR.*

5.4 Iterated Operators

First let us define the lim sup and lim inf of sequences in \mathcal{F}_0 :

Definition 5.4.1 *For any bounded sequence x_n in \mathcal{F}_0 ,*

$$\limsup(x_n)(\omega) = \limsup(x_n(\omega))$$

for every ω .

Notice that

$$x \leq \limsup x_n$$

for any accumulation point x of x_n for the uniform norm, but that the lim sup of a sequence is not necessarily an accumulation point itself for the uniform norm.

The following proposition, proved in [64], gives a sufficient condition for an element of \mathcal{F} to be greater than both $\limsup v_n$ and $\limsup v_\lambda$:

Proposition 5.4.2 *Let $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ be a MHa operator.*

If $x \in \mathcal{F}$ satisfies $\Psi(Lx) \leq (L+1)x$ for every L large enough, then $\limsup v_n \leq x$ and $\limsup v_\lambda \leq x$.

If $x \in \mathcal{F}$ satisfies $\Psi(Lx) \geq (L+1)x$ for every L large enough, then $\limsup v_n \geq x$ and $\limsup v_\lambda \geq x$.

An interesting consequence is a sufficient condition for v_n and v_λ to converge: define

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+ &= \{x \in \mathcal{F}, \Psi(Lx) \leq (L+1)x \text{ for all } L \text{ large enough}\} \\ \mathcal{L}^- &= \{x \in \mathcal{F}, \Psi(Lx) \geq (L+1)x \text{ for all } L \text{ large enough}\}.\end{aligned}$$

Then if the intersection $\overline{\mathcal{L}^+} \cap \overline{\mathcal{L}^-}$ is nonempty, it is a singleton $\{v\}$ and $v = \lim v_n = \lim v_\lambda$.

However, there are examples of simple games where Proposition 5.4.2 does not apply immediately. Consider the following 0-player game (meaning that each set action is reduced to one element): there are two states ω_0 and ω_1 with payoff 0 and 1 respectively, and a deterministic transition from each state to the other :

$$\begin{aligned}g(\omega_0) &= 0 \\ g(\omega_1) &= 1 \\ \rho(\omega_1|\omega_0) &= 1 \\ \rho(\omega_0|\omega_1) &= 1\end{aligned}$$

The Shapley operator of such a game is given by

$$\Psi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+1 \end{pmatrix}$$

and one verifies that

$$\begin{aligned}v_{2n} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ v_{2n+1} &= \begin{pmatrix} \frac{n}{2n+1} \\ \frac{n+1}{2n+1} \end{pmatrix} \\ v_\lambda &= \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda}{2-\lambda} \\ \frac{1}{2-\lambda} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

hence both v_n and v_λ converges to $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In that case one checks that

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+ &= \{(x, x), x \geq 1\} \\ \mathcal{L}^- &= \{(x, x), x \leq 0\}\end{aligned}$$

hence the intersection is empty. However, let us consider the game played by blocks of two stages. Its Shapley operator is given by:

$$\tilde{\Psi} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

and Proposition 5.4.2 immediately imply that in this new game both v_n and v_λ converge to $(1, 1)$, hence that in the initial game both v_n and v_λ converge to $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Given a stochastic game Γ with a Shapley operator Ψ it is thus worthwhile to study the game Γ^m played by blocks of stages of a fixed length m , with payoff at stage l equals to $\sum_{k=1}^m g_{lm+k}$. This leads to a new Shapley operator equals to Ψ^m . Since the payoff function in Γ^m is not bounded as m goes to $+\infty$, it is convenient to also introduce the game Γ_m , with payoff at stage l equals to $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g_{lm+k}$. The Shapley operator of this normalized game is given by $x \rightarrow \frac{1}{m} \Psi^m(mx)$.

This motivates us to define, for a general MHA operator:

Definition 5.4.3 *If Ψ is an MHa operator and $m \in \mathbb{N}^*$, we define operators $\Psi^m(\cdot)$, $\Phi^m(\lambda, \cdot)$, $\Psi_m(\cdot)$ and $\Phi_m(\lambda, \cdot)$ by:*

$$\Psi^m(x) = \Psi(\Psi^{m-1}(x)) \quad (5.4.1)$$

$$\Phi^m(\lambda, x) = \Phi(\lambda, \Phi^{m-1}(\lambda, x)) \quad (5.4.2)$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{m} \Psi^m(mx) \quad (5.4.3)$$

$$\Phi_m(\lambda, x) = \lambda \Psi_m\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right) \quad (5.4.4)$$

$$v_{n,m} = \frac{(\Psi_m)^n(0)}{n} \quad (5.4.5)$$

$\Phi_m(\lambda, \cdot)$ being $1 - \lambda$ contracting, one can also define

$$v_{\lambda,m} = \Phi_m(\lambda, v_{\lambda,m}) \quad (5.4.6)$$

In the two following propositions, we show that if an operator Ψ satisfies some properties, it is also the case for operators Ψ^m and Ψ_m :

Lemma 5.4.4 *If Ψ is MHa, then so does Ψ^m for any $m \in \mathbb{N}$. Moreover,*

- a) *If Ψ is MHaC, so does Ψ^m .*
- b) *If Ψ is MHaR, so does Ψ^m and $\mathbf{R}(\Psi^m) = (\mathbf{R}(\Psi))^m$*
- c) *If Ψ is MHaL for a constant K , so does Ψ^m for the constant mK .*

Proof. If it easy to check that if Ψ is MHa, then Ψ^m is also MHa.

To prove part a) of the lemma, we proceed by induction on m : if we assume that Ψ^m satisfies (C), then for any $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \Psi^{m+1}(tx + (1-t)y) &= \Psi(\Psi^m(tx + (1-t)y)) \\ &\leq \Psi(t\Psi^m(x) + (1-t)\Psi^m(y)) \\ &\leq t\Psi^{m+1}(x) + (1-t)\Psi^{m+1}(y) \end{aligned}$$

For assertion b) we also proceed by induction on m : assume that Ψ^m satisfies (R) and $\mathbf{R}(\Psi^m) = (\mathbf{R}(\Psi))^m$ and fix x in \mathcal{F} . Since Ψ^m satisfies (Ne), it follows that

$$\left\| t\Psi^{m+1}\left(\frac{x}{t}\right) - t\Psi^m\left(\frac{\mathbf{R}(\Psi)(x)}{t}\right) \right\|_\infty \leq \left\| t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - \mathbf{R}(\Psi)(x) \right\|_\infty. \quad (5.4.7)$$

Since Ψ satisfies (R), the righthand member of (5.4.7) goes to 0 as t converges to 0. The induction hypothesis implies that

$$\left\| t\Psi^m \left(\frac{\mathbf{R}(\Psi)(x)}{t} \right) - \mathbf{R}(\Psi)^{m+1}(x) \right\|_{\infty}$$

goes to 0 as well, and so we have established the convergence to 0 of

$$\left\| t\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t} \right) - \mathbf{R}(\Psi)^{m+1}(x) \right\|_{\infty}$$

as required.

For part c) we proceed again by induction: assume the property true for m . Notice that

$$\begin{aligned} t\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t} \right) - t'\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t'} \right) &= \left[t\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t} \right) - t'\Psi^m \left(\frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t'} \right) \right] \\ &+ \left[t'\Psi^m \left(\frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t'} \right) - t'\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t'} \right) \right] \end{aligned}$$

By induction hypothesis,

$$\begin{aligned} \left\| t\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t} \right) - t'\Psi^m \left(\frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t'} \right) \right\|_{\infty} &= \left\| t\Psi^m \left(\frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t} \right) - t'\Psi^m \left(\frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t'} \right) \right\|_{\infty} \\ &\leq mK|t - t'| \end{aligned}$$

On the other hand, Ψ being nonexpansive,

$$\begin{aligned} \left\| t'\Psi^m \left(\frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t'} \right) - t'\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t'} \right) \right\|_{\infty} &\leq t' \left\| \frac{t\Psi \left(\frac{x}{t} \right)}{t'} - \Psi \left(\frac{x}{t'} \right) \right\|_{\infty} \\ &= \left\| t\Psi \left(\frac{x}{t} \right) - t'\Psi \left(\frac{x}{t'} \right) \right\|_{\infty} \\ &\leq K|t - t'| \end{aligned}$$

and we deduce that

$$\left\| t\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t} \right) - t'\Psi^{m+1} \left(\frac{x}{t'} \right) \right\|_{\infty} \leq (m+1)K|t - t'|.$$

■

Proposition 5.4.5 *If Ψ is MHa, then so does Ψ_m for any $m \in \mathbb{N}$. Moreover,*

- a) *If Ψ is MHaC, so does Ψ_m .*
- b) *If Ψ is MHaR, so does Ψ_m .*
- c) *If Ψ is MHaL, so does Ψ_m for the same constant.*

Proof. It follows directly from Lemma 5.4.4 (and for the second assertion, from the observation that any recession operator is multiplicatively homogeneous). ■

The operator Ψ_m is a more natural operator to consider than Ψ^m for several reasons: first notice that property (L) is preserved for the same constant for operator Ψ_m , but not for Ψ^m . Another point is that in the case of a Shapley operator, the payoff of Ψ^m is given by a sum of the payoffs in m stages of the original game, hence Ψ^m gives a weight m to the present and 1 to the future. The operator Ψ_m , which can be seen as a normalized version of Ψ^m , is thus a more adequate description of the game played by blocks of m stages. This is emphasized by two following propositions:

Proposition 5.4.6 *Let Ψ be any MHa operator. Then the equality $v_{n,m} = v_{nm}$ holds for any $m \in \mathbb{N}^*$ and $n \in \mathbb{N}$. In particular, for any $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_{n,m} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Proof. To prove the first part of the proposition, just verify that

$$v_{n,m} = \frac{(\Psi_m)^n(0)}{n} = \frac{1}{m} \frac{\Psi^{mn}(0)}{n} = v_{nm}.$$

In particular, for any m ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_{n,m} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_{nm}.$$

Lemma 5.2.3 implies that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_{nm} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

hence the second part of the proposition. ■

Proposition 5.4.7 *Let Ψ be an MHAL operator. Then for any $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_{\lambda,m} = \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda.$$

The proof of this proposition is technical and postponed to the appendix. The idea is that the operator $\Phi^m(\lambda, \cdot)$ and $\Phi_m(\mu, \cdot)$ are close to each other for $\mu = 1 - (1 - \lambda)^m$.

Take for example the case of a Shapley operator and $m = 2$. Then $\Phi^2(\lambda, \cdot)(\omega_1)$ is the value of the one-shot game with payoff

$$\lambda g(a_1, b_1, \omega_1) + \lambda(1 - \lambda)g(a_2, b_2, \omega_2) + (1 - \lambda)^2 f(a_3, b_3, \omega_3)$$

while $\Phi_2(2\lambda - \lambda^2, \cdot)(\omega_1)$ is the value of the one-shot game with payoff

$$\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) g(a_1, b_1, \omega_1) + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) g(a_2, b_2, \omega_2) + (1 - \lambda)^2 f(a_3, b_3, \omega_3).$$

Remark 5.4.8 *It is unclear whether Proposition 5.4.7 still holds for an operator which does not satisfy condition (L).*

5.5 Convergence of v_n and v_λ - Operator Approach

5.5.1 MHaC operators : the case of v_n

This section study the asymptotics of v_n for MHaC operators. We prove the following proposition:

Proposition 5.5.1 *If Ψ is MHaCR then v_n has at most one accumulation point for the uniform norm.*

which implies the following corollaries:

Corollary 5.5.2 *If Ψ is MHaC from \mathbb{R}^k to itself then v_n converges.*

Proof. Since the space is finite dimensional, any MHaC operator satisfies also condition (R) by Lemma 5.3.14 ; and the bounded sequence v_n has at least one accumulation point. The result thus follows from Proposition 5.5.1. ■

Corollary 5.5.3 *Suppose that a Player 1-controlled zero-sum stochastic game with a Shapley operator Ψ satisfies the two following hypotheses:*

- (i) *its payoff g is bounded*
- (ii) *the set $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact in \mathcal{F} for the uniform topology.*

Then the sequence v_n converges uniformly as n tends to infinity.

Proof. The Shapley operator of such a game is MHaC by Proposition 5.3.3, and since the payoff g is bounded Lemma 5.3.16 implies that it satisfies also (R). So, by Proposition 5.5.1, v_n has at most one accumulation point, towards which it converges since the set $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact. ■

Notice that Corollary 5.5.3 and Ascoli's Theorem imply in particular

Corollary 5.5.4 *Suppose that a Player 1-controlled zero-sum stochastic game with a Shapley operator Ψ satisfies the two following hypotheses:*

- (i) *its payoff g is bounded*
- (ii) *the state space Ω is endowed with a distance d such that (Ω, d) is precompact and such that the sequence v_n is uniformly equicontinuous.*

Then the sequence v_n converges uniformly as n tends to infinity.

Remark 5.5.5 *Classes of games that satisfy the assumptions of Corollary 5.5.4 include repeated games with incomplete information and standard signalling [3], as well as Markov chain games [47] and stochastic games with incomplete information on one side where the informed player controls the transitions [52].*

The remainder of this section is devoted to the proof of Proposition 5.5.1, for which we will need a basic lemma:

Lemma 5.5.6 *If Ψ satisfies (C) et (R), then for every x and y ,*

$$\Psi(x + y) \leq \Psi(x) + \mathbf{R}(\Psi)(y).$$

Proof. Since Ψ satisfies (C), then for any $t \in]0, 1]$,

$$\Psi(y + (1 - t)x) = \Psi\left(t\frac{y}{t} + (1 - t)x\right) \leq t\Psi\left(\frac{y}{t}\right) + (1 - t)\Psi(x)$$

which gives as t tends to 0

$$\Psi(x + y) \leq \Psi(x) + \mathbf{R}(\Psi)(y)$$

since we assumed that Ψ satisfies (R). ■

Remark 5.5.7 *We have thus*

$$\Psi(x + y) - \Psi(x) \leq y$$

as soon as $y = \mathbf{R}(\Psi)(y)$. This gives insight on each coordinate and is stronger than just using the nonexpansive inequality

$$\|\Psi(x + y) - \Psi(x)\|_\infty \leq \|y\|_\infty$$

We now prove Proposition 5.5.1 :

Proof of Proposition 5.5.1. Let Ψ be an operator MHaCR and v an accumulation point of $\{v_n\}$. The aim of this proof is to get the inequality

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq v.$$

Since the reverse inequality is true for any accumulation point v , this will establish that v is the only accumulation point of $\{v_n\}$.

Recall that $v = \mathbf{R}(\Psi)(v)$ by Lemma 5.3.12. Let $\varepsilon > 0$ and m such that $\|v_m - v\|_\infty \leq \varepsilon$. The operator Ψ_m is MHaCR according to Proposition 5.4.5, so for any $L > 0$ one can apply Lemma 5.5.6 to Ψ_m and $x = L(v + \varepsilon)$. This gives:

$$\Psi_m(L(v + \varepsilon)) \leq \mathbf{R}(\Psi_m)(L(v + \varepsilon)) + \Psi_m(0)$$

According to Proposition 5.4.5, $\mathbf{R}(\Psi_m) = (\mathbf{R}(\Psi))^m$. Moreover, Remark 5.3.11 implies that $\mathbf{R}(\Psi)(L(v + \varepsilon)) = L(v + \varepsilon)$. Since $\Psi_m(0) = v_m \leq v + \varepsilon$ we thus deduce that

$$\Psi_m(L(v + \varepsilon)) \leq (L + 1)(v + \varepsilon)$$

Apply Proposition 5.4.2 to Ψ_m and $v + \varepsilon$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_{n,m} \leq (v + \varepsilon)$$

hence, by Proposition 5.4.6,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq v + \varepsilon.$$

This inequality holds for any $\varepsilon > 0$, which implies the result. ■

Remark 5.5.8 *In the case of a finite number of states (Corollary 5.5.2), convergence of v_n can be proved in the same way with an hypothesis slightly weaker than C [17].*

5.5.2 MHaC operators : the case of v_λ

In this section we prove the analogous of Proposition 5.5.1 for the family $\{v_\lambda\}$:

Proposition 5.5.9 *If Ψ is MHaCL then $\{v_\lambda\}$ has at most one accumulation point for the uniform topology.*

This proposition has the following interesting corollary:

Corollary 5.5.10 *Suppose that a Player 1-controlled zero-sum stochastic game with a Shapley operator Ψ satisfies the two following hypotheses:*

- (i) *its payoff g is bounded*
- (ii) *the set $\{v_\lambda, \lambda \in]0, 1[\}$ is relatively compact.*

Then the sequence v_λ converges uniformly as λ tends to 0.

