

Mémoire d'initiation à la recherche

**Étude du modèle de Cucker et Smale :
convergence de systèmes dynamiques**

Mathilde Bonnetier,

sous la supervision d'Amic Frouvelle



Table des matières

1	Introduction	3
2	Description du modèle	3
3	Réduction du système dynamique C-S au SDID dynamique	5
4	Théorème de flocking	7
5	Applications du théorème de flocking dans des cas simples	9
5.1	Exemple avec flocking	9
5.2	Exemple sans flocking	12
5.3	Étude théorique du noyau d'interaction régulier	15
6	Cas plus complexe	16
6.1	Théorème de flocking complet	16
6.2	Noyau d'interaction singulier	17
7	Modélisation informatique	18
7.1	Implémentation	18
7.2	Résultats	19
8	Limites du modèle et alternatives	19
9	Conclusion	20
9.1	Remerciements	20

1 Introduction

On s'intéresse dans ce document à l'organisation spatiale de groupes d'individus. Les résultats permettent en particulier de décrire des groupes d'animaux (on pensera notamment aux bancs de poissons ou aux nuées d'oiseaux), mais peuvent être étendus à des domaines plus larges (comportements politiques, émergence de langues...).

Plus précisément, on cherche à donner des conditions dans lesquelles on peut prédire de manière sûre que l'ensemble d'individus formera bien un groupe sur des temps longs, *i.e.* les vitesses des individus tendent vers la même valeur et leurs distances au centre de masse du système sont bornées : on parle de phénomène de « flocking » (de « flock », le troupeau, en anglais), ou de convergence à un consensus.

On utilise pour cela le modèle établi par Felipe Cucker et Steve Smale en 2007, dans [2]. Ce modèle décrit le mouvement des individus en donnant pour chacun l'expression de son accélération en fonction des vitesses et positions des autres, ainsi que d'une fonction d'interaction (ou noyau d'interaction) : chaque individu cherche à adapter son allure à celle des autres.

Le présent document vise à donner une preuve du théorème de flocking énoncé par Seung-Yeal Ha et Jian-Guo Liu en 2009 dans [1]. On commence par établir que le modèle de Cucker et Smale peut se réduire au système différentiel d'inégalités dissipatif suivant (on notera SDID dans la suite) :

$$\left| \frac{dX}{dt} \right| \leq V, \quad \frac{dV}{dt} \leq -\phi(X)V, \quad (1)$$

où (X, V) sont des fonctions positives et ϕ est une fonction positive mesurable. Le théorème permet ensuite de voir que si les vitesses initiales des individus sont assez petites ou le taux de communication assez grand pour des individus éloignés, on a bien l'établissement d'un groupe au bout d'un certain temps. Une fois ce théorème posé, on pourra s'intéresser à ses conséquences dans des cas simples (quand le noyau d'interaction est simple). On illustrera ces propos par des simulations informatiques.

2 Description du modèle

On considère un système de N individus identiques de masse unitaire et de volume supposé nul qui interagissent. Soit $(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{v}_i(t)) \in \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$ le couple position-vitesse de la particule i , avec $1 \leq i \leq N$. Ce couple vérifie le système d'équations de Cucker et Smale (on notera C-S) si on a :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=0}^n \psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i), \quad t > 0, \quad (2)$$

avec pour conditions initiales

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}.$$

Ici λ et ψ sont des entités positives. λ est une force de couplage, et ψ est le noyau d'interaction entre deux individus autonomes. ψ représente le taux de communication entre deux individus : plus $\psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)$ est grand et plus les individus i et j chercheront à adapter leur allure à celle de l'autre.

On peut remarquer que le champ de vecteurs $(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{F})$, $\mathbf{F}^i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$ associé à (2) satisfait la condition de dissipation suivante :

$$\nabla_{(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \cdot (\mathbf{v}, \lambda \mathbf{F}) = \lambda \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{F}^i = -\frac{\lambda}{N} \sum_{i,j=1}^N \psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \leq 0$$

Ceci implique que le modèle de C-S (2) est un système dynamique dissipatif. Cette observation est relativement cruciale, puisque c'est la dissipation de l'énergie du système (ou du moins d'une quantité qui s'apparente à l'énergie du système) qui nous permettra d'établir le théorème central de ce document.

