Université Paris Dauphine
Licence de mathématiques appliquées
Analyse complexe

TD 5. Théorème des résidus

Exercice 1. Soit f et g deux fonctions méromorphes sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si f est holomorphe en z_0 et si g a un zéro simple en z_0, c'est-à-dire $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$, alors

$$\mathrm{Res}(f/g, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\cdot$$

Exercice 2. Localiser les singularités isolées de chacune des fonctions suivantes, et les caractériser :

$$a(z) = \frac{z^2}{(z+1)^3}\,,\ b(z) = \frac{1-\cos(z)}{z}\,,\ c(z) = e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}\,,\ d(z) = \frac{z^3+1}{z^4-1}\cdot$$

Déterminer les pôles et les résidus de chacune des fonctions suivantes :

$$e(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\,,\ f(z) = \frac{\sin(z)}{(z+2)^2}\,,\ g(z) = \frac{ze^z}{(z-3)^2}\,,\ h(z) = cotan(z).$$

Exercice 3. Soit γ défini sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = e^{it}$. Calculer la valeur des intégrales

$$I = \int_\gamma \frac{z^2-2z+2}{(2z-1)^2}dz\,,\ J = \int_\gamma \frac{z^2+1}{z(3z-1)}dz\,,\ K = \int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)}dz\,,\ L = \int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2-2z}dz\,\cdot$$

Exercice 4. Calculer la valeur des intégrales

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\cos^2(t)}\,,\ J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx\,,\ K = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin(t)}\,,$$

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Exercice 5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $F(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2-\lambda x}dx.$

1. Montrer que la fonction F est bien définie sur tout $\mathbb{C}$.

2. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ fixé.

2.1. Montrer que $F(\lambda) = e^{a^2/2+iab}F(ib)$ à l'aide du changement de variables $y = x + a$.

2.2. Pour $R > 0$ fixé on considère le chemin γ_R formé des 4 segments $[-R, -R - ib]$, $[-R - ib, +R - ib]$, $[+R - ib, +R]$, $[+R, -R]$ parcourus dans cet ordre, une seule fois et dans le sens trigonométrique. Montrer que

$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2/2}dz = 0.$$

2.3. En déduire que
$$F(-ib) = F(0)e^{-b^2/2}.$$

2.4. On admet que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$
Montrer que
$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{\lambda^2/2}.$$

Exercice 6. **1.** Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i(\frac{\pi}{2} + n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer qu'elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'elle possède un pôle d'ordre 1 en $i\frac{\pi}{2}$, de résidu égal à $1/(2i)$.

2. Pour $R > 0$ fixé on considère le chemin γ_R formé des 4 segments $[-R, +R]$, $[+R, +R+i\pi]$, $[+R + i\pi, -R + i\pi]$, $[-R + i\pi, -R]$ parcourus dans cet ordre, une seule fois et dans le sens trigonométrique.

2.1. Calculer la valeur de l'intégrale
$$I(R) = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz.$$

2.2. Montrer que
$$I(R) = 2\int_{-R}^{R} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + 2i \int_0^{\pi} \frac{dy}{e^{R+iy} + e^{-R-iy}}.$$

2.3. Montrer que
$$\left| \int_0^{\pi} \frac{dy}{e^{R+iy} + e^{-R-iy}} \right| \le \frac{\pi}{e^R - 1}$$
et conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ est convergente et de valeur $\pi/2$.

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma_R(t) = R\, e^{it}$ pour $R > |z_0|$.

1. Calculer
$$I(R) = \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\, dz.$$

2. On suppose que la fonction f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que
$$|I(R)| \le \frac{2\pi}{R - |z_0|} \sup\{|f(z)|, z \in \mathbb{C}\}.$$

3. En déduire que la fonction f est constante sur $\mathbb{C}$.