Proof. The Shapley operator of such a game is MHaC by Lemma 5.3.3, and since the payoff g is bounded Lemma 5.3.5 implies that it satisfies also (L). So, by Proposition 5.5.9, v_λ has at most one accumulation point, towards which it converges since the set $\{v_\lambda, \lambda \in]0, 1[\}$ is relatively compact. ■

By Ascoli's Theorem we also have

Corollary 5.5.11 *Suppose that a Player 1-controlled zero-sum stochastic game with a Shapley operator Ψ satisfies the two following hypotheses:*

- (i) *its payoff g is bounded*
- (ii) *the state space Ω is endowed with a distance d such that (Ω, d) is precompact and such that the sequence v_λ is uniformly equicontinuous.*

Then the sequence v_λ converges uniformly as λ tends to 0.

As in the previous section, to prove Proposition 5.5.9 we study iterations of the operator. We use the following consequence of Proposition 5.4.2:

Lemma 5.5.12 *Assume that Ψ is MHaCR, $\mathbf{R}(\Psi)(x) \leq x$, and $\Phi(\lambda_0, x) \leq x$ for some $\lambda_0 > 0$. Then $\limsup v_\lambda \leq x$.*

Proof. According to Proposition 5.4.2, it is enough to show that $\Phi(\lambda, x) \leq x$ for every $\lambda \leq \lambda_0$, and according to Lemma 5.5.6,

$$\Phi(\lambda, x) = \lambda \Psi \left(\left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) x \right) \tag{5.5.1}$$

$$= \lambda \Psi \left(\left(\frac{1}{\lambda_0} - 1 \right) x + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) x \right) \tag{5.5.2}$$

$$\leq \lambda \Psi \left(\left(\frac{1}{\lambda_0} - 1 \right) x \right) + \lambda \mathbf{R}(\Psi) \left(\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) x \right) \tag{5.5.3}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_0} \Phi(\lambda_0, x) + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \mathbf{R}(\Psi)(x) \tag{5.5.4}$$

$$\leq \frac{\lambda}{\lambda_0} x + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) x \tag{5.5.5}$$

$$= x. \tag{5.5.6}$$

■

We can now prove Proposition 5.5.9 :

Proof of Proposition 5.5.9. Let v be an accumulation point of v_λ , which implies $v \leq \limsup v_\lambda$. It is thus enough to prove that v satisfies $\limsup v_\lambda \leq v$.

Fix m in \mathbb{N}^* and $\lambda > 0$, and denote

$$\begin{aligned}\mu &= 1 - (1 - \lambda)^m \\ v' &= v + \frac{(2 - \mu)\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - \mu)}{\mu}\end{aligned}$$

where K is the constant of property (L). We want to apply Lemma 5.5.12 to Ψ_m , $x = v'$ and $\lambda_0 = \mu$; we first verify that the hypotheses of this lemma are satisfied. The operator Ψ_m is MHaCR by Proposition 5.4.5. According to Lemma 5.3.12, $\mathbf{R}(\Psi)(v) = v$ so $\mathbf{R}(\Psi_m)(v) = v$, which implies by additive homogeneity that $\mathbf{R}(\Psi_m)(v') = v'$. It remains to show that $\Phi_m(\mu, v') \leq v'$. First we find an upper bound of $\Phi^m(\lambda, v')$:

$$\begin{aligned}\Phi^m(\lambda, v') &= \Phi^m\left(\lambda, v - \|v - v_\lambda\|_\infty + \frac{2\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - \mu)}{\mu}\right) \\ &\leq \Phi^m\left(\lambda, v_\lambda + \frac{2\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - \mu)}{\mu}\right) \\ &= v_\lambda + (1 - \lambda)^m \frac{2\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - \mu)}{\mu} \\ &\leq v + \|v - v_\lambda\|_\infty + (1 - \mu) \frac{2\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - \mu)}{\mu} \\ &= v' - K(m\lambda - \mu)\end{aligned}$$

According to Corollary 5.6.2, $\Phi_m(\mu, v') \leq \Phi^m(\lambda, v') + K(m\lambda - \mu)$, so we deduce that indeed $\Phi_m(\mu, v') \leq v'$.

We can thus apply Lemma 5.5.12 which implies that

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} v_{\gamma, m} \leq v'$$

and so, according to Lemma 5.4.7, we have established that for every $m \in \mathbb{N}^*$ and $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\limsup_{\gamma \rightarrow 0} v_\gamma &\leq v' \\ &\leq v + \frac{2\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - 1 + (1 - \lambda)^m)}{1 - (1 - \lambda)^m}\end{aligned}\tag{5.5.7}$$

Fix ε and $\lambda > 0$, and choose $m = \lceil \frac{\varepsilon}{\lambda} \rceil$ in (5.5.7). Since $(1 - \lambda)^{\lceil \frac{\varepsilon}{\lambda} \rceil}$ converges to $e^{-\varepsilon}$ as λ tends to 0, we deduce that for λ small enough,

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} v_\gamma \leq v + 2 \frac{\|v - v_\lambda\|_\infty + K(\varepsilon + e^{-\varepsilon} - 1)}{1 - e^{-\varepsilon}}$$

Since v is an accumulation point of the family v_λ , this implies by letting λ go to 0 that

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} v_\gamma \leq v + 2K \frac{\varepsilon + e^{-\varepsilon} - 1}{1 - e^{-\varepsilon}}.\tag{5.5.8}$$

Letting ε tend to 0 in (5.5.8) finally prove

$$\limsup_{\gamma \rightarrow 0} v_\gamma \leq v$$

■

Remark 5.5.13 *The proof of Propositions 5.5.1 also establish that if v_n converges uniformly and Ψ is MHACR, then $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda$.*

Similarly, the proof of Proposition 5.5.9 shows that if v_λ converges uniformly and Ψ is MHACL, then $\lim_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

In the particular framework of dynamic programming, it is already known [27] that uniform convergence of either v_n or v_λ implies uniform convergence of the other to the same limit.

Remark 5.5.14 *In the special case of dynamic programming with a finite number of states, existence of the uniform value was proven in [8] for a finite action space. It was then established for compact action spaces and continuous payoff and transition functions [14, 59], and finally without any assumptions [49]. It was also extended to the case of two player games with an informed controller [48].*

In the framework of dynamic programming with a general state space one can also find an alternative proof of Corollary 5.5.3 in [49], as well as sufficient topological conditions for the existence of the uniform value. For similar results in a continuous-time framework, see [45]

5.5.3 A criterion for 2-player games

Define a new property of operators:

(D) Derivability $\exists \varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{F},$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \left\| \frac{\Phi(\lambda, x) - \mathbf{R}(\Psi)(x)}{\lambda} - \varphi(x) \right\|_\infty = 0.$$

This property of operators is interesting since it is proved in [53] that :

Lemma 5.5.15 *Let Γ be a stochastic game with a finite state space, compact actions spaces and continuous payoff and transition functions. Then its Shapley operator Ψ is MHaDL.*

In the case of MHaDL operators, Lemma 5.4.2 can be reformulated as :

Lemma 5.5.16 *Suppose Ψ MHaDL, and let x be such that $\mathbf{R}(\Psi)(x) \leq x$ and $\varphi(x) \leq 0$. Then $\limsup v_n \leq x$ and $\limsup v_\lambda \leq x$.*

We do not know yet how to use Lemma 5.5.16 to prove that for stochastic games satisfying the hypotheses of 5.5.15, both v_n and v_λ converge to the same limit.

However, let us introduce a new property slightly stronger than (D):

(Du) Uniform derivability $\forall m \in \mathbb{N}, \exists \varphi_m : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{F},$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left\| \frac{\Phi_m(\lambda, x) - \mathbf{R}(\Psi_m)(x)}{\lambda} - \varphi_m(x) \right\|_\infty = 0 \text{ uniformly in } m.$$

Note that we do not assume that the convergence is uniform in x .

We can now use Lemma 5.5.16 to prove:

Proposition 5.5.17 *Assume that Ψ is MHaDuL, then v_λ has at most one accumulation point for the uniform topology. Moreover, if v_λ converges uniformly, then so does v_n to the same limit.*

Proof. Let Ψ be MHaDuL and v an accumulation point of the family v_λ , which satisfies $\mathbf{R}(\Psi)(v) = v$ by Lemma 5.3.12. We prove that 0 is an accumulation point of the family $\varphi_m(v)$. By property (Du) there is a function f from $]0, 1]$ to \mathbb{R}^+ , nondecreasing and converging to 0 as t goes to 0, such that for any m and μ ,

$$\left\| \frac{\Phi_m(\mu, v) - v}{\mu} - \varphi_m(v) \right\|_\infty \leq f(\mu) \quad (5.5.9)$$

On the other hand, contractiveness implies that for any λ ,

$$\|\Phi^m(\lambda, v) - v\|_\infty \leq \|\Phi^m(\lambda, v) - v_\lambda\|_\infty + \|v - v_\lambda\|_\infty \quad (5.5.10)$$

$$= \|\Phi^m(\lambda, v) - \Phi^m(\lambda, v_\lambda)\|_\infty + \|v - v_\lambda\|_\infty \quad (5.5.11)$$

$$\leq (1 - \lambda)^m \|v - v_\lambda\|_\infty + \|v - v_\lambda\|_\infty \quad (5.5.12)$$

$$\leq 2\|v - v_\lambda\|_\infty. \quad (5.5.13)$$

Combining inequalities (5.5.9) and (5.5.13) as well as Corollary 5.6.2 one obtains that for any λ and m ,

$$\|\varphi_m(v)\|_\infty \leq \frac{2\|v - v_\lambda\|_\infty + K(m\lambda - \mu)}{\mu} + f(\mu) \quad (5.5.14)$$

where $\mu = 1 - (1 - \lambda)^m$.

Let $\varepsilon > 0$, and choose $m = \lceil \frac{\varepsilon}{\lambda} \rceil$ in (5.5.14). Since $(1 - \lambda)^{\lceil \frac{\varepsilon}{\lambda} \rceil}$ tends to $e^{-\varepsilon}$ as λ goes to 0, we deduce that for every $\varepsilon > 0$, and every λ small enough,

$$\left\| \varphi_{\lceil \frac{\varepsilon}{\lambda} \rceil}(v) \right\|_\infty \leq \frac{4\|v - v_\lambda\|_\infty + 2K(\varepsilon + e^{-\varepsilon} - 1)}{1 - e^{-\varepsilon}} + f(1 - e^{-\varepsilon}). \quad (5.5.15)$$

Let $\varepsilon' > 0$; since $f(t)$ tends to 0 as t goes to 0 one can choose $\varepsilon > 0$ such that

$$f(1 - e^{-\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon'}{3} \quad (5.5.16)$$

and

$$2K \frac{(\varepsilon + e^{-\varepsilon} - 1)}{1 - e^{-\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon'}{3}. \quad (5.5.17)$$

Such ε being fixed, since v is an accumulation point of the family v_λ one can find $\lambda > 0$ such that

$$\frac{4\|v - v_\lambda\|_\infty}{1 - e^{-\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon'}{3}. \quad (5.5.18)$$

Inequalities (5.5.15) to (5.5.18) thus implies that for any $\varepsilon' > 0$, one can find an m such that $\|\varphi_m(v)\|_\infty \leq \varepsilon'$. Such an m being fixed, denote $v' = v + \varepsilon'$. Since $\mathbf{R}(\Psi)(v') = v'$ and $\varphi_m(v') = \varphi_m(v) - \varepsilon' \leq 0$, according to Lemma 5.5.16, we deduce that

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_{\lambda, m} &\leq v' \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_{n, m} &\leq v'. \end{aligned}$$

According to Lemmas 5.4.7 and 5.4.6, we thus have

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda &\leq v + \varepsilon' \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n &\leq v + \varepsilon'. \end{aligned}$$

This is true for any $\varepsilon' > 0$, so

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda &\leq v \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n &\leq v. \end{aligned}$$

In the same way one prove that

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda &\geq v \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n &\geq v \end{aligned}$$

and we have proved the strong convergence of v_λ and v_n to v . ■

In the same vein one can prove

Proposition 5.5.18 *Assume that Ψ is MHaDu, and suppose that the sequence v_n satisfies*

$$v_{n+1} - v_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Then v_n has at most one accumulation point for the uniform topology. Moreover, if v_n converges uniformly, then so does v_λ to the same limit.

Proof. Let v be an accumulation point of v_n ; it satisfies $\mathbf{R}(\Psi)(v) = v$ by Lemma 5.3.12. By property (Du) there is a nonincreasing function h from \mathbb{R}^+ to itself such that $\lim_{L \rightarrow +\infty} h(L) = 0$ and that for every $m \in \mathbb{N}^*$

$$\|\Psi_m(Lv) - (L+1)v - \varphi_m(v)\|_\infty \leq h(L). \quad (5.5.19)$$

Let $\varepsilon > 0$, and $L > 1$ such that $h(L) \leq \varepsilon$. By hypothesis, there exists $N \in \mathbb{N}^*$ such that

$$n \geq N \implies \|v_{n+1} - v_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{n}. \quad (5.5.20)$$

Moreover, since v is an accumulation point of the sequence v_n , there exist $n \geq N$ such that

$$\|v_n - v\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{L+1} \quad (5.5.21)$$

Denote $m = \lfloor \frac{n}{L} \rfloor$, $L' = \frac{n}{m}$ and observe that $L \leq L' \leq L \frac{m+1}{m} \leq 2L$.

By (5.5.19),

$$\begin{aligned} \|\varphi_m(v)\|_\infty &\leq h(L') + \|\Psi_m(L'v) - (L'+1)v\|_\infty \\ &\leq h(L) + \frac{1}{m} \|\Psi^m(mL'v) - m(L'+1)v\|_\infty \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{m} \left\| \Psi^m(mL'v) - \Psi^{m(L'+1)}(0) \right\|_\infty + (L'+1)\|v_{n+m} - v\|_\infty \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{m} \left\| mL'v - \Psi^{mL'}(0) \right\|_\infty + (L'+1)\|v_n - v\|_\infty + (L'+1)\|v_{n+m} - v_n\|_\infty \\ &\leq \varepsilon + (2L'+1)\|v_n - v\|_\infty + (L'+1)\|v_{n+m} - v_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Using (5.5.20) and (5.5.21), this implies

$$\begin{aligned} \|\varphi_m(v)\|_\infty &\leq \varepsilon + \frac{2L'+1}{L+1}\varepsilon + \frac{(L'+1)m}{n}\varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \frac{4L+1}{L+1}\varepsilon + \frac{(L'+1)}{L'}\varepsilon \\ &\leq 7\varepsilon. \end{aligned}$$

We conclude as in the proof of Proposition 5.5.17. ■

Remark 5.5.19 *While it is true that $v_{n+1} - v_n = O(\frac{1}{n})$ for any operator MHa (see Lemma 5.2.3), it is unclear whether the stronger hypothesis of Proposition 5.5.18 is always satisfied.*

5.6 Appendix

This section is devoted to the proof of Proposition 5.4.7. The first lemma relates the operators Ψ^m and Φ^m :

Lemma 5.6.1 *If Ψ is $MHaL$ for a constant K , then for any $t > 0$, $\lambda \in]0, 1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ and $x \in \mathcal{F}$ the following inequality holds:*

$$\left\| \Psi^m\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\Phi^m(\lambda, x)}{t(1-\lambda)^m} \right\|_\infty \leq K \sum_{i=1}^m \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^i} \right|$$

Proof. Proceed by induction on m . For $m = 1$, Ψ satisfies (L) so

$$\left\| t\Psi\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\lambda}{1-\lambda}\Psi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right) \right\|_{\infty} \leq K \left| t - \frac{\lambda}{1-\lambda} \right|$$

so dividing by t ,

$$\left\| \Psi\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\Phi(\lambda, x)}{t(1-\lambda)} \right\|_{\infty} \leq K \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)} \right|. \quad (5.6.1)$$

Assume the result holds for $m - 1$, that is

$$\left\| \Psi^{m-1}\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\Phi^{m-1}(\lambda, x)}{t(1-\lambda)^{m-1}} \right\|_{\infty} \leq K \sum_{i=1}^{m-1} \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^i} \right|$$

which implies, Ψ being nonexpansive, that

$$\left\| \Psi^m\left(\frac{x}{t}\right) - \Psi\left(\frac{\Phi^{m-1}(\lambda, x)}{t(1-\lambda)^{m-1}}\right) \right\|_{\infty} \leq K \sum_{i=1}^{m-1} \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^i} \right|$$

On the other hand, Ψ satisfies (L), thus one can apply equation (5.6.1) with $x' = \Phi^{m-1}(\lambda, x)$ and $t' = t(1-\lambda)^{m-1}$, which gives

$$\left\| \Psi\left(\frac{\Phi^{m-1}(\lambda, x)}{t(1-\lambda)^{m-1}}\right) - \frac{\Phi(\lambda, \Phi^{m-1}(\lambda, x))}{t(1-\lambda)^{m-1}(1-\lambda)} \right\|_{\infty} \leq K \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^{m-1}(1-\lambda)} \right|$$

Triangular inequality implies that

$$\begin{aligned} \left\| \Psi^m\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\Phi^m(\lambda, x)}{t(1-\lambda)^m} \right\|_{\infty} &\leq K \sum_{i=1}^{m-1} \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^i} \right| + K \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^m} \right| \\ &= K \sum_{i=1}^m \left| 1 - \frac{\lambda}{t(1-\lambda)^i} \right|. \end{aligned}$$

■

A consequence of this lemma is the following comparison between the operators Φ_m and Φ^m :

Corollary 5.6.2 *If Ψ is MHaL for a constant K , then for any $\lambda \in]0, 1[$, $m \in \mathbb{N}^*$ and $x \in \mathcal{F}$ the following inequality holds:*

$$\|\Phi_m(\mu, x) - \Phi^m(\lambda, x)\|_{\infty} \leq K(m\lambda - \mu)$$

where $\mu = 1 - (1 - \lambda)^m$.