On va maintenant voir qu'on peut étudier les fluctuations de position et de vitesse des individus plutôt que toutes leurs caractéristiques. Ceci nous permettra de simplifier la suite.

Soit $(\mathbf{x}_c, \mathbf{v}_c)$ le centre de masse du système :

$$\mathbf{x}_c := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{v}_c := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k.$$

D'après (2), on a alors :

$$\frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = \mathbf{v}_c, \quad \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = 0.$$

Ceci donne une solution explicite : $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}_c(0) + t\mathbf{v}_c(0)$, $\mathbf{v}_c(t) = \mathbf{v}_c(0)$.

Plutôt que de considérer les variables $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$, on peut regarder $(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i) := (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c)$, c'est-à-dire s'intéresser aux fluctuations des individus autour du centre de masse du système.

De plus, sans perte de généralité, on peut supposer que le centre de masse du système est fixé à l'origine au temps t :

$$\mathbf{x}_c(t) = 0, \mathbf{v}_c(t) = 0, \tag{3}$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(t) = 0, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Dans la suite, on se placera dans le cas où (3) est vérifiée (le centre de masse est fixe, à l'origine).

3 Réduction du système dynamique C-S au SDID dynamique

Dans cette partie, on montre que, dans le cas où le centre de masse est fixé à l'origine, le système de C-S (2) peut être réduit au SDID (1). En effet, le théorème de flocking s'applique au SDID. En établissant la correspondance entre les deux systèmes, on pourra utiliser le théorème pour dire des choses du SDID et, par suite, du comportement du groupe d'individus.

D'après le système de C-S (2), on a :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i\|^2 = -\frac{\lambda}{N} \sum_{1 \leq i, j \leq N} \psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\|^2. \quad (5)$$

On pose

$$\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{Nd}, \quad \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in \mathbb{R}^{Nd},$$

et

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{v}\| = \left(\sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.1. *Soit $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$ une solution de (2) avec une fonction ψ positive et décroissante. On suppose (3) (centre de masse fixe). Alors $\|\mathbf{x}\|$ et $\|\mathbf{v}\|$ satisfont le SDID (1) avec $\phi(s) = \psi(2s)$:*

$$\left| \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \right| \leq \|\mathbf{v}\|, \quad \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \leq -\frac{\lambda}{N} \psi(2\|\mathbf{x}\|) \|\mathbf{v}\|. \quad (6)$$

Démonstration. On effectue le produit scalaire du système C-S (2) avec $\pm 2\mathbf{x}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne ensuite

$$\pm \frac{d\|\mathbf{x}\|^2}{dt} = \pm 2 \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{x} \right\rangle = \pm 2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \leq 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{v}\|,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^{Nd} . Ceci donne la première inégalité dans (6). Puis, on a

$$\max_{1 \leq i, j \leq N} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq 2\|\mathbf{x}\|,$$

et on utilise (5), ainsi que la positivité et décroissance de la fonction ψ , ce qui donne

$$\frac{d\|\mathbf{v}\|^2}{dt} \leq -\frac{\lambda}{N} \psi(2\|\mathbf{x}\|) \sum_{1 \leq i, j \leq N} \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\|^2 = -\frac{2\lambda}{N} \psi(2\|\mathbf{x}\|) \|\mathbf{v}\|^2.$$

En effet, avec (4) on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 = 2 \sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i\|^2 - 2 \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \right\rangle = 2\|\mathbf{v}_i\|^2.$$

Ceci donne la seconde inégalité dans (6). \square

On peut effectuer la réduction précédente de manière plus abstraite. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme correspondante $\|\cdot\|$. Soit $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \in \mathbb{R}^{2d}$ la coordonnée du i -ème agent autonome parmi N agents dans l'espace des phases. Dans ce cas, E est simplement l'espace \mathbb{R}^{2Nd} des phases à N -particules.

