Université Paris Dauphine
Licence de mathématiques appliquées
Analyse complexe

TD 1. Révisions : nombres complexes, séries, topologie

Exercice 1. Dans le plan complexe, placer i, $-1+i\sqrt{3}$, et $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Donner la partie réelle, imaginaire, le module et l'argument de chacun de ces nombres.

Décrire géométriquement les transformations $z \to z+i$, $z \to iz$, $z \to 2z$, et $z \to (-1+i\sqrt{3})z$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 3. Étudier le comportement des suites z^n et $z^n/(1-z^n)$ suivant les valeurs de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4. Rappeler et redémontrer les critères de d'Alembert et de Cauchy sur la convergence des séries à termes strictement positifs. Si u_n est une suite de réels strictement positifs telle que u_{n+1}/u_n converge vers l, montrer que $u_n^{1/n}$ converge vers l.

Exercice 5. 1. Soit v_n une suite de réels positifs décroissante et tendant vers 0 et u_n une suite de réels dont la suite des sommes partielles est bornée. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.

2. Soit v_n une suite de réels positifs décroissante. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$

$$\Big| \sum_{k=q+1}^{s} v_k e^{ik\theta} \Big| \leq \frac{v_{q+1}}{|\sin(\theta/2)|}.$$

Exercice 6. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs complexes absolument convergentes, et soit

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente et que sa somme est égale à $\displaystyle\sum_n u_n \sum_k v_k$.

Exercice 7. Rappeler et prouver le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La formule des accroissements finis s'étend-elle aux fonctions différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$?

Exercice 8. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus S^1$

$$\frac{z^n - 1}{z^n + 1}$$

converge quand $n \to +\infty$. Notant $f(z)$ la limite de cette suite, la fonction f ainsi définie possède-t-elle un prolongement continu sur $\mathbb{C}$?

Exercice 9. Soit C le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé par la réunion du segment $[(0,-1),(0,1)]$ et du graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$, $x > 0$. Montrer que C est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 10. Soit F un sev de dimension p de $\mathbb{R}^n$, à quelle condition $\mathbb{R}^n \setminus F$ est il-connexe ?