Proof. Applying Proposition 5.6.1 with $t = \frac{\mu}{m(1-\mu)}$ gives

$$\left\| \Psi^m\left(\frac{1-\mu}{\mu}mx\right) - \frac{m(1-\mu)\Phi^m(\lambda, x)}{\mu(1-\lambda)^m} \right\|_{\infty} \leq K \sum_{i=1}^m \left| 1 - \frac{m\lambda(1-\mu)}{\mu(1-\lambda)^i} \right|$$

Multiplying by $\frac{\mu}{m}$,

$$\left\| \Phi_m(\mu, x) - \frac{(1-\mu)\Phi^m(\lambda, x)}{(1-\lambda)^m} \right\|_\infty \leq K \sum_{i=1}^m \left| \frac{\mu}{m} - \frac{\lambda(1-\mu)}{(1-\lambda)^i} \right|$$

and thus, since $1-\mu = (1-\lambda)^m$,

$$\|\Phi_m(\mu, x) - \Phi^m(\lambda, x)\|_\infty \leq K \sum_{i=1}^m \left| \frac{\mu}{m} - \lambda(1-\lambda)^{i-1} \right|.$$

Next, use the fact that for any i between 1 and m , $(1-\lambda)^{m-1} \leq (1-\lambda)^{i-1} \leq 1$, which implies

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\mu}{m} - \lambda(1-\lambda)^{i-1} \right| \leq \max(|\mu - m\lambda|, |\mu - m\lambda(1-\lambda)^{m-1}|).$$

It remains to establish that $0 \leq \mu - m\lambda(1-\lambda)^{m-1} \leq m\lambda - \mu$. The first inequality is equivalent to

$$(1 + (m-1)\lambda)(1-\lambda)^{m-1} \leq 1$$

which can be shown by taking the logarithmic derivative of the left-hand side and noticing that it is negative on $[0,1]$.

The second inequality can be written as

$$m\lambda + (2 + (m-2)\lambda)(1-\lambda)^{m-1} \geq 2$$

Both sides are equal for $\lambda = 0$, so it is enough to show that the derivative of the left-hand side

$$m [1 - (1 + (m-2)\lambda)(1-\lambda)^{m-2}]$$

is nonnegative. This can be shown by taking the logarithmic derivative of $(1 + (m-2)\lambda)(1-\lambda)^{m-2}$ and noticing that it is negative on $[0,1]$. ■

We can finally prove Proposition 5.4.7:

Proof of Proposition 5.4.7. Fix $m \in \mathbb{N}^*$ and $\lambda \in]0, 1]$, denote $\mu = 1 - (1-\lambda)^m$ and notice that, since $\Phi_m(\mu, \cdot)$ is $1-\mu$ contracting,

$$\begin{aligned} \mu \|v_\lambda - v_{\mu, m}\|_\infty &\leq \|v_\lambda - v_{\mu, m}\|_\infty - \|\Phi_m(\mu, v_\lambda) - \Phi_m(\mu, v_{\mu, m})\|_\infty \\ &\leq \|\Phi_m(\mu, v_\lambda) - v_\lambda\|_\infty \\ &= \|\Phi_m(\mu, v_\lambda) - \Phi^m(\lambda, v_\lambda)\|_\infty. \end{aligned}$$

Corollary 5.6.2 thus implies that

$$\|v_\lambda - v_{\mu, m}\|_\infty \leq K \left(\frac{m\lambda}{\mu} - 1 \right).$$

For a fixed m , notice that $\mu \sim m\lambda$ as λ goes to 0, which implies that $\|v_\lambda - v_{\mu, m}\|_\infty$ converges to 0 as λ goes to 0, so a fortiori $\limsup v_{\lambda, m} = \limsup v_\lambda$. ■

Acknowledgments

This article was written during the course of my PhD thesis. I would like to thank my advisor Sylvain Sorin for numerous very helpful comments.

5.7 Compléments

5.7.1 Contre exemple avec paiement borné ?

On rappelle que les seuls exemples en dimension finie d'opérateurs de Shapley tels que v_n ou v_λ ne convergent pas (voir section 3.2.1) proviennent de jeux à paiements non bornés. Le lemme 5.3.5 soulève donc naturellement la question suivante : existe-t-il un opérateur MHaL de \mathbb{R}^3 dans lui-même tel que v_n ou v_λ ne converge pas ? On peut supposer que deux des états sont absorbants (voir 4.4.2), et que l'opérateur est donc de la forme

$$\Psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ f(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

La question peut donc se formuler ainsi : soit f une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} presque partout différentiable. On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

- a) $\frac{\partial f}{\partial x_i} f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et $i = 1$ à 3 .
- b) $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.
- c) $\|f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle\|_\infty \leq K$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ (voir le lemme 5.3.8).

Soit v_λ l'unique solution de $v_\lambda = \lambda f(0, \frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda)$, la famille v_λ converge-t-elle nécessairement lorsque λ tend vers 0 ?

On peut répondre positivement dans le cas où f ne dépend pas de sa troisième coordonnée :

Proposition 5.7.1 *On suppose que f vérifie les hypothèses a) b) et c) ci dessus, et que $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$. Alors v_λ converge.*

Démonstration. Soit $h(x) = f(0, x)$. D'après l'hypothèse c, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$,

$$\left\| h\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda} h'\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\|_\infty \leq K.$$

Le membre de gauche étant la dérivée de $\lambda h\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, on en déduit que $\lambda h\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ a une limite en 0, et donc que $v_\lambda = \lambda h\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)$ converge. ■

5.7.2 Opérateurs $\Psi(\cdot + k)$

L'exemple de la section 4.5.2 suggère de considérer également les opérateurs $x \rightarrow \Psi(x + k)$. On donne ici une preuve d'une variante de la proposition 5.5.1 qui utilise cette approche.

Proposition 5.7.2 *Soit Ψ un opérateur MHaCR et soit v tel que $\mathbf{R}(\Psi)(v) \leq v$ et $\Psi^n(0) - \Psi^{n-1}(0) \leq v$ pour un certain n . Alors*

$$\begin{aligned} \limsup v_n &\leq v \\ \limsup v_\lambda &\leq v \end{aligned}$$

Démonstration. Soit n tel que $\Psi^n(0) - \Psi^{n-1}(0) \leq v$. On pose $k = \Psi^{n-1}(0)$, alors le lemme 5.5.6 entraîne que pour tout $L > 0$,

$$\Psi(Lv + k) \leq Lv + \Psi(k) \quad (5.7.1)$$

$$= Lv + k + \Psi^n(0) - \Psi^{n-1}(0) \quad (5.7.2)$$

$$\leq (L + 1)v + k. \quad (5.7.3)$$

Un analogue de la proposition 5.4.2 entraîne alors le résultat. \blacksquare

5.7.3 Relation entre les opérateurs Ψ_m et $\Psi(\cdot + k)$

On montre ici que les deux approches (étudier les itérés ou les translatés de Ψ) sont reliées.

Soient Ψ un opérateur MHa et $f \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{R}(\Psi)(f) = f$. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathcal{F}$, les limites suivantes existent (on ne se préoccupe pas ici des vitesses de convergence).

$$\varphi_m(f) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \Psi_m(Lf) - (L + 1)f \quad (5.7.4)$$

$$\chi(f, k) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \Psi(Lf + k) - (L + 1)f - k. \quad (5.7.5)$$

Remarque 5.7.3 La quantité $\varphi_m(f)$ était déjà défini dans la section 5.5.3. $\chi(f, k)$ est également une quantité naturelle puisque'en adaptant la preuve du lemme 4.3.2 on prouve que si $\chi(f, k) \leq 0$ pour un certain k , alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq f$$

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} v_\lambda \leq f$$

On peut alors prouver une relation de récurrence entre les $\varphi_m(f)$ faisant intervenir les $\chi(f, \cdot)$:

Proposition 5.7.4 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$(m + 1)\varphi_{m+1}(f) = \chi(f, m\varphi_m(f)) + m\varphi_m(f).$$

Démonstration.

$$(m + 1)(\Psi_{m+1}(Lf) - (L + 1)f) = \Psi^{m+1}(L(m + 1)f) - (L + 1)(m + 1)f \quad (5.7.6)$$

$$= \Psi^{m+1}(L'mf) - \Psi((L' + 1)mf + m\varphi_m(f)) \quad (5.7.7)$$

$$+ \Psi((L' + 1)mf + m\varphi_m(f)) - ((L' + 1)m + 1)f$$

où l'on a posé $L' = \frac{L(m+1)}{m}$.

On remarque que

$$\begin{aligned} \|\Psi^{m+1}(L'mf) - \Psi((L' + 1)mf + m\varphi_m(f))\|_\infty &\leq \|\Psi^m(L'mf) - (L' + 1)mf - m\varphi_m(f)\|_\infty \\ &= m\|\Psi_m(L'mf) - (L' + 1)f - \varphi_m(f)\|_\infty \end{aligned}$$

tend vers 0 quand L (et donc L') tend vers $+\infty$ par définition de φ_m .

D'autre part, par définition de $\chi_k(f)$,

$$\Psi((L' + 1)mf + m\varphi_m(f)) - ((L' + 1)m + 1)f \longrightarrow \chi(f, m\varphi_m(f)) + m\varphi_m(f) \quad (5.7.8)$$

lorsque L tend vers $+\infty$.

En faisant tendre L vers $+\infty$ dans (5.7.7), on trouve donc

$$(m + 1)\varphi_{m+1}(f) = \chi(f, m\varphi_m(f)) + m\varphi_m(f).$$

■

Chapitre 6

Lien discret/continu

Ce chapitre est constitué de l'article "Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces" (à paraître dans *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*) ainsi que de compléments.

Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces

Abstract

We consider some discrete and continuous dynamics in a Banach space involving a nonexpansive operator J and a corresponding family of strictly contracting operators $\Phi(\lambda, x) := \lambda J(\frac{1-\lambda}{\lambda}x)$ for $\lambda \in]0, 1]$. Our motivation comes from the study of two-player zero-sum repeated games, where the value of the n -stage game (resp. the value of the λ -discounted game) satisfies the relation $v_n = \Phi(\frac{1}{n}, v_{n-1})$ (resp. $v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda)$) where J is the Shapley operator of the game. We study the evolution equation $u'(t) = J(u(t)) - u(t)$ as well as associated Eulerian schemes, establishing a new exponential formula and a Kobayashi-like inequality for such trajectories. We prove that the solution of the non-autonomous evolution equation $u'(t) = \Phi(\lambda(t), u(t)) - u(t)$ has the same asymptotic behavior (even when it diverges) as the sequence v_n (resp. as the family v_λ) when $\lambda(t) = 1/t$ (resp. when $\lambda(t)$ converges slowly enough to 0).

6.1 Introduction

The topic of the asymptotic behavior of trajectories defined through nonexpansive mappings in Banach spaces arise in numerous domains such as nonlinear semigroups theory [4, 10, 12, 21, 22, 36, 46], game theory [24, 40, 42, 53, 59, 64] as well as in discrete events systems [16, 19, 20].

Given a nonexpansive function J from a Banach space X to itself, evolution equation

$$U'(t) = J(U(t)) - U(t) \tag{6.1.1}$$

is a particular case of the widely-studied

$$U'(t) \in -A(U(t))$$

for a maximal monotone operator A . Typically, the study of the asymptotics for such evolution equation and its Eulerian and proximal discretizations has been made in Hilbert spaces [10] or at least assuming some geometric properties in the case of Banach spaces [24, 46]. Another usual assumption is the non emptiness of the set $A^{-1}(0)$.

On the other hand, in the framework of two-person zero-sum games repeated in discrete time, the values v_n and v_λ of the n -stage (resp. λ -discounted) game satisfy respectively:

$$v_n = \frac{J^n(0)}{n} = \Phi\left(\frac{1}{n}, v_{n-1}\right) \quad (6.1.2)$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda) \quad (6.1.3)$$

where J is the so-called Shapley operator of the game and $\Phi(\lambda, x) := \lambda J\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right)$. This operator J is nonexpansive for the uniform norm, hence $A = I - J$ is a maximal monotone operator in the sense of [21]. However two unusual facts appears in the study of the asymptotics of those values: first $A^{-1}(0)$, the set of fixed points of J , is generally empty. Another difficulty lies in the lack of smoothness of the unit ball $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_\infty}$, which might induce oscillations of the discrete trajectories defined above [24].

The purpose of this paper is to investigate the relation between several discrete and continuous dynamics in Banach spaces. Because our motivation comes from this game-theoretic framework, we neither make any geometrical assumptions on the unit ball, nor suppose non emptiness of $A^{-1}(0)$. In continuous time, dynamics that we will consider are (6.1.1) as well as non autonomous evolution equations of the form

$$u'(t) = \Phi(\boldsymbol{\lambda}(t), u(t)) - u(t) \quad (6.1.4)$$

for some parametrizations $\boldsymbol{\lambda}$. We establish that the quantities defined in (6.1.2) and (6.1.3) behave asymptotically as the solutions of these various evolution equations. Surprisingly this is true not only when there is convergence; even when they oscillate we prove that discrete and continuous trajectories remain asymptotically close.

Section 2 is devoted to definitions and basic results. In Section 3 we study the relation between the solution U of evolution equation (6.1.1) and related Eulerian schemes, establishing in particular that $\|v_n - \frac{U(n)}{n}\|$ converges to 0. In the process we prove that some classical results (e.g. exponential formula [12], Kobayashi inequality [22]) involving the proximal trajectories for a maximal monotone operator A have an Eulerian explicit counterpart in the case $A = I - J$. In Section 4 we consider the non autonomous equation (6.1.4). We show that for $\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{1}{t}$ the solution behave asymptotically as the sequence v_n , and that when $\boldsymbol{\lambda}$ converges slowly enough to 0 the solution behave asymptotically as the family v_λ .