On considère le système dynamique suivant dans $E \times E$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -L(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad t > 0, \quad (7)$$

avec pour conditions initiales

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0,$$

où $L(\mathbf{x}) : E \rightarrow E$ est un opérateur linéaire (en \mathbf{v}). On suppose que l'opérateur linéaire $L(\mathbf{x})$ satisfait une condition de coercivité : il existe une fonction f mesurable décroissante et strictement positive telle que

$$\langle L(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq f(\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{v}\|^2. \quad (8)$$

Ceci nous donne ensuite que les normes $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ de la solution (\mathbf{x}, \mathbf{v}) du système (7) avec (8) satisfont le SDID (1). En effet, avec (7), on a que

$$\begin{aligned} \frac{d\|\mathbf{x}\|^2}{dt} &= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \leq 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{v}\|, \\ \frac{d\|\mathbf{v}\|^2}{dt} &= -2\langle L(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq -2f(\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

En simplifiant par $2\|\mathbf{x}\|$ et $2\|\mathbf{v}\|$, ceci donne le SDID suivant, qui est celui que nous utiliserons dans la suite :

$$\left| \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \right| \leq \|\mathbf{v}\|, \quad \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \leq -f(\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{v}\|.$$

Le système de C-S (2) vérifie les hypothèses (7) et (8), pour $f = \psi$. On ré-écrit donc ce système comme :

$$\left| \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \right| \leq \|\mathbf{v}\|, \quad \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \leq -\psi(\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{v}\|. \quad (9)$$

Définition 3.2. *Le système de C-S (2) admet un flocking asymptotique (en t) si et seulement si les solutions $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, i = 1, \dots, N$ de (2) satisfont les deux conditions suivantes :*

1. *Les fluctuations de vitesse tendent vers zéro asymptotiquement en t (alignement des vitesses) :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_c(t)\|^2 = 0.$$

2. Les fluctuations de position sont uniformément bornées dans le temps (formation d'un groupe) :

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_c(t)\|^2 < \infty.$$

Sous l'hypothèse que $\mathbf{v}_c(t)$ et $\mathbf{x}_c(t)$ sont nulles pour tout t , on va donc chercher à montrer dans la suite que $\|\mathbf{x}(t)\|$ est bornée et que $\|\mathbf{v}(t)\|$ tend vers zéro quand t tend vers ∞ , ce qui nous assurera un flocking asymptotique.

4 Théorème de flocking

On commencera par donner un lemme qui permet de voir que l'énergie du système décroît le long des trajectoires, ce qui permettra de borner les normes $\|\mathbf{x}\|$ et $\|\mathbf{v}\|$ dans le théorème de flocking. Le théorème qu'on énoncera ici est une version simplifiée du théorème donné dans [1]. On verra plus tard qu'on peut en donner une version plus complète.

On considèrera dans la suite que la fonction ψ est assez régulière pour admettre des primitives sur son domaine de définition.

On pose d'abord $\epsilon_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, qui sont des fonctionnelles naturelles de Lyapunov pour le SDID (9), et qui peuvent être vues comme des fonctionnelles d'énergie pour (9) :

$$\epsilon_{\pm}(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|) := \|\mathbf{v}\| \pm \Psi(\|\mathbf{x}\|),$$

où Ψ est une primitive du noyau d'interaction ψ .

On peut voir le premier et le second terme de $\epsilon_{\pm}(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ comme l'énergie cinétique et l'énergie interne (potentielle) du système, respectivement. Le lemme suivant montre que les fonctionnelles $\epsilon_{\pm}(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ sont décroissantes le long des solutions $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ de (9), et donne une majoration de $\left| \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}(t)\|} \psi(s) ds \right|$ qui nous servira dans la suite.

Lemme 4.1. *On suppose que $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ satisfait le SDID (9) avec $\psi \geq 0$. Alors on a*

$$(i) \quad \epsilon_{\pm}(\|\mathbf{x}(t)\|, \|\mathbf{v}(t)\|) \leq \epsilon_{\pm}(\|\mathbf{x}_0\|, \|\mathbf{v}_0\|), \quad t \geq 0.$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{v}(t)\| + \left| \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}(t)\|} \psi(s) ds \right| \leq \|\mathbf{v}_0\|.$$

Démonstration. (i) On utilise (9) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \epsilon_{\pm}(\|\mathbf{x}(t)\|, \|\mathbf{v}(t)\|) &= \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}(t)\| \pm \Psi(\|\mathbf{x}(t)\|)) \\ &= \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \pm \psi(\|\mathbf{x}\|) \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \\ &\leq \psi(\|\mathbf{x}\|) (-\|\mathbf{v}\| \pm \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt}) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