6.2 Discrete time model

6.2.1 Nonexpansive operators

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, and J a nonexpansive mapping from X into itself :

$$\|J(x) - J(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall (x, y) \in X^2.$$

We define, for $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in]0, 1]$,

$$V_n = J(V_{n-1}) = J^n(0) \quad (6.2.1)$$

$$V_\lambda = J((1 - \lambda)V_\lambda) \quad (6.2.2)$$

Notice that V_λ is well-defined because $J((1 - \lambda)\cdot)$ is strictly contracting, hence has a unique fixed point.

Example 6.2.1 For any $c \in \mathbb{R}$, the mapping J from \mathbb{R} to itself defined by $J(x) = x + c$ is nonexpansive. In that case, $V_n = nc$ and $V_\lambda = \frac{c}{\lambda}$.

These quantities being unbounded in general (see above), we also introduce their normalized versions

$$v_n = \frac{V_n}{n} \tag{6.2.3}$$

$$v_\lambda = \lambda V_\lambda \tag{6.2.4}$$

In the previous example, one gets $v_n = v_\lambda = c$ for all n and λ . In general it is easy to prove that these normalized quantities are bounded:

Lemma 6.2.2 For any $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in]0, 1]$,

$$\|v_n\| \leq \|J(0)\| \tag{6.2.5}$$

$$\|v_\lambda\| \leq \|J(0)\|. \tag{6.2.6}$$

Proof. Since J is non expansive,

$$\|V_n - V_{n-1}\| = \|J(V_{n-1}) - J(V_{n-2})\| \leq \|V_{n-1} - V_{n-2}\|.$$

By induction this implies that

$$\|V_n\| \leq n\|V_1\| = n\|J(0)\|.$$

On the other hand, again using the fact that J is non expansive,

$$\begin{aligned} \|V_\lambda\| - \|J(0)\| &\leq \|V_\lambda - J(0)\| \\ &= \|J((1 - \lambda)V_\lambda) - J(0)\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|V_\lambda\| \end{aligned}$$

and so

$$\|v_\lambda\| = \lambda\|V_\lambda\| \leq \|J(0)\|.$$

■

To underline the link between the families $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and $\{v_\lambda\}_{\lambda \in]0, 1]}$ it is also of interest to introduce the family of strictly contracting operators $\Phi(\lambda, \cdot)$, $\lambda \in]0, 1]$, defined by

$$\Phi(\lambda, x) = \lambda J\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}x\right). \tag{6.2.7}$$

The function $\Phi(\lambda, \cdot)$ can be seen as a perturbed recession function of J : because of the nonexpansiveness of J ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi(\lambda, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda J\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J(tx)}{t} \tag{6.2.8}$$

which is the definition of the recession function of J [50].

The quantities v_n and v_λ then satisfy the relations

$$v_n = \Phi\left(\frac{1}{n}, v_{n-1}\right) ; v_0 = 0 \quad (6.2.9)$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda) \quad (6.2.10)$$

Notice that since $\Phi(\lambda, \cdot)$ is strictly contracting, any sequence $w_n \in X$ satisfying

$$w_n = \Phi(\lambda, w_{n-1}) \quad (6.2.11)$$

converges strongly to v_λ as n goes to $+\infty$.

6.2.2 Shapley operators

An important application, which is our main motivation, is obtained in the framework of zero-sum two player repeated games [59]. For example take the simple case of a stochastic game with a finite state space Ω , compact move sets S and T for player 1 and 2 respectively, payoff g from $S \times T \times \Omega$ to \mathbb{R} , and transition probability ρ from $S \times T \times \Omega$ to $\Delta(\Omega)$ (the set of probabilities on Ω). Let $\mathcal{S} = \Delta_f(S)$ (resp. $\mathcal{T} = \Delta_f(T)$) the sets of probabilities on S (resp. T) with finite support; we still denote by g and ρ the multilinear extensions from $S \times T$ to $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ of the corresponding functions.

The game is played as follow: an initial stage $\omega_1 \in \Omega$ is given, known by each player. At each stage m , knowing past history and current state ω_m , player 1 (resp. player 2) chooses $\sigma \in \mathcal{S}$ (resp. $\tau \in \mathcal{T}$). A move a_m of player 1 (resp. b_m of player 2) is drawn accordingly to σ (resp. τ). The payoff g_m at stage m is then $g(a_m, b_m, \omega_m)$ and ω_{m+1} , the state at stage $m+1$, is drawn accordingly to $\rho(a_m, b_m, \omega_m)$.

There are several ways of evaluating a payoff for a given infinite history:

- $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g_m$ is the payoff of the n -stage game
- $\lambda \sum_{m=1}^{+\infty} (1 - \lambda)^{m-1} g_m$ is the payoff of the λ -discounted game.

For a given initial state ω , we denote the values of those games by $v_n(\omega)$ and $v_\lambda(\omega)$ respectively; v_n and v_λ are thus functions from Ω into \mathbb{R} .

Let $\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$; the Shapley operator J from \mathcal{F} to itself is then defined by $f \rightarrow J(f)$, where $J(f)$ is the function from Ω to \mathbb{R} satisfying

$$J(f)(\omega) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \inf_{\tau \in \mathcal{T}} \left\{ g(\sigma, \tau, \omega) + \sum_{\omega' \in \Omega} f(\omega') \rho(\omega' | \sigma, \tau, \omega) \right\} \quad (6.2.12)$$

$$= \inf_{\tau \in \mathcal{T}} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \left\{ g(\sigma, \tau, \omega) + \sum_{\omega' \in \Omega} f(\omega') \rho(\omega' | \sigma, \tau, \omega) \right\} \quad (6.2.13)$$

Then J is nonexpansive on \mathcal{F} endowed with the uniform norm. The value v_n of the n -stage game (resp. the value v_λ of the λ -discounted game) satisfies relation (6.2.9) (resp. (6.2.10)).

This recursive structure holds in a wide class of zero-sum repeated games and the study of the asymptotic behavior of v_n (resp. v_λ) as n tends to $+\infty$ (resp. as λ tends to 0) is a major topic in game theory (see [59] for example). Convergence of both v_n and v_λ (as well as equality of the limits) has been obtained for different class of games, for example absorbing games [23], recursive games [15], games with incomplete information [3], finite stochastic games [5] [6], and Markov Chain Games with incomplete information [47].

Even in the simple case of a finite stochastic game where the space \mathcal{F} on which J is defined is \mathbb{R}^n , the Shapley operator J is only nonexpansive for the uniform norm ℓ^∞ . In the case of a general Shapley operator J , the Banach space (which may be infinite dimensional) on which J is nonexpansive is always a set of bounded real functions (defined on a set Ω of states) endowed with the uniform norm. As shown in [20] and [24], this lack of geometrical smoothness implies that the families v_n and v_λ may not converge. They may also converge to two different limits [27]. However the goal of the so called "Operator Approach" (see [53] and [64]) is to infer, from specific properties in the framework of games, convergence of both v_n and v_λ as well as equality of their limits.

A closely related application, in the framework of discrete event systems, is the problem of existence of the cycle-time of a topical mapping [16] [19].

6.2.3 Associated evolution equations

In the current paper we investigate a slightly different direction : the aim is to show that the sequence v_n and the family v_λ defined in equations (6.2.9) and (6.2.10) behave asymptotically as the solutions of certain continuous-time evolution equations. This is interesting for at least three reasons: first, this implies that proving the convergence of v_n or v_λ reduces to study the asymptotic of the solution of some evolution equation. Second, even if the definitions (6.2.9) of v_n and (6.2.10) of v_λ may seem dissimilar since one is recursive and the other is a fixed point equation, we will see that the corresponding equations in continuous time are of the same kind, hence it gives an insight on the equality $\lim v_n = \lim v_\lambda$, satisfied for a wide class of games. Third, we will prove in the process some results of interest in their own right.

Notice that equation (6.2.1) can also be written as a difference equation

$$(V_{n+1} - V_n) = J(V_n) - V_n \quad (6.2.14)$$

which can be viewed as a discrete version of the evolution equation

$$U'(t) = J(U(t)) - U(t). \quad (6.2.15)$$

Similarly, equations (6.2.9) and (6.2.11) can be considered as discrete versions of

$$u'(t) = \Phi\left(\frac{1}{t+1}, u(t)\right) - u(t) \quad (6.2.16)$$

and

$$u'(t) = \Phi(\lambda, u(t)) - u(t) \quad (6.2.17)$$

respectively. Notice that while (6.2.17) is autonomous, (6.2.16) is not.

The asymptotic relation between solutions of (6.2.15) and (6.2.1) will be discussed in section 3. In that section we will also prove some results about Eulerian schemes related to (6.2.15), which have an interpretation in terms of games with uncertain duration [40,42] in the case of a Shapley Operator.

In section 4, we will study the asymptotic behavior of solutions of the non-autonomous evolution equation

$$u'(t) = \Phi(\boldsymbol{\lambda}(t), u(t)) - u(t) \quad (6.2.18)$$

for some time-dependent parametrizations $\boldsymbol{\lambda}(t)$, which in particular will cover both cases of equations (6.2.16) and (6.2.17). We will first prove that when $\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{1}{t}$ the solution of (6.2.18) has the same asymptotic behavior, as t goes to $+\infty$, as the sequence v_n as n goes to $+\infty$. We will then examine the case where the parametrization $\boldsymbol{\lambda}(t)$ converges slowly enough to 0, establishing that the solution of (6.2.18) has then the same asymptotic behavior as the family v_λ as λ goes to 0. Finally, using our results in continuous time, we will study other dynamics in discrete time generalizing (6.2.9) and (6.2.11). Similarly to section 6.3, in the case of a Shapley operator these dynamics have an interpretation in terms of games with uncertain duration.

6.3 Dynamical system related to the operator J

Let us denote $A = I - J$; the operator A is m -accretive, meaning that for any $\lambda > 0$ both properties are satisfied:

- (i) $\|x - y + \lambda A(x) - \lambda A(y)\| \geq \|x - y\|$ for all $(x, y) \in X^2$.
- (ii) $I + \lambda A$ is surjective.

This implies that A is maximal monotone [21]. Recall that the analogous in continuous time of equation (6.2.1) defining V_n is evolution equation (6.2.15), which can also be written as

$$U'(t) = -A(U(t)) \quad (6.3.1)$$

with initial condition $U(0) = U_0$, the Cauchy-Lipschitz theorem ensuring the existence and uniqueness of such a solution.

Example 6.3.1 *Following example 6.2.1, suppose $J(x) = x + c$. Then one has $A(x) = -c$, so $U(t) = U_0 + ct$.*

This simple example shows that, as in discrete time where the true sequence to consider is not V_n but the normalized v_n , we are not expecting convergence of $U(t)$ but rather of the normalized quantity $\frac{U(t)}{t}$. This is a consequence of the fact that we do not assume non emptiness of $A^{-1}(0)$.

Apart from equation (6.2.1), there are numerous other natural discretizations of equation (6.3.1). For every $x_0 \in X$ and any sequence $\{\lambda_n\}$ in $[0,1]^1$ the explicit Eulerian scheme is defined by

$$x_n - x_{n-1} = -\lambda_n A x_{n-1} \quad (6.3.2)$$

that is

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^n [I - \lambda_i A] \right) (x_0). \quad (6.3.3)$$

Notice that choosing $x_0 = 0$ and $\lambda_n = 1$ for all n leads to the definition (6.2.1) of V_n .

Other discrete trajectories are implicit proximal schemes (first introduced when $A = \partial f$ in [37]) which satisfy:

$$x_n - x_{n-1} = -\lambda_n A x_n$$

that is

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^n [I + \lambda_i A]^{-1} \right) (x_0).$$

In both cases we denote

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (6.3.4)$$

$$\tau_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \quad (6.3.5)$$

Usually proximal schemes share better asymptotic properties (take the simple example where A is a rotation in \mathbb{R}^2 and $\lambda_n \notin \ell^2$: then the proximal scheme will converge to the fixed point of the rotation, while the Eulerian one will diverge). However Eulerian schemes have the remarkable feature that they can be computed explicitly, and they arise naturally in the game-theoretic framework:

Example 6.3.2 *When J is the Shapley operator of a stochastic game Γ , x_n defined by (6.3.2) is the non-normalized value of the following n -stage game: states, actions, payoff and transition are as in Γ , but at stage 1 there is a probability $1 - \lambda_n$ that the game goes on to stage 2 without any payoff or transition. Similarly at stage 2, there is no payoff nor transition with probability $1 - \lambda_{n-1}$, and at stage n with probability $1 - \lambda_1$. In that case σ_n and τ_n have a nice interpretation: the expected number of stages really played is σ_n , and the variance is $\sigma_n - \tau_n$. It is also worthwhile to notice that such games are particular cases of stochastic games with uncertain duration [40, 42].*

For this reason we will study exclusively Eulerian schemes, in the case of an operator $A = I - J$. Results of this section will be of three kind: first we study the relative behavior

¹Usually these schemes are defined for any sequence of positive steps, but here, since we need the operators $I - \lambda_n A$ to be non expansive, we have to assume that the λ_n lie in $[0, 1]$

of continuous and discrete dynamics when time goes to infinity. Given a sequence $\lambda_n \notin \ell^1$ one investigates the asymptotic relation between $U(\sigma_n)$ and the n -th term x_n of the Eulerian scheme defined in (6.3.2). This is done first in the special case of V_n (Corollary 6.3.8) and then in general (Corollary 6.3.13).

We also consider the case of a fixed time t . In that case one cuts the interval $[0, t]$ in a finite number m of intervals of length λ_i . These steps define an explicit scheme by (6.3.2), hence an approximate trajectory by linear interpolation. One expects such a trajectory to be asymptotically closer to the continuous trajectory defined by (6.3.1) as the discretization of the interval becomes finer. This is proved first in the case where $\lambda_i = \frac{t}{m}$ for $1 \leq i \leq m$ (Proposition 6.3.10), and then generalized in Proposition 6.3.14.

In the process we prove that two classical results, involving proximal schemes and holding for any maximal monotone operator, have an Eulerian counterpart when A is of the form $I - J$: we establish a new exponential formula in Proposition 6.3.10 and a Kobayashi-like inequality in Proposition 6.3.11.

6.3.1 Asymptotic study of the trajectory defined by equation (6.3.1)

The study of the asymptotic behavior of the solution of equation (6.2.15) in general Banach spaces has started in the early 70's, in particular the main result of this subsection, Corollary 6.3.8 relating v_n and $\frac{U(n)}{n}$, is already known (see [36] and [4]). Here we prove it in a different way, similar to the first chapter of [10], establishing during the proof some inequalities that will be helpful in the remaining of the paper.

Let us begin by proving several useful lemmas:

Lemma 6.3.3 *Let f be a continuous function from $[a, b] \subset \mathbb{R}$ to \mathbb{R} such that for every $t \in [a, b]$*

$$f(t) \leq M + \int_a^t [g(s) + \beta(s)f(s)]ds$$

for some continuous function g and some non-negative measurable function β such that $\int_a^b \beta(s)ds < +\infty$.

Then f satisfies

$$f(t) \leq e^{\int_a^t \beta(s)ds} \left(M + \int_a^t g(s) e^{-\int_a^s \beta(r)dr} ds \right)$$

for all $t \in [a, b]$.

Proof. Define $\alpha(t) = M + \int_a^t g(s)ds$. Since $f(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)f(s)ds$, Gronwall's inequality ([70] p. 15) implies that

$$f(t) \leq \alpha(t) + e^{\int_a^t \beta(s)ds} \cdot \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_a^s \beta(r)dr} ds.$$

Integrating by part the last integral gives

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq \alpha(t) + e^{\int_a^t \beta(s) ds} \cdot \left(\alpha(0) - \alpha(t) e^{-\int_a^t \beta(s) ds} + \int_a^t \alpha'(s) e^{-\int_a^s \beta(r) dr} ds \right) \\
&= e^{\int_a^t \beta(s) ds} \left(M + \int_a^t g(s) e^{-\int_a^s \beta(r) dr} ds \right).
\end{aligned}$$

■

In the remaining of the paper we will repeatedly use the following consequence of Lemma 6.3.3:

Proposition 6.3.4 *If $y : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ is an absolutely continuous function satisfying for every $t \in [a, b]$*

$$\|y(t) + y'(t)\| \leq (1 - \gamma(t))\|y(t)\| + h(t)$$

where γ is a continuous function from $[a, b]$ to $[-\infty, 1]$ and h is a continuous function from $[a, b]$ to \mathbb{R} , then y satisfies

$$\|y(t)\| \leq e^{-\int_a^t \gamma(s) ds} \left(\|y(a)\| + \int_a^t h(s) e^{\int_a^s \gamma(r) dr} ds \right)$$

for all $t \in [a, b]$.

Proof. $z(t) = y(t)e^t$ satisfies $\|z'(t)\| \leq (1 - \gamma(t))\|z(t)\| + h(t)e^t$, hence for every $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \|z(a)\| + \left\| \int_a^t z'(s) ds \right\| \\
&\leq \|z(a)\| + \int_a^t \|z'(s)\| ds \\
&\leq \|z(a)\| + \int_a^t h(s) e^s + (1 - \gamma(s))\|z(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Applying Lemma 6.3.3 to $\|z\|$ thus gives

$$\|z(t)\| \leq e^{\int_a^t 1 - \gamma(s) ds} \left(\|z(a)\| + \int_a^t h(s) e^s e^{-\int_a^s 1 - \gamma(r) dr} ds \right).$$

Multiplying each side by e^{-t} implies the result. ■

We now use this technical result to compare two solutions of (6.2.15):

Proposition 6.3.5 *If both U and V satisfy (6.2.15), then $\|U(t) - V(t)\|$ is non-increasing.*

Proof. Define $f = U - V$ which satisfies

$$\|f(t) + f'(t)\| = \|J(U(t)) - J(V(t))\| \leq \|U(t) - V(t)\| = \|f(t)\|.$$

Apply the preceding proposition to $\gamma \equiv 0$ and f . ■

Corollary 6.3.6 *If U is a solution of (6.2.15), then $\|U'(t)\|$ is non-increasing.*

Proof. Let $h > 0$ and $U_h(t) = U(t + h)$. The function U_h satisfies equation (6.2.15), so applying the preceding proposition to U and U_h we get that $t \rightarrow \frac{\|U(t+h) - U(t)\|}{h}$ is non-increasing on \mathbb{R}^+ . Letting h go to 0 gives the result ■

An interesting consequence of Corollary 6.3.6 is the following inequality, proved in Chapter 1 of [10]:

Lemma 6.3.7 (Chernoff's estimate) *Let U be the solution of (6.2.15) with $U(0) = U_0$. Then*

$$\|U(t) - J^n(U_0)\| \leq \|U'(0)\| \sqrt{t + [n - t]^2}.$$

Sketch of proof. Proceed by induction on n ; the proof for the case $n = 0$ comes from the fact that $\|U'\|$ is non-increasing by Corollary 6.3.6. ■

In particular if we take $U_0 = 0$ and $t = n$ in Lemma 6.3.7, we finally get the following corollary relating continuous and discrete trajectories:

Corollary 6.3.8 *The solution U of (6.2.15) with $U(0) = 0$ satisfies*

$$\left\| \frac{U(n)}{n} - v_n \right\| \leq \frac{\|J(0)\|}{\sqrt{n}}$$

In particular v_n converges iff $\frac{U(t)}{t}$ converges, and then the limits are the same.

Proof. The only point that remains to be shown is that if the sequence $\frac{U(n)}{n}$ converges as n tends to $+\infty$, then so does $\frac{U(t)}{t}$ as t tends to $+\infty$.

Using Corollary 6.3.6, we obtain

$$\|U(t) - U([t])\| \leq (t - [t])\|U'(0)\| \leq \|U'(0)\|$$

which implies that $\frac{U(t)}{t} - \frac{U([t])}{[t]}$ goes to 0 as t tends to $+\infty$. ■

6.3.2 An exponential formula

When A is a m -accretive operator on a Banach space, a fundamental result (see [12] p. 267) is that the solution U of (6.2.15) satisfies the following exponential formula for every $t \geq 0$, where the convergence is strong:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{t}{m} A \right)^{-m} (U_0) = U(t) \quad (6.3.6)$$

In the special case where J is a nonexpansive operator and $A = I - J$, we now establish an Eulerian analogous of this classical "proximal exponential formula".

Definition 6.3.9 For $x \in X$, $l \in \mathbb{N}$ and $t \in \mathbb{R}^+$, let us denote

$$U_t^m(x) = \left(I - \frac{t}{m} A \right)^m (x) \quad (6.3.7)$$

the m -th term of an Eulerian scheme with steps $\frac{t}{m}$.

Proposition 6.3.10 Let $U_0 \in X$ and U the solution of (6.2.15) with $U(0) = U_0$. Then if $m \geq t$,

$$\|U_t^m(U_0) - U(t)\| \leq \|A(U_0)\| \frac{t}{\sqrt{m}}. \quad (6.3.8)$$

In particular, for any $t \geq 0$, the following strong convergence holds:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(I - \frac{t}{m} A \right)^m (U_0) = U(t) \quad (6.3.9)$$

Proof. For any $\lambda \in [0, 1]$, $J_\lambda := \lambda J + (1 - \lambda)I = I - \lambda A$ is nonexpansive. Denote by U_λ the solution of

$$U_\lambda(t) + U'_\lambda(t) = J_\lambda(U_\lambda(t)) \quad (6.3.10)$$

with $U_\lambda(0) = U_0$. Applying Lemma 6.3.7 to U_λ and the nonexpansive operator J_λ :

$$\|U_\lambda(t) - J_\lambda^n(U_0)\| \leq \|U'_\lambda(0)\| \sqrt{t + [n - t]^2}$$

so in particular for $n = t$

$$\|U_\lambda(t) - J_\lambda^n(U_0)\| \leq \|U'_\lambda(0)\| \sqrt{n}. \quad (6.3.11)$$

Denote by U the the solution of (6.2.15) with $U(0) = U_0$ and notice that the function $t \rightarrow U(\lambda t)$ satisfies (6.3.10) and has the same initial condition as U_λ . This implies that $U_\lambda(t) = U(\lambda t)$ and putting this in (6.3.11),

$$\|U(\lambda n) - J_\lambda^n(U_0)\| \leq \lambda \|U'(0)\| \sqrt{n}.$$

For any $t' \leq n$, choosing $\lambda = \frac{t'}{n} \in [0, 1]$ thus gives

$$\left\| U(t') - \left(I - \frac{t'}{n} A \right)^n (U_0) \right\| \leq \|U'(0)\| \frac{t'}{\sqrt{n}}.$$

which is the desired result. ■

6.3.3 Comparaison of two Eulerian schemes

To generalize Proposition 6.3.10 to explicit schemes with arbitrary steps, it is useful to estimate first the difference between two Euler schemes: let x_0 and \hat{x}_0 in X , $\{\lambda\}_n$ and $\{\hat{\lambda}_n\}$ two sequences in $]0,1[$. Define x_n , σ_n and τ_n (resp. \hat{x}_n , $\hat{\sigma}_n$ and $\hat{\tau}_n$) as in (6.3.2), (6.3.4) and (6.3.5). The following proposition, which gives a majoration of the distance between two Eulerian trajectories, is an analogous of the classical Kobayashi inequality (Lemma 2.1 in [22]) which gives a majoration of the distance between two proximal trajectories:

Proposition 6.3.11 For any $z \in X$ and $(k, l) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_k - \hat{x}_l\| \leq \|x_0 - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| + \|A(z)\| \sqrt{(\sigma_k - \hat{\sigma}_l)^2 + \tau_k + \hat{\tau}_l}$$

Proof. We proceed by induction and begin by the case $l = 0$.

We recall that $J_\lambda = I_\lambda A$ is non-expansive for $\lambda \leq 1$, so we obtain

$$\begin{aligned} \|x_j - z\| &\leq \|x_j - J_{\lambda_j}(z)\| + \|J_{\lambda_j}(z) - z\| \\ &= \|J_{\lambda_j}(x_{j-1}) - J_{\lambda_j}(z)\| + \lambda_j \|A(z)\| \\ &\leq \|x_{j-1} - z\| + \lambda_j \|A(z)\| \end{aligned}$$

and summing these inequalities for $i \in \{1, \dots, k\}$ we get $\|x_k - z\| \leq \|x_0 - z\| + \sigma_k \|A(z)\|$, which implies that

$$\|x_k - \hat{x}_0\| \leq \|x_k - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| \leq \|x_0 - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| + \sigma_k \|A(z)\|$$

and the proposition holds when $l = 0$. The case $k = 0$ is proved in the same way.

We will now assume the formula to be true for $(k-1, l)$, $(k, l-1)$ et $(k-1, l-1)$ and deduce that it also holds for (k, l) .

Define numbers $\alpha_{k,l} = \frac{\lambda_k(1-\hat{\lambda}_l)}{\lambda_k + \hat{\lambda}_l - \lambda_k \hat{\lambda}_l}$, $\beta_{k,l} = \frac{\hat{\lambda}_l(1-\lambda_k)}{\lambda_k + \hat{\lambda}_l - \lambda_k \hat{\lambda}_l}$ et $\gamma_{k,l} = \frac{\lambda_k \hat{\lambda}_l}{\lambda_k + \hat{\lambda}_l - \lambda_k \hat{\lambda}_l}$ and note that they are non-negative with sum 1. Introduce also $c_{k,l} = \sqrt{(\sigma_k - \hat{\sigma}_l)^2 + \tau_k + \hat{\tau}_l}$. For any x and y in X , one check that the following equality holds:

$$J_{\lambda_k}(x) - J_{\hat{\lambda}_l}(y) = \alpha_{k,l}(J_{\lambda_k}(x) - y) + \beta_{k,l}(x - J_{\hat{\lambda}_l}(y)) + \gamma_{k,l}(J(x) - J(y)).$$

In particular, letting $x = x_{k-1}$, $y = \hat{x}_{l-1}$ and using the non-expansiveness of J , we get

$$\|x_k - \hat{x}_l\| \leq \alpha_{k,l} \|x_k - \hat{x}_{l-1}\| + \beta_{k,l} \|x_{k-1} - \hat{x}_l\| + \gamma_{k,l} \|x_{k-1} - \hat{x}_{l-1}\|$$

so by induction,

$$\begin{aligned} \|x_k - \hat{x}_l\| &\leq \|x_0 - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| + \|A(z)\| (\alpha_{k,l} c_{k,l-1} + \beta_{k,l} c_{k-1,l} + \gamma_{k,l} c_{k-1,l-1}) \\ &\leq \|x_0 - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| + \|A(z)\| \sqrt{\alpha_{k,l} + \beta_{k,l} + \gamma_{k,l}} \sqrt{d_{k,l}} \\ &= \|x_0 - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| + \|A(z)\| \sqrt{d_{k,l}} \end{aligned}$$

where we have denoted $d_{k,l} = \alpha_{k,l} c_{k,l-1}^2 + \beta_{k,l} c_{k-1,l}^2 + \gamma_{k,l} c_{k-1,l-1}^2$.

In addition,

$$\begin{aligned} c_{k,l-1}^2 &= (\sigma_k - \hat{\sigma}_{l-1})^2 + \tau_k + \hat{\tau}_{l-1} \\ &= (\sigma_k - \hat{\sigma}_l + \hat{\lambda}_l)^2 + \tau_k + \hat{\tau}_{l-1} \\ &= (\sigma_k - \hat{\sigma}_l)^2 + \hat{\lambda}_l^2 + 2\hat{\lambda}_l(\sigma_k - \hat{\sigma}_l) + \tau_k + \hat{\tau}_{l-1} \\ &= c_{k,l}^2 + 2\hat{\lambda}_l(\sigma_k - \hat{\sigma}_l) \end{aligned}$$

and similarly,

$$c_{k-1,l}^2 = c_{k,l}^2 - 2\lambda_k(\sigma_k - \hat{\sigma}_l).$$

Moreover

$$\begin{aligned}
c_{k-1,l-1}^2 &= (\sigma_{k-1} - \hat{\sigma}_{l-1})^2 + \tau_{k-1} + \hat{\tau}_{l-1} \\
&= (\sigma_k - \hat{\sigma}_l + \hat{\lambda}_l - \lambda_k)^2 + \tau_{k-1} + \hat{\tau}_{l-1} \\
&= (\sigma_k - \hat{\sigma}_l)^2 + \hat{\lambda}_l^2 + \lambda_k^2 + 2(\hat{\lambda}_l - \lambda_k)(\sigma_k - \hat{\sigma}_l) - 2\hat{\lambda}_l\lambda_k + \tau_{k-1} + \hat{\tau}_{l-1} \\
&= c_{k,l}^2 + 2(\hat{\lambda}_l - \lambda_k)(\sigma_k - \hat{\sigma}_l) - 2\hat{\lambda}_l\lambda_k.
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
d_{k,l} &= \alpha_{k,l}c_{k,l-1}^2 + \beta_{k,l}c_{k-1,l}^2 + \gamma_{k,l}c_{k-1,l-1}^2 \\
&= c_{k,l}^2 + 2(\sigma_k - \hat{\sigma}_l)(\alpha_{k,l}\hat{\lambda}_l - \beta_{k,l}\lambda_k + \gamma_{k,l}(\hat{\lambda}_l - \lambda_k)) - 2\hat{\lambda}_l\lambda_k\gamma_{k,l} \\
&= c_{k,l}^2 + 2\frac{\sigma_k - \hat{\sigma}_l}{\lambda_k + \hat{\lambda}_l - \lambda_k\hat{\lambda}_l}(\lambda_k\hat{\lambda}_l(1 - \hat{\lambda}_l) - \lambda_k\hat{\lambda}_l(1 - \lambda_k) + \lambda_k\hat{\lambda}_l(\hat{\lambda}_l - \lambda_k)) - 2\hat{\lambda}_l\lambda_k\gamma_{k,l} \\
&= c_{k,l}^2 - 2\hat{\lambda}_l\lambda_k\gamma_{k,l} \\
&\leq c_{k,l}^2
\end{aligned}$$

and we have established that

$$\|x_k - \hat{x}_l\| \leq \|x_0 - z\| + \|\hat{x}_0 - z\| + \|A(z)\|\sqrt{(\sigma_k - \hat{\sigma}_l)^2 + \tau_k + \hat{\tau}_l}.$$

■

6.3.4 Comparaison of an Eulerian scheme to a continuous trajectory

We now combine the results of the two preceding subsections: Proposition 6.3.10 comparing the continuous trajectory with a particular Eulerian scheme, and Proposition 6.3.11 relating any two Eulerian schemes.

Corollary 6.3.12 *Let $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be an Eulerian scheme as defined in (6.3.2). Then for any $t \geq 0$ and $k \in \mathbb{N}$,*

$$\|x_k - U(t)\| \leq \|x_0 - U_0\| + \|A(U_0)\|\sqrt{(\sigma_k - t)^2 + \tau_k}$$

Proof. Apply Proposition 6.3.11 to x_k and $U_t^m(U_0)$ to get

$$\|x_k - U_t^m(U_0)\| \leq \|x_0 - U_0\| + \|A(U_0)\|\sqrt{(\sigma_k - t)^2 + \tau_k + \frac{t^2}{m}}.$$

Let m go to $+\infty$ and use Proposition 6.3.10. ■

This corollary has some interesting consequences in two directions, as it generalizes both Corollary 6.3.8 and Proposition 6.3.10. First, it shows that any normalized discrete trajectory behave as the normalized continuous one as time goes to infinity:

Corollary 6.3.13 For any $t \geq 0$ and any Eulerian scheme $\{x_i\}$ such that $\sigma_k = t$,

$$\frac{\|x_k - U(t)\|}{t} \leq \frac{\|x_0 - U_0\| + \|A(U_0)\|\sqrt{t}}{t}$$

Proof. Apply Corollary 6.3.12 and use the fact that $\tau_k \leq \sigma_k$ since all λ_i are in $[0, 1]$. ■

On the other hand, take now the case of a fixed time t . Let U be the solution of (6.3.1) with initial condition $U(0) = U_0$, and let $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ defined by (6.3.2) be an Eulerian scheme with same initial condition $x_0 = U_0$ and $\sigma_n = t$. One constructs an approximation \tilde{x} of the continuous trajectory U on the interval $[0, t]$ by $\tilde{x}(\sigma_k) = x_k$ for $0 \leq k \leq n$, and linear interpolation on intervals $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$. The following proposition states that such approximation \tilde{x} will become asymptotically close to U as the discretization $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq \dots \leq \sigma_{n-1} \leq \sigma_n = t$ of the interval $[0, t]$ gets finer:

Proposition 6.3.14 For any t' in the interval $[0, t]$,

$$\|\tilde{x}(t') - U(t')\| \leq \|A(U_0)\|(1 + (1 + \sqrt{2})t) \cdot \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}}.$$

Proof. Let $t' \in [0, t]$ and k such that $\sigma_{k-1} \leq t' \leq \sigma_k$. Noticing that

$$\|\tilde{x}(t') - U(t')\| \leq \|\tilde{x}(t') - \tilde{x}(\sigma_k)\| + \|\tilde{x}(\sigma_k) - U(\sigma_k)\| + \|U(\sigma_k) - U(t')\|$$

we will evaluate the three components of the right-hand side separately.