(ii) d'après (i), on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}(t)\| - \|\mathbf{v}_0\| &\leq -(\Psi(\|\mathbf{x}(t)\|) - \Psi(\|\mathbf{x}_0\|)), \\ \|\mathbf{v}(t)\| - \|\mathbf{v}_0\| &\leq (\Psi(\|\mathbf{x}(t)\|) - \Psi(\|\mathbf{x}_0\|)).\end{aligned}$$

D'où

$$\|\mathbf{v}(t)\| - \|\mathbf{v}_0\| \leq -|\Psi(\|\mathbf{x}(t)\|) - \Psi(\|\mathbf{x}_0\|)| = -\left| \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}(t)\|} \psi(s) ds \right|.$$

□

On obtient grâce au Lemme 4.1 des bornes pour $\|\mathbf{x}\|$ et $\|\mathbf{v}\|$ qui satisfont le SDID (9).

Théorème 4.2. *(de flocking, simple) On suppose que $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ sont des solutions globales du SDID (9) avec $\psi \geq 0$. Alors on a :*

Si

$$\|\mathbf{v}_0\| < \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\infty} \psi(s) ds,$$

alors il existe un réel $x_M \geq 0$ tel que

$$\|\mathbf{v}_0\| = \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{x_M} \psi(s) ds, \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq x_M, \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\psi(x_M)t},$$

pour tout $t \geq 0$.

Ceci donne des bornes pour $\|\mathbf{x}(t)\|$ et assure que $\|\mathbf{v}(t)\|$ tend vers 0 quand t tend vers ∞ , d'où l'appellation théorème « de flocking ».

Démonstration. Comme ψ est une fonction mesurable positive, $\int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\delta} \psi(s) ds$ est une fonction continue et croissante en $\delta \geq \|\mathbf{x}_0\|$.

Donc si $\|\mathbf{v}_0\| < \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\infty} \psi(s) ds$, alors on choisit le plus grand réel $x_M \geq 0$ qui satisfasse

$$\|\mathbf{v}_0\| = \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{x_M} \psi(s) ds.$$

Pour la seconde assertion, on utilise le résultat (ii) du Lemme 4.1, *i.e.*, pour toute solution (\mathbf{x}, \mathbf{v}) de (7) on a

$$\left| \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}(t)\|} \psi(s) ds \right| \leq \|\mathbf{v}_0\|, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

On suppose par contradiction qu'il existe un $t \in (0, \infty)$ tel que

$$\|\mathbf{x}(t)\| > x_M.$$

Alors on peut choisir un temps $t_* \in (0, \infty)$ tel que

$$\|\mathbf{v}_0\| < \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}(t_*)\|} \psi(s) ds, \quad \|\mathbf{x}(t_*)\| > x_M,$$

et on a

$$\|\mathbf{v}_0\| = \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{x_M} \psi(s) ds < \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\|\mathbf{x}(t_*)\|} \psi(s) ds,$$

ce qui contredit (10) puisque ψ est positive.

Donc on a bien $\|\mathbf{x}(t)\| \leq x_M$ pour $t \geq 0$.

On utilise ensuite la borne supérieure de $\|\mathbf{x}(t)\|$ pour trouver

$$\frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \leq -\psi(x_M)\|\mathbf{v}\|.$$

Par principe de comparaison, ceci donne une estimation de la vitesse de dégradation de $\|\mathbf{v}(t)\|$:

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\psi(x_M)t}.$$

□

5 Applications du théorème de flocking dans des cas simples

On commencera par donner deux exemples, illustrés par les résultats obtenus avec une simulation informatique (voir partie 7). Ceux-ci permettront de donner une idée des critères nécessaires à l'émergence d'un consensus, qu'on théoriserait dans un troisième temps en reprenant le cas du noyau d'interaction régulier proposé dans [1].