Since \tilde{x} is affine on $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$, applying Proposition 6.3.11 gives

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t') - \tilde{x}(\sigma_k)\| &\leq \|\tilde{x}(\sigma_{k-1}) - \tilde{x}(\sigma_k)\| \\ &= \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \|A(U_0)\|\sqrt{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2 + \tau_k + \tau_{k-1}} \\ &= \|A(U_0)\|\sqrt{2\tau_k}. \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

On another hand, Corollary 6.3.12 implies that

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(\sigma_k) - U(\sigma_k)\| &= \|x_k - U(\sigma_k)\| \\ &\leq \|A(U_0)\|\sqrt{\tau_k}. \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Thirdly, using the mean value Theorem as well as Corollary 6.3.6,

$$\begin{aligned} \|U(\sigma_k) - U(t')\| &\leq |\sigma_k - t'| \max_{t'' \in [t', \sigma_k]} \|U'(t'')\| \\ &\leq |\sigma_k - \sigma_{k-1}| \cdot \|U'(0)\| \\ &= \lambda_k \|A(U_0)\|. \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

Adding inequalities (6.3.12) to (6.3.14) we thus deduce that

$$\|\tilde{x}(t') - U(t')\| \leq \|A(U_0)\|(\lambda_k + (1 + \sqrt{2})\sqrt{\tau_k}).$$

We use the facts that $\lambda_k \leq \sqrt{\lambda_k} \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}}$, and that $\tau_k \leq \tau_n \leq t \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}$ to conclude the proof. ■

This proposition has an interpretation in the particular framework of Example 6.3.2: consider a game with an expected duration of t . The previous result establishes that this game has a non normalized value close to $U(t)$, providing that at each stage the probability of playing is small (that is to say, if there is a high variance in the number of stages really played).

6.4 Dynamical systems linked to the family $\Phi(\lambda, \cdot)$

Let $\lambda : \mathbf{R} \rightarrow]0, 1]$ be a continuous function. In this section we study the asymptotic behavior of the solution to evolution equation (6.2.18):

$$u(t) + u'(t) = \Phi(\lambda(t), u(t)) \quad \text{with } u(0) = u_0$$

where Φ is the operator defined by equation (6.2.7).

Remark 6.4.1 *Since the mapping $(x, t) \rightarrow \Phi(\lambda(t), x) - x$ is globally 2-Lipschitz in its first variable, Cauchy-Lipschitz-Picard theorem ensures the existence and uniqueness of the solution of (6.2.18), and that it is defined on the whole set \mathbf{R}^+ .*

When the recession function $\Phi(0, \cdot)$ exists, any accumulation point v of v_n or v_λ will satisfy

$$\Phi(0, v) = v \tag{6.4.1}$$

but equation (6.4.1) may have many solutions (for example in the case of games with incomplete information [53] any convex/concave function satisfies (6.4.1)). The evolution equation (6.2.18) may thus be seen as a perturbation of (6.4.1), and we will study the effect of some perturbations on the asymptotic behavior of the solution of (6.2.18). See for example [2] for a similar approach in the framework of convex minimization.

The main results of this section are the following:

- When λ is the constant λ , the solution of (6.2.18) converges to v_λ .
- When $\lambda(t) \sim \frac{1}{t}$, the solution of (6.2.18) behave asymptotically as the family $\{v_n\}$
- When $\lambda(t)$ converges to 0 slowly enough, the solution of (6.2.18) behave asymptotically as the family $\{v_\lambda\}$

The first two results are not surprising since in those cases evolution equation (6.2.18) is a continuous version of equation (6.2.11) or (6.2.9) respectively. The third result is of a different nature but is also natural: denote by u_λ the solution of (6.2.18) when λ is the constant λ . We establish that if the parametrization λ in (6.2.18) is of slow variation, the solution u evaluated at time t is close to $u_{\lambda(t)}(t)$, hence to $v_{\lambda(t)}$ (see figure 6.1).

In the process of proving those three results, we also answer natural questions about the behavior of the solution u of equation (6.2.18) as a function of the parameters, namely we will prove that:

- If $\lambda \notin \ell^1$ the asymptotic behaviour of u does not depend on the initial value u_0 .
- If two parametrizations λ and $\tilde{\lambda}$ are asymptotically close, then it is also the case for the corresponding solutions u and \tilde{u} .

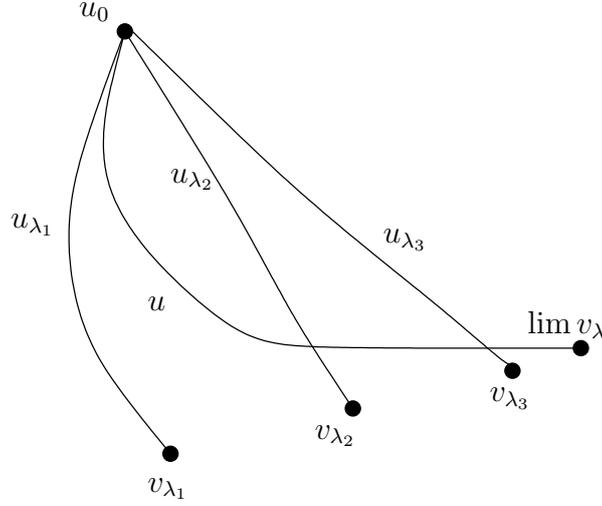


Figure 6.1: Trajectories of (6.2.18) for some constant parametrizations and for a slow parametrization

First we prove a simple fact that will be repeatedly used in the remaining of the paper. Recall, by equation (6.2.10), that for any $t \geq 0$, $v_{\lambda(t)}$ is the only solution of

$$v_{\lambda(t)} = \Phi(\lambda(t), v_{\lambda(t)}). \quad (6.4.2)$$

The following Lemma relates the behavior of $u'(t)$ to that of $u(t) - v_{\lambda(t)}$:

Lemma 6.4.2 *Let u be the solution of evolution equation (6.2.18) and $v_{\lambda(\cdot)}$ be defined by (6.4.2). Then for any $t \geq 0$, $\|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \leq \frac{\|u'(t)\|}{\lambda(t)}$*

Proof.

$$\begin{aligned} \|u'(t)\| &= \|u(t) - \Phi(\lambda(t), u(t))\| \\ &\geq \|u(t) - v_{\lambda(t)}\| - \|\Phi(\lambda(t), u(t)) - \Phi(\lambda(t), v_{\lambda(t)})\| \\ &\geq \|u(t) - v_{\lambda(t)}\| - (1 - \lambda(t)) \|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \\ &= \lambda(t) \|u(t) - v_{\lambda(t)}\|. \end{aligned}$$

■

6.4.1 Constant case

We start by considering the simplest case where the function λ is a constant λ . Equation (6.2.18) is then a continuous analogous of equation (6.2.11), so one can expect that $u(t)$ converges to v_{λ} , and indeed this is the case.

Start by a technical lemma:

Lemma 6.4.3 *If f satisfies $f(t) + f'(t) = B(f(t))$, where B is an $1 - \lambda$ contracting operator, then*

$$\|f'(t)\| \leq \|f'(0)\| \cdot e^{-\lambda t}.$$

Proof. Let $h > 0$ and $f_h(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$. Since B is $(1 - \lambda)$ contracting:

$$\|f_h(t) + f'_h(t)\| = \frac{1}{h} \|f(t+h) + f'(t+h) - [f(t) + f'(t)]\| \quad (6.4.3)$$

$$= \frac{1}{h} \|B(f(t+h)) - B(f(t))\| \quad (6.4.4)$$

$$\leq (1 - \lambda) \|f_h(t)\|. \quad (6.4.5)$$

Proposition 6.3.4 applied to f_h thus implies that

$$\|f_h(t)\| \leq \|f_h(0)\| \cdot e^{-\lambda t}$$

and letting h go to 0 gives the result. ■

An immediate consequence is:

Corollary 6.4.4 *If u is the solution of (6.2.18) with $\lambda(t) := \lambda$, then*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = v_\lambda$$

Proof. Lemmas 6.4.2 and 6.4.3 imply that

$$\|u(t) - v_\lambda\| = \|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \leq \frac{\|u'(t)\|}{\lambda(t)} \leq \|u'(0)\| \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

and the right member goes to 0 as t tends to $+\infty$. ■

6.4.2 Some generalities on the non-autonomous case

The case when the parametrization λ is not constant is more difficult to handle: the same method as in the proof of corollary 6.4.4 leads to

$$u(t+h) - u(t) + u'(t+h) - u'(t) = \Phi(\lambda(t+h), u(t+h)) - \Phi(\lambda(t), u(t))$$

but Proposition 6.3.4 does not apply.

However, we can prove if the perturbation is strong enough:

Proposition 6.4.5 *If $\int_0^{+\infty} \lambda(t) dt = +\infty$, the asymptotic behavior of u solution of (6.2.18) does not depend of the choice of $u(0)$.*

Proof. Let u and v be two solutions of (6.2.18), define the function g by $g(x) = \|u(x) - v(x)\|$. According to proposition 6.3.4,

$$g(x) \leq g(0) \cdot e^{-\int_0^x \lambda(t) dt}$$

from which the proposition follows. ■

6.4.3 Case of $\lambda(t) \simeq \frac{1}{t}$

When $\lambda(t) = \frac{1}{t}$, equation (6.2.18) is the continuous counterpart of equation (6.2.9), so we expect $u(t)$ to have the same asymptotic behavior as v_n . This will be proved with an additional hypothesis on Φ in the next section. Here we show a slightly weaker result without any assumption.

Proposition 6.4.6 *There exists a function $\lambda : [0, +\infty] \rightarrow]0, 1]$ such that $\lambda(t) \sim \frac{1}{t}$ and for which the solution w of (6.2.18) satisfies*

$$\|w(n) - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Proof.

Let U be the solution of (6.2.15) and $v(t) = \frac{U(t)}{t+1}$, which thus satisfies

$$(t+2)v(t) + (t+1)v'(t) = J((t+1)v(t)).$$

Define $\zeta(t) = t + \ln(1+t)$. By making the change of time $s = \zeta(t)$ and $w(s) = v(t)$, we get

$$w(s) + w'(s) = \Phi\left(\frac{1}{2 + \zeta^{-1}(s)}, w(s)\right)$$

and w is thus solution of (6.2.18) with

$$\lambda(t) = \frac{1}{2 + \zeta^{-1}(t)} = \frac{1}{t} + \frac{\ln(t)}{t^2} + o\left(\frac{\ln(t)}{t^2}\right).$$

Moreover,

$$\|w(n) - v_n\| \leq \|v(n) - v_n\| + \|v(\zeta^{-1}(n)) - v(n)\|.$$

We already know by Corollary 6.3.8 that $\|v(n) - v_n\|$ goes to 0 as n tends to $+\infty$. On the other hand, by the mean value Theorem,

$$\|v(\zeta^{-1}(n)) - v(n)\| \leq (n - \zeta^{-1}(n)) \cdot \max_{x \in [\zeta^{-1}(n), n]} \|v'(x)\|. \quad (6.4.6)$$

By definition of v , $v'(x) = \frac{(x+1)U'(x) - U(x)}{(x+1)^2}$ hence Corollary 6.3.6 implies that

$$\|v'(x)\| \leq \frac{(x+1)\|U'(x)\| + \|U(x)\|}{(x+1)^2} \quad (6.4.7)$$

$$\leq \frac{(x+1)\|U'(0)\| + \|U(0)\| + x\|U'(0)\|}{(x+1)^2} \quad (6.4.8)$$

$$\leq \frac{C}{x+1} \quad (6.4.9)$$

for $C = 2 \max(\|U(0)\|, \|U'(0)\|)$.

Replacing in equation (6.4.6) gives

$$\|v(\zeta^{-1}(n)) - v(n)\| \leq C \frac{n - \zeta^{-1}(n)}{1 + \zeta^{-1}(n)}$$

which goes to 0 since $\zeta(n) \sim n$, and we have thus proved that

$$\|w(n) - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

An interesting corollary of this Proposition, which gives a sufficient condition for convergence of both v_n and v_λ to the same limit, is:

Corollary 6.4.7 *Let U be the solution of (6.2.15). If $U'(t)$ converges to l when t goes to $+\infty$, then v_n and v_λ converge to l as well as n goes to $+\infty$ and λ goes to 0, respectively.*

Proof. Suppose that $U'(t)$ converges to l when t goes to $+\infty$. Then $v(t) = \frac{U(t)}{t}$ converges to l as well, and so does v_n according to Corollary 6.3.8.

On the other hand,

$$tv'(t) = U'(t) - \frac{U(t)}{t} \rightarrow l - l = 0$$

so $v'(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$. Define ζ , λ and w as in the proof of the preceding proposition ; then $w(t) = v(\zeta^{-1}(t))$ converges also to l and by definition

$$w'(\zeta(t)) = \frac{t+1}{t+2} v'(t) = o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Since $\zeta(t) \sim t$ and $\lambda(t) \sim \frac{1}{t}$ this implies that $\frac{\|w'(t)\|}{\lambda(t)} = o(1)$. According to Lemma 6.4.2, this implies that $\|w(t) - v_{\lambda(t)}\| = o(1)$, and so v_λ tends to l as λ goes to 0.

■

6.4.4 Case of a slow parametrization

From now on the following assumption (\mathcal{H}) will be made: there is a constant C such that

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\mu, x)\| \leq |\lambda - \mu|(C + \|x\|) \quad \forall x \in X \quad \forall (\lambda, \mu) \in]0, 1]^2. \quad (\mathcal{H})$$

Remark 6.4.8 (\mathcal{H}) is satisfied as soon as J is the Shapley operator (6.2.12) of a game with bounded payoff since in that case

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\mu, x)\|_\infty \leq |\lambda - \mu| (\|g\|_\infty + \|x\|_\infty)$$

Remark 6.4.9 Hypothesis (\mathcal{H}) implies that for every λ and μ

$$\frac{\|v_\lambda - v_\mu\|}{|\lambda - \mu|} \leq \frac{C'}{\lambda}$$

for some constant C' : in some sense (\mathcal{H}) is thus a statement about the speed of variation of the family $\{v_\lambda\}$.

The principal result of this subsection is Corollary 6.4.12 which states that under this hypothesis, if the parametrization λ converges slowly enough to 0, then the corresponding solution of (6.2.18) has the same asymptotic behavior as the family $\{v_\lambda\}$. We start by a technical result:

Proposition 6.4.10 *Let λ be a \mathcal{C}^1 function from $[0, +\infty[$ to $]0, 1]$ and let $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $L(t) = e^{\int_0^t \left[\frac{|\lambda'(s)|}{\lambda(s)} - \lambda(s) \right] ds}$. Then the corresponding solution u of (6.2.18) satisfies:*

$$\|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \leq \frac{L(t)}{\lambda(t)} \left[\|u'(0)\| + (C + C') \int_0^t \frac{|\lambda'(s)|}{L(s)} ds \right].$$

where C is the constant in condition (\mathcal{H}) and $C' = \sup_{\lambda \in]0, 1]} \|v_\lambda\|$.

Proof. For any $h > 0$, define

$$\begin{aligned} u_h(t) &= \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\ \lambda_h(t) &= \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h}. \end{aligned}$$

Since u is \mathcal{C}^1 ,

$$u_h(t) = u'(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u'(s) - u'(t) ds$$

which implies, by uniform continuity of u on any compact set, that the restriction of u_h to any closed interval converges uniformly to u' as h goes to 0. Similarly, the restriction of λ_h to any closed interval converges uniformly to λ' as h goes to 0.