Dans la suite, on prendra comme paramètres (fixés arbitrairement) : $\lambda = 1$, $dt = 0.01$ (le pas de temps) et $K = 1000$ (le nombre de pas de temps, *i.e.* la durée de l'observation). En effet, ces paramètres n'ont que peu d'importance dans les résultats obtenus, comme on le verra. On ne fera donc varier que la fonction ψ et les conditions initiales.

On se placera dans un espace à deux dimensions pour 5 individus qu'on représentera par des flèches unitaires de même sens que leur vecteur vitesse et d'origine leur position, pour une visualisation plus simple.

5.1 Exemple avec flocking

On pose dans cet exemple $\psi \equiv 1$.

Cette fonction étant C^1 sur \mathbb{R} , le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne que (2) admet des solutions $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ sur un intervalle $[0, T[$, avec T un réel positif. De plus, avec (9), on a que, comme ψ est positive, $\|\mathbf{v}\|$ est décroissante

minorée donc bornée entre 0 et $\|\mathbf{v}_0\|$. La première équation de (9) nous donne de plus que $\|\mathbf{x}(t)\|$ est majorée par $\|\mathbf{x}_0\| + t\|\mathbf{v}_0\|$, pour tout $t \in [0, T[$. Par le critère de non-explosion, on a donc que $\|\mathbf{v}\|$ et $\|\mathbf{x}\|$ sont définies sur tout \mathbb{R} , et on peut étudier leur comportement asymptotique.

Cas 1 :

On s'intéressera pour chaque exemple à deux situation initiales différentes. Dans le premier cas, les individus sont relativement proches et on des vitesses initiales dont le sens est proche (comprises dans un cône d'angle $\frac{\pi}{2}$) :

$$X_{init} = [(0.4, 0.4), (0.3, 0.4), (0.4, 0.3), (0.5, 0.4), (0.4, 0.5)]$$

$$V_{init} = [(0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)].$$

On comprendra ces vecteurs comme suit : le premier des cinq individus a une position initiale de coordonnées $(0.4, 0.4)$ dans \mathbb{R}^2 , et une vitesse initiale verticale de norme 1 (de coordonnées $(0, 1)$ dans \mathbb{R}^2), et ainsi de suite.

On observe les choses suivantes :

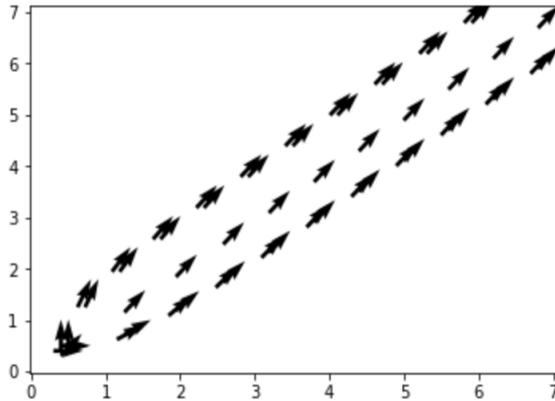
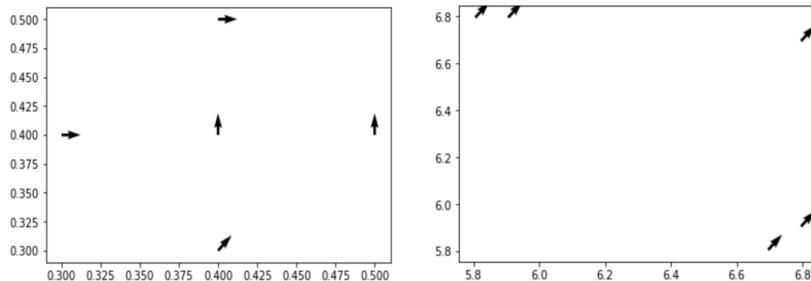
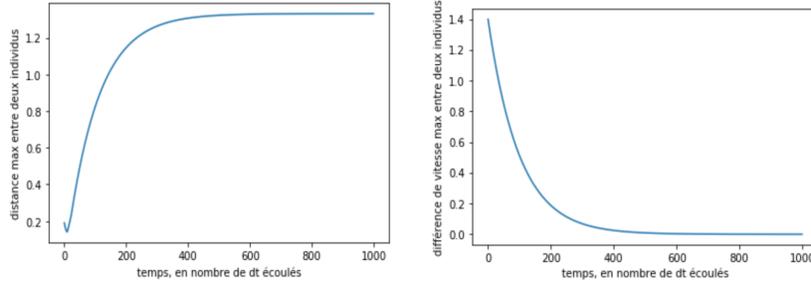


FIGURE 1 – *Ci-dessus* : Trajectoires des individus ; les flèches sont tracées tous les 100 dt (on aura donc 10 flèches par individu). *Ci-dessous* : Situation initiale (figure de gauche) et situation finale (figure de droite).



On trace également les courbes suivantes :



On peut dire qu'on observe un phénomène de flocking grâce aux courbes de position et de vitesses : si l'écart maximal entre deux individus (en norme) est borné et que l'écart maximal entre les vitesses (en norme) tend vers zéro (comme c'est le cas ici), on vérifie bien les hypothèses de la Définition 3.2. et il y a convergence vers un consensus. Les autres figures servent surtout à visualiser ce qu'il se passe et confirment intuitivement la convergence ou non du système.

La convergence dans le cas présent est en fait très simple à vérifier : la fonction ψ est une fonction positive dont l'intégrale sur \mathbb{R} diverge, donc on vérifie bien les hypothèses du Théorème 4.2., quelles que soient les conditions initiales : on devrait observer du flocking dans le cas 2 aussi.

Cas 2 :

Dans le second cas, les positions et les vitesses initiales sont plus variées :

$$X_{init} = [(2, 4), (1, 0), (0, 1), (3, 5), (4, 7)]$$

$$V_{init} = [(2, 1), (1, 0), (-1, 1), (12, 1), (1, 4)].$$

Ici encore, on observe un phénomène de flocking, pour les mêmes raisons que dans le cas 1.

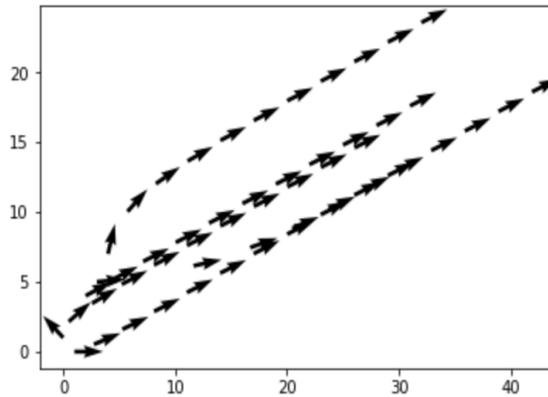
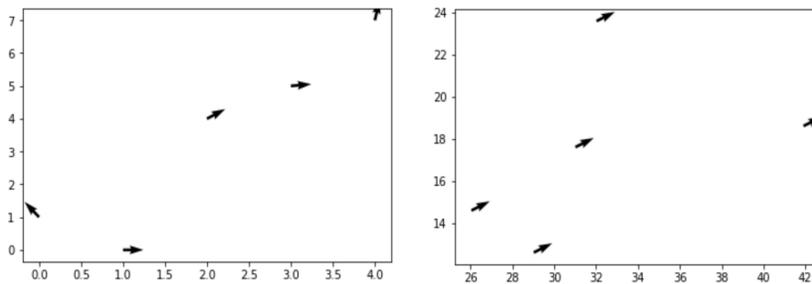
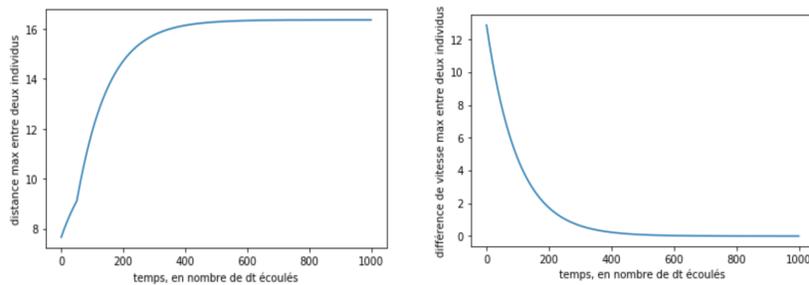


FIGURE 2 – *Ci-dessus* : Trajectoires des individus. *Ci-dessous* : Situation initiale (figure de gauche) et situation finale (figure de droite).



Et les courbes :



5.2 Exemple sans flocking

On pose une autre fonction : $\psi(s) := \frac{1}{(1+s^2)}$.

Ici encore la fonction ψ est C^1 et positive sur \mathbb{R} donc, pour les mêmes raisons

que dans l'exemple précédent, l'étude asymptotique du système a du sens.

Cas 1 :

On a les résultats suivants :

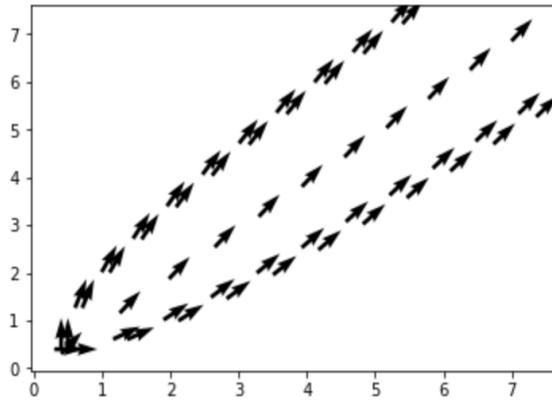
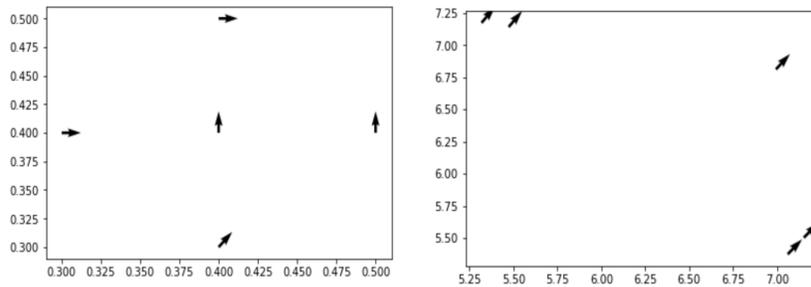
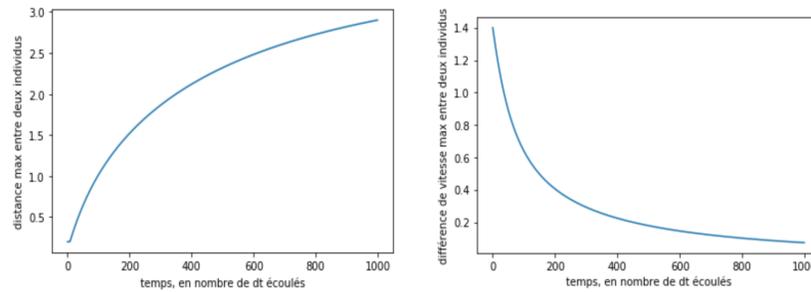


FIGURE 3 – *Ci-dessus* : Trajectoires des individus. *Ci-dessous* : Situation initiale (figure de gauche) et situation finale (figure de droite).



Et les courbes :



Il semblerait que le système converge vers un consensus. Une étude sur un

temps plus long ($K = 5000$) montre en effet que l'écart maximal entre les positions est borné et que l'écart maximal entre les vitesses tend vers zéro.

Comme la fonction ψ est intégrable, on est dans le cas où (si l'on reprend les notations du Théorème 4.2.) $\|\mathbf{x}_0\|$ et $\|\mathbf{v}_0\|$ sont assez petits pour qu'on ait :

$$\|\mathbf{v}_0\| < \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\infty} \psi(s) ds.$$

Mais si $\|\mathbf{v}_0\|$ ou $\|\mathbf{x}_0\|$ deviennent trop grands, alors on ne vérifiera plus les hypothèses du Théorème 4.2. et on ne pourra pas borner $\|\mathbf{x}(t)\|$ ni majorer $\|\mathbf{v}(t)\|$ pour $t \geq 0$, et il se peut que le système ne converge pas vers un consensus, comme dans la cas 2.

Cas 2 :

Dans ce cas, les individus ont des vitesses trop grandes (ou des positions trop éloignées, selon l'interprétation que l'on fait du Théorème 4.2.), et le noyau d'interaction est donc trop faible pour leur permettre de converger :