Since u satisfies equation (6.2.18), for any h and t ,

$$\|u_h(t) + u'_h(t)\| = \frac{1}{h} \|\Phi(\lambda(t+h), u(t+h)) - \Phi(\lambda(t), u(t))\| \quad (6.4.10)$$

$$\leq \frac{1}{h} \|\Phi(\lambda(t+h), u(t+h)) - \Phi(\lambda(t+h), u(t))\| \quad (6.4.11)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{h} \|\Phi(\lambda(t+h), u(t)) - \Phi(\lambda(t), u(t))\| \\ &\leq (1 - \lambda(t+h)) \|u_h(t)\| + |\lambda_h(t)| (C + \|u(t)\|). \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

by hypothesis (\mathcal{H}) . According to Lemma 6.4.2, this implies that

$$\|u_h(t) + u'_h(t)\| \leq (1 - \lambda(t+h)) \|u_h(t)\| + |\lambda_h(t)| \left(C + C' + \frac{\|u'(t)\|}{\lambda(t)} \right). \quad (6.4.13)$$

where C' is a majorant of the family $\|v_\lambda\|$.

Fix $t_0 > 0$, and let $\varepsilon > 0$. Since $\lambda(t)$ is bounded from below on $[0, t_0]$ and using the uniform convergence of u_h to u' on $[0, t_0]$, one obtains that for h small enough, and for every $t \leq t_0$,

$$\|u_h(t) + u'_h(t)\| \leq \left(1 - \lambda(t+h) + \frac{|\lambda_h(t)|}{\lambda(t)} \right) \|u_h(t)\| + (C + C' + \varepsilon) |\lambda_h(t)|. \quad (6.4.14)$$

Then applying Proposition 6.3.4 to u_h implies that for any h small enough and $t \leq t_0$,

$$\|u_h(t)\| \leq e^{\int_0^t \left[\frac{|\lambda_h(s)|}{\lambda(s)} - \lambda(s+h) \right] ds} \left(\|u_h(0)\| + (C + C' + \varepsilon) \int_0^t |\lambda_h(s)| e^{\int_0^s \left[\lambda(r+h) - \frac{|\lambda_h(r)|}{\lambda(r)} \right] dr} ds \right).$$

Using the uniform convergence of λ_h and $\lambda(\cdot + h)$ on $[0, t_0]$, letting h go to 0 implies that for any $t \leq t_0$,

$$\|u'(t)\| \leq L(t) \left(\|u'(0)\| + (C + C' + \varepsilon) \int_0^t \frac{|\lambda'(s)|}{L(s)} ds \right).$$

Since this is true for every t_0 and ε , using Lemma 6.4.2 again gives

$$\|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \leq \frac{L(t)}{\lambda(t)} \left[\|u'(0)\| + (C + C') \int_0^t \frac{|\lambda'(s)|}{L(s)} ds \right].$$

■

Remark 6.4.11 *If in Proposition 6.4.10 we suppose in addition that λ is nonincreasing, we get the simpler inequality*

$$\|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \leq \frac{e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}}{\lambda^2(t)} \left[\|u'(0)\| - (C + C') \int_0^t \lambda(s) \lambda'(s) e^{\int_0^s \lambda(r) dr} ds \right].$$

As a corollary to Proposition 6.4.10 we can now prove:

Corollary 6.4.12 *Let λ be a C^1 function from $[0, +\infty[$ to $]0, 1]$, such that $\frac{\lambda'(t)}{\lambda^2(t)}$ converges to 0 as t goes to $+\infty$, and let u be the corresponding solution of equation (6.2.18). Then $\|u(t) - v_{\lambda(t)}\|$ goes to 0 as t goes to $+\infty$.*

Proof. First notice that $\left(\frac{1}{\lambda(t)}\right)' = o(1)$, so $\frac{1}{\lambda(t)} = o(t)$ which implies that $\lambda(t) \notin \ell^1$.

Next we prove that

$$\frac{L(t)}{\lambda(t)} = o(1).$$

Since the left-hand side is equal to $\frac{e^{\int_0^t \left[\frac{|\lambda'(s)|}{\lambda(s)} - \frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} - \lambda(s) \right] ds}}{\lambda(0)}$, the result is deduced from the fact that $\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} = o(\lambda(s))$ and that $\lambda(t) \notin \ell^1$.

Finally we prove that

$$\int_0^t \frac{|\lambda'(s)|}{L(s)} ds = o\left(\frac{\lambda(t)}{L(t)}\right).$$

Since the right-hand side diverges to $+\infty$, it is enough to prove that the derivative satisfies

$$\frac{|\lambda'(t)|}{L(t)} = o\left(\frac{\lambda'(t) + \lambda^2(t) - |\lambda'(t)|}{L(t)}\right)$$

which is true since $\lambda'(t) = o(\lambda^2(t))$.

■

Remark 6.4.13 *Note the similarity of this proposition with some approximation results for dynamical systems in the framework of Hilbert spaces, for example the slow parametrization in [2]:*

- *first there is a parallel between the strong monotonicity condition in [2] p. 523 and our assumption that the $\Phi(\lambda, \cdot)$ are contracting.*
- *Second between a condition about the derivative of the trajectory in the same paper p. 528 and our hypothesis (\mathcal{H}) (see remark 6.4.9).*
- *Third the slow-convergence condition is the same (see condition (ii) in [2] p. 528).*
- *Lastly, results of both papers are of the same nature: convergence of a certain family $\{v_\lambda\}$ in this paper) implies that the solution of any slowly-perturbed evolution equation tends to this limit as time goes to infinity.*

A difference however is the fact that in this paper we also have a reciprocal: if for any slow parametrization λ the solution $u(t)$ of (6.2.18) converges as t goes to infinity, then the family v_λ converges to the same limit as λ goes to 0.

Remark 6.4.14 *In the proof of Proposition 6.4.10 only the three following hypotheses on the family Φ were used:*

- (i) $\Phi(\cdot, x)$ satisfies condition \mathcal{H} for all x .
- (ii) $\Phi(\lambda, \cdot)$ is $1 - \lambda$ contracting for every $\lambda \in]0, 1]$.
- (iii) *The fixed points v_λ are uniformly bounded.*

The two last ones are satisfied as soon as $\Phi(\lambda, x) = \lambda J\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right)$ for a nonexpansive operator J , but this is not a necessary condition for Proposition 6.4.10 to hold.

Remark 6.4.15 *In fact, the more general result holds: suppose that the family Φ satisfies the three hypotheses:*

- (i) *There exists a constant C and a continuous function M from $]0, 1]$ to \mathbb{R}^+ such that for any (x, λ, μ) in $X \times]0, 1]^2$,*

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\mu, x)\| \leq \left| \int_\lambda^\mu M(\gamma) d\gamma \right| (C + \|x\|).$$

- (ii) *There exists a continuous function $\beta :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$ such that $\Phi(\lambda, \cdot)$ is $1 - \beta(\lambda)$ contracting.*
- (iii) *The fixed points v_λ of $\Phi(\lambda, \cdot)$ are uniformly bounded by C' .*

Let λ be a \mathcal{C}^1 function from $[0, +\infty[$ to $]0, 1]$. Then the corresponding solution u of (6.2.18) satisfies

$$\|u(t) - v_{\lambda(t)}\| \leq \frac{e^{\int_0^t \frac{|\lambda'(s)|M(\lambda(s))}{\beta(\lambda(s))} - \beta(\lambda(s)) ds}}{\beta(\lambda(t))} \left[\|u'(0)\| + (C + C') \int_0^t |\lambda'(s)|M(\lambda(s)) e^{\int_0^s [\beta(\lambda(i)) - \frac{|\lambda'(i)|M(\lambda(i))}{\beta(\lambda(i))}] di} ds \right].$$

This implies that $\|u(t) - v_{\lambda(t)}\|$ tends to 0 as soon as β is \mathcal{C}^1 and the parametrization λ satisfies both properties :

$$(iv) \quad \frac{\lambda'(t)M(\lambda(t))}{\beta^2(\lambda(t))} = o(1)$$

$$(v) \quad \frac{\lambda'(t)\beta'(\lambda(t))}{\beta^2(\lambda(t))} = o(1)$$

Notice again the similarity with [2].

Another interesting consequence of hypothesis (\mathcal{H}) is Corollary 6.4.17 which states that if two parametrizations are close to one other, then this is also the case for the trajectories. We first prove a technical result using the same approach as in the proof of Proposition 6.4.10:

Proposition 6.4.16 *Let u and v be the two solutions of (6.2.18) for some functions λ and μ respectively. Then for any $t \geq 0$,*

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{-\int_0^t \mu(s) ds} \left(\|u_0 - v_0\| + \int_0^t (C + \|u(s)\|) |\lambda(s) - \mu(s)| \cdot e^{\int_0^s \mu(i) di} ds \right)$$

Proof. Let $f = u - v$, then

$$\begin{aligned} \|f(t) + f'(t)\| &= \|\Phi(\lambda(t), u(t)) - \Phi(\mu(t), v(t))\| \\ &\leq \|\Phi(\lambda(t), u(t)) - \Phi(\mu(t), u(t))\| + \|\Phi(\mu(t), u(t)) - \Phi(\mu(t), v(t))\| \\ &\leq |\lambda(t) - \mu(t)| \cdot (C + \|u(t)\|) + (1 - \mu(t)) \cdot \|f(t)\| \end{aligned}$$

because of hypothesis (\mathcal{H}) and contraction of $\Phi(\lambda, \cdot)$. Applying Proposition 6.3.4 gives the result. \blacksquare

In particular one has:

Corollary 6.4.17 *Let u and v the two solutions of (6.2.18) for some functions λ and μ respectively. Assume that u is bounded and $\mu \notin \ell^1$, then $\|u(t) - v(t)\| \rightarrow 0$ in the two following cases:*

$$a) \quad \mu(t) \sim \lambda(t) \text{ as } t \text{ goes to } +\infty$$

$$b) \quad |\lambda - \mu| \in \ell^1.$$

Proof. Let L be a bound for u . By the preceding proposition we know that

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{-\int_0^t \mu(s) ds} \left(\|u_0 - v_0\| + (C + L) \int_0^t |\lambda(s) - \mu(s)| \cdot e^{\int_0^s \mu(i) di} ds \right)$$

so it suffices to show that

$$\int_0^t |\lambda(s) - \mu(s)| \cdot e^{\int_0^s \mu(i) di} ds = o\left(e^{\int_0^t \mu(s) ds}\right).$$

a) Assume that $\mu(t) \sim \lambda(t)$, that is $\frac{|\lambda(t) - \mu(t)|}{\mu(t)} = o(1)$. This implies that

$$|\lambda(t) - \mu(t)| \cdot e^{\int_0^t \mu(s) ds} = o\left(\mu(t) e^{\int_0^t \mu(s) ds}\right)$$

which gives the result by integrating.

b) Assume that $|\lambda - \mu| \in \ell^1$, let $\varepsilon > 0$ and T such that $\int_T^{+\infty} |\lambda(s) - \mu(s)| ds < \varepsilon$. Then for $t > T$,

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^t |\lambda(s) - \mu(s)| \cdot e^{\int_0^s \mu(i) di} ds \\ &= \int_0^T |\lambda(s) - \mu(s)| \cdot e^{\int_0^s \mu(i) di} ds + \int_T^t |\lambda(s) - \mu(s)| \cdot e^{\int_0^s \mu(i) di} ds \\ &\leq e^{\int_0^T \mu(s) ds} \int_0^T |\lambda(s) - \mu(s)| ds + e^{\int_0^t \mu(s) ds} \int_T^t |\lambda(s) - \mu(s)| ds \\ &\leq e^{\int_0^T \mu(s) ds} \int_0^T |\lambda(s) - \mu(s)| ds + \varepsilon e^{\int_0^t \mu(s) ds} \\ &\leq 2\varepsilon e^{\int_0^t \mu(s) ds} \end{aligned}$$

for all t large enough since $e^{\int_0^t \mu(s) ds}$ diverges to $+\infty$ as t goes to $+\infty$. ■

Some interesting corollaries follows immediately: first because of Corollary 6.4.4, we get the

Corollary 6.4.18 *If $\lambda(t) \rightarrow \lambda > 0$, then $u(t) \rightarrow v_\lambda$*

Then, combining the results of section 6.4.3 and Corollaries 6.4.12 and 6.4.17 we deduce the following Corollary bringing to light the tight difference between dynamics related to $\lim v_n$ and $\lim v_\lambda$:

Corollary 6.4.19 *For $\alpha \in [0, 1[$, let u^α be the solution of*

$$u(t) + u'(t) = \Phi\left((1+t)^{\alpha-1}, u(t)\right) \quad \text{with } u(0) = u_0 \quad (6.4.15)$$

Then $u^0(t)$ converges to some $l \in X$ when t goes to $+\infty$ iff v_n converges to l as n goes to $+\infty$; and for $\alpha \in]0, 1[$ $u^\alpha(t)$ converges to some $l \in X$ as t goes to $+\infty$ iff v_λ converges to l as λ goes to 0.

6.4.5 Back to discrete time

We proved in the last section that under hypothesis (\mathcal{H}) , the solution of (6.2.18) has the same asymptotic behavior as the family $\{v_\lambda\}$ as soon as λ converges slowly enough to 0. One may wonder if it is true as well in discrete time. For any sequence $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $]0, 1]$, define the discrete counterpart of equation (6.2.18) :

$$w_n = \Phi(\lambda_n, w_{n-1}) \quad \text{with } w(0) = w_0 \quad (6.4.16)$$

Then one obtains the discrete version of Corollary 6.4.12 :

Proposition 6.4.20 *Let λ_n be a sequence in $]0, 1]$. Assume that both λ_n and $\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}$ tend to 0 as n goes to $+\infty$. Then the solution $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of (6.4.16) satisfies*

$$\|v_{\lambda_n} - w_n\| \rightarrow 0$$

as n goes to $+\infty$.

Proof. The sequence $\gamma_n = \frac{1}{\lambda_n}$ tends to $+\infty$ and satisfies $\gamma_n - \gamma_{n-1} \rightarrow 0$ as n goes to $+\infty$. This implies the existence of an interpolation function $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ which is \mathcal{C}^2 and such that for all n in \mathbb{N} , $\gamma(n) = \gamma_n$, $\lim_{+\infty} \gamma(t) = +\infty$ and $\lim_{+\infty} \gamma'(t) = 0$. The function $\lambda := \frac{1}{\gamma}$ thus satisfies $\lambda(n) = \lambda_n$ and all the hypotheses of Corollary 6.4.12. Let us denote by u the corresponding solution of equation (6.2.18). By Corollary 6.4.12 it is enough to show that $\|w_n - u(n)\| \rightarrow 0$ as n goes to $+\infty$.

Define $a_n := \|w_n - u(n)\|$ and let $\varepsilon > 0$. Then

$$\begin{aligned} a_n &= \|\Phi(\lambda_n, w_{n-1}) - \Phi(\lambda_n, u(n)) + u'(n)\| \\ &\leq (1 - \lambda_n)\|w_{n-1} - u(n)\| + \|u'(n)\| \\ &\leq (1 - \lambda_n)\|w_{n-1} - u(n-1)\| + \|u(n) - u(n-1)\| + \|u'(n)\| \\ &\leq (1 - \lambda_n)a_{n-1} + 2 \sup_{t \in [n-1, n]} \|u'(t)\| \\ &\leq (1 - \lambda_n)a_{n-1} + 2 \sup_{t \in [n-1, n]} \left\| \frac{u'(t)}{\lambda(t)} \right\| \cdot \sup_{t \in [n-1, n]} \lambda(t) \\ &\leq (1 - \lambda_n)a_{n-1} + 2\varepsilon \sup_{t \in [n-1, n]} \lambda(t) \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

for every n large enough because of Corollary 6.4.12.

Denote $s_n = \max_{t \in [n-1, n]} \lambda(t) = o(1)$, and choose $t_n \in [n-1, n]$ such that $s_n = \lambda(t_n)$. Let $T > 0$ such that $|\lambda'(t)| \leq \lambda^2(t)$ for every $t \geq T$, then by the mean value Theorem, for any $n \geq T+1$,

$$\begin{aligned} |s_n - \lambda_n| &= |\lambda(t_n) - \lambda(n)| \\ &\leq |t_n - n| \cdot \sup_{t \in [n-1, n]} |\lambda'(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [n-1, n]} \lambda^2(t) \\ &= s_n^2 \\ &= o(s_n) \end{aligned}$$

so that $s_n \sim \lambda_n$ as n goes to $+\infty$. Together with (6.4.17) this implies that there exists N such that for all $n \geq N$,

$$a_n \leq (1 - \lambda_n)a_{n-1} + 3\varepsilon\lambda_n$$

and so by induction one prove that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{N+k} - 3\varepsilon \leq (a_N - 3\varepsilon) \prod_{i=1}^k (1 - \lambda_{N+i})$$

Now $\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n-1}} \rightarrow 0$ implies that $\frac{1}{n} = o(\lambda_n)$, so the product goes to 0 and we deduce that $a_{N+k} \leq 4\varepsilon$ for k large enough. \blacksquare

Corollary 6.4.21 *v_λ converges as λ goes to 0 if and only if there exists a sequence λ_n satisfying the hypothesis of Proposition 6.4.20 such that the corresponding sequence w_n defined by (6.4.16) converges.*

Proof. Let λ_n such that w_n converges. Because of Proposition 6.4.20, v_{λ_n} converges. Moreover, for all λ and μ , hypothesis (\mathcal{H}) implies that, denoting $C' = \sup_{\lambda \in]0,1]} \|v_\lambda\|$

$$\begin{aligned} \|v_\lambda - v_\mu\| &= \|\Phi(\lambda, v_\lambda) - \Phi(\mu, v_\mu)\| \\ &\leq \|\Phi(\mu, v_\lambda) - \Phi(\mu, v_\mu)\| + \|\Phi(\lambda, v_\lambda) - \Phi(\mu, v_\lambda)\| \\ &\leq (1 - \mu)\|v_\lambda - v_\mu\| + |\lambda - \mu|(C + C') \end{aligned}$$

and thus that

$$\|v_\lambda - v_\mu\| \leq \left|1 - \frac{\lambda}{\mu}\right| (C + C'). \quad (6.4.18)$$

Since $\lambda_n \rightarrow 0$ and $\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 0$, $|1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}|$ also converges to 0. Together with inequality (6.4.18) and the fact that v_{λ_n} converges it implies the convergence of v_λ as λ goes to 0.

Conversely, if v_λ converges, then Proposition 6.4.20 implies that the sequence w_n defined by equation (6.4.16) converges as soon as λ_n and $\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}$ tend to 0. \blacksquare

As in the section 3 (Example 6.3.2), there is an interpretation in terms of games with uncertain duration:

Example 6.4.22 *Consider the case of a game with Shapley operator J . Let $\{\lambda_n\}$ be a sequence in $]0, 1]$ and w_n defined by equation (6.4.16). Then w_n is the value of the following game with uncertain duration: with probability λ_n the game stops after stage 1, and the payoff is the payoff during stage 1. With probability $1 - \lambda_n$ there is no payoff during stage 1 but a transition, and game goes to stage 2. Then, conditionally to the game going to stage 2, with probability λ_{n-1} the game stops after stage 2, and the payoff is the payoff during stage 2 ; and with probability $1 - \lambda_{n-1}$ there is no payoff during stage 2 but a transition, and game goes to stage 3. If the game goes to stage n , with probability λ_1 the payoff is the payoff during stage n and with probability $1 - \lambda_1$ the payoff is 0. Proposition 6.4.20 then states that if $\{\lambda_n\}$ is of slow variation, the value of this game with uncertain duration is close to the value of the λ_n -discounted game.*

As a final remark to this section, notice the way in which we proved Proposition 6.4.20, with a back and forth process to continuous dynamics ; it should be interesting to search another proof using only discrete time methods.

6.5 Concluding remarks

- In this paper we proved that the asymptotic behavior of v_n and v_λ can be derived from the asymptotic behavior of solutions of some evolutions equations, namely (6.2.15) and (6.2.17). It should thus be interesting to determine which additional conditions on the nonexpansive operator J may imply convergence of the solutions of these equations, and so convergence of v_n and v_λ .
- Notice that Corollary 6.4.19 hints that v_λ and v_n should have the same asymptotic behavior for a wide class of nonexpansive operators, since the study of $\lim v_n$ seems to be a limit case of the study of $\lim v_\lambda$. Of interest is also Corollary 6.4.7 which gives a sufficient condition for existence of both $\lim v_n$ and $\lim v_\lambda$ as well as their equality.
- In Examples 6.3.2 and 6.4.22 we saw that some results that arose naturally during this paper have a nice interpretation in the framework of games with uncertain duration. In particular we showed that for specific types of uncertain duration, the value of those games behave asymptotically either as v_n or v_λ as the expected time played tends to infinity. Following [40, 42] it thus should be interesting to study uncertain duration more generally, hoping that some conditions on the Shapley Operator will provide convergence of values for more than just finitely repeated and discounted games.

Acknowledgments

This article was written during the course of my PhD thesis. I would like to thank my advisor Sylvain Sorin as well as Jérôme Bolte, Juan Peypouquet and an anonymous referee for very helpful comments and references.

6.6 Compléments

6.6.1 Opérateurs réduits

On peut noter que les opérateurs réduits $\widehat{\Phi}$, bien que n'étant pas des opérateurs de Shapley (voir section 4.3.4), satisfont tout de même les hypothèses de la remarque 6.4.14. Par conséquent, pour toute paramétrisation λ telle que $\frac{\lambda(t)}{\lambda^2(t)}$ converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, la solution \widehat{u} de

$$\widehat{u}(t) + \widehat{u}'(t) = \widehat{\Phi}(\lambda(t), \widehat{u}(t))$$

a le même comportement asymptotique que la famille de valeurs réduites \widehat{v}_λ .

6.6.2 Une conséquence de l'inégalité de Kobayashi

Il est intéressant de remarquer qu'en utilisant la théorie des quasi-orbités (voir [1]), le corollaire 6.3.12 a comme conséquence la proposition suivante [44] :

Proposition 6.6.1 *Soit $J : X \rightarrow X$ non dilatant ayant au moins un point fixe, soit $\lambda_n \in \ell^2 \setminus \ell^1$, et soient U et x_n définies par (6.3.1) et (6.3.2) :*

$$U'(t) = -A(U(t))$$

et

$$x_n - x_{n-1} = -\lambda_n A x_{n-1}.$$

où l'on a posé $A=I-J$. Alors :

- a) *Si pour toute condition initiale $U(t)$ converge (resp. converge en moyenne, converge faiblement) quand t tend vers $+\infty$, alors pour toute condition initiale x_n converge (resp. converge en moyenne, converge faiblement) lorsque n tend vers $+\infty$.*
- b) *Si pour toute condition initiale x_n converge (resp. converge en moyenne, converge faiblement) quand n tend vers $+\infty$, alors pour toute condition initiale $U(t)$ converge (resp. converge en moyenne, converge faiblement) lorsque t tend vers $+\infty$.*

Bibliographie

- [1] F. Alvarez and J. Peypouquet, Asymptotic almost-equivalence of abstract evolution systems. *Preprint* (2008).
- [2] H. Attouch and R. Cominetti, A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method. *Journal of Differential Equations* **128** (1996) 269-275.
- [3] R. J. Aumann and M. Maschler with the collaboration of R. E. Stearns, *Repeated Games with Incomplete Information*. MIT Press (1995).
- [4] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Noordhoff International Publishing (1976).
- [5] T. Bewley and E. Kohlberg, The asymptotic theory of stochastic games. *Mathematics of Operations Research* **1** (1976) 197-208.
- [6] T. Bewley and E. Kohlberg, The asymptotic solution of a recursion equation occurring in stochastic games. *Mathematics of Operations Research* **1** (1976) 321- 336.
- [7] D. Blackwell, An analog of the minmax theorem for vector payoffs. *Pacific Journal of Mathematics* **6** (1956) 1-8.
- [8] D. Blackwell, Discrete dynamic programming. *The Annals of Mathematical Statistics* **33** (1962) 719-726.
- [9] D. Blackwell and T. Ferguson, The "Big Match". *Annals of Mathematical Statistics* **39** (1968) 159- 163.
- [10] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. Math. Studies 5, North Holland (1973).
- [11] J.-M. Coulomb, Games with a recursive structure. Chapter 28 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003)
- [12] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces. *Amer. J. Math.* **93** (1971) 265-298.
- [13] B. De Meyer, Repeated games, duality and the central limit theorem. *Mathematics of Operations Research* **21** (1976) 237- 251.
- [14] E. Dynkin and A. Yushkevich *Controlled Markov Processes*. Springer (1979).
- [15] H. Everett, Recursive games. In *Contributions to the Theory of Games, III* (H. W. Kuhn and A.W. Tucker, eds.), Annals of Mathematical Studies 39, Princeton University Press (1957) 47-78.

- [16] S. Gaubert and J. Gunawardena, The Perron-Frobenius theorem for homogeneous, monotone functions. *Trans. of the AMS* **356** (2004) 4931-4950.
- [17] S. Gaubert and J. Gunawardena, Existence of the cycle time for some subtopical functions *Privately circulated draft* (2006)
- [18] D. Gillette, Stochastic games with zero stop probabilities. In *Contributions to the Theory of Games, III* (H. W. Kuhn and A.W. Tucker, eds.), Annals of Mathematical Studies 39, Princeton University Press (1957) 179-187.
- [19] J. Gunawardena, From max-plus algebra to nonexpansive maps : a nonlinear theory for discrete event systems. *Theoretical Computer Science* **293** (2003) 141-167.
- [20] J. Gunawardena and M. Keane, On the existence of cycle times for some nonexpansive maps, in *Technical Report HPL-BRIMS-95-003* edited by Hewlett-Packard Labs (1995).
- [21] T. Kato, Nonlinear semi-groups and evolution equations. *J. Math Soc. Japan* **19** (1967) 508-520.
- [22] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups. *J. Math Soc. Japan* **27** (1975) 640-665.
- [23] E. Kohlberg, Repeated games with absorbing states. *Annals of Statistics* **2** (1974), 724-738.
- [24] E. Kohlberg and A. Neyman, Asymptotic behavior of nonexpansive mappings in normed linear spaces. *Israel Journal of Mathematics* **38** (1981) 269-275.
- [25] V. N. Kolokoltsov and V. P. Maslov, *Idempotent Analysis and its Applications*. Mathematics and its Applications vol. 401, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1997).
- [26] R. Laraki, Repeated games with lack of information on one side : the dual differential approach. *Mathematics of Operation Research* **27** (2002) 419-440.
- [27] E. Lehrer and S. Sorin, A uniform Tauberian theorem in dynamic programming. *Mathematics of Operation Research* **17** (1992) 303-307.
- [28] E. Lehrer and D. Monderer, Discounting versus averaging in dynamic programming. *Games and Economics Behavior* **6** (1994) 97-113.
- [29] J.-F. Mertens, Repeated Games. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986*, A. M. Gleason (ed.), American Mathematical Society (1987) 1528-1577.
- [30] J.-F. Mertens and S. Zamir, The value of two player zero sum repeated games with lack of information on both sides. *International Journal of Game Theory* **1** (1971) 39-64.
- [31] J.-F. Mertens and S. Zamir, Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information. *International Journal of Game Theory* **14** (1985) 1-29.
- [32] J.-F. Mertens and A. Neyman, Stochastic games. *International Journal of Game Theory* **10** (1981) 53-66.

- [33] J.-F. Mertens, A. Neyman and D. Rosenberg, Absorbing games with compact action spaces. *Mathematics of Operation Research* **34** (2009) 257-262.
- [34] J.-F. Mertens, S. Sorin and S. Zamir, *Repeated Games*. Univ. Catholique de Louvain, Center for Operations Research & Econometrics D.P. 9420-21-22 (1994).
- [35] H. D. Mills, Marginal values of matrix games and linear programs. In *Linear Inequalities and Related Systems*, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Annals of Mathematical Studies 38, Princeton University Press (1956) 183-193.
- [36] I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators. *Tôhoku Mathematical Journal* **22** (1970) 24-47.
- [37] J.-J. Moreau, Propriétés des applications "prox". *C. R. Acad. Sci. Paris* **256** (1963) 1069-1071.
- [38] D. Monderer and S. Sorin, Asymptotic properties in dynamic programming. *International Journal of Game Theory* **22** (1993) 1-11.
- [39] J. von Neumann, Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* **100** (1928) 295-320.
- [40] A. Neyman, Stochastic games and nonexpansive maps. Chapter 26 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [41] A. Neyman and S. Sorin, *Stochastic Games and Applications*. Kluwer Academic Publishers (2003).
- [42] A. Neyman and S. Sorin, Repeated games with public uncertain duration process. *Preprint* (2009).
- [43] A. Nowak, Zero-sum stochastic games with Borel state spaces. Chapter 7 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [44] J. Peypouquet and S. Sorin, Evolution equations for maximal monotone operators : asymptotic analysis in continuous and discrete time. *Preprint*. (2009).
- [45] M. Quincampoix and J. Renault, On the existence of a limit value in some non expansive optimal control problems. *Preprint*.
- [46] S. Reich, Asymptotic behavior of semigroups of nonlinear contractions in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **53** (1976) 277-290.
- [47] J. Renault, The value of Markov chain games with lack of information on one side. *Mathematics of Operation Research* **31** (2006) 490-512.
- [48] J. Renault, The value of repeated games with an informed controller. *Preprint* (2007).
- [49] J. Renault, Uniform value in dynamic programming. *Preprint* (2007).
- [50] R. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton University Press (1970).
- [51] D. Rosenberg, Zero-sum absorbing games with incomplete information on one side : Asymptotic analysis. *SIAM Journal of Control and Optimization* **39** (2000) 208-225.
- [52] D. Rosenberg, E. Solan and N. Vieille, Stochastic games with a single controller and incomplete information. *SIAM Journal on Control and Optimization* **43** (2004) 86-110.

- [53] D. Rosenberg and S. Sorin, An operator approach to zero-sum repeated games. *Israel Journal of Mathematics* **121** (2001) 221-246.
- [54] D. Rosenberg and N. Vieille, The maxmin of recursive games with lack of information on one side. *Mathematics of Operations Research* **25** (2000) 23-35.
- [55] L. S. Shapley, Stochastic games. *Proc. Nat. Acad. Sciences* **39** (1953) 1095-1100.
- [56] M. Sion, On general minimax theorems. *Pacific Journal of Mathematics* **8** (1958) 171-176.
- [57] S. Sorin, "Big Match" with lack of information on one side (Part I). *International Journal of Game Theory* **13** (1984) 201-255.
- [58] S. Sorin, "Big Match" with lack of information on one side (Part II). *International Journal of Game Theory* **14** (1984) 173-204.
- [59] S. Sorin, *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*. Springer (2002).
- [60] S. Sorin, Classification and basic tools. Chapter 3 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [61] S. Sorin, Discounted stochastic games : the finite case. Chapter 5 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [62] S. Sorin, Stochastic games with incomplete information. Chapter 25 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [63] S. Sorin, The operator approach to zero-sum stochastic games. Chapter 27 in A. Neyman and S. Sorin (eds), *Stochastic Games and Applications*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [64] S. Sorin, Asymptotic properties of monotonic nonexpansive mappings. *Discrete Events Dynamical Systems* **14** (2004) 109-122.
- [65] S. Sorin, Structure réursive des jeux répétés. *Groupe de travail "Advances in Game Theory"*, École Polytechnique (2008).
- [66] S. Sorin and S. Zamir, "Big Match" with lack of information on one side (Part. III). in T.E.S. Raghavan (ed), *Stochastic Games and Related Topics*, Kluwer Academic Publishers (1991) 101-112.
- [67] N. Vieille, Weak approachability. *Mathematics of Operations Research* **17** (1992) 781-791.
- [68] G. Vigeral, Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces. *To appear in ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variation* (2009).
- [69] G. Vigeral, Values of stochastic games and iterated monotonic nonexpansive operators. *Preprint* (2009).
- [70] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*. Springer-Verlag (1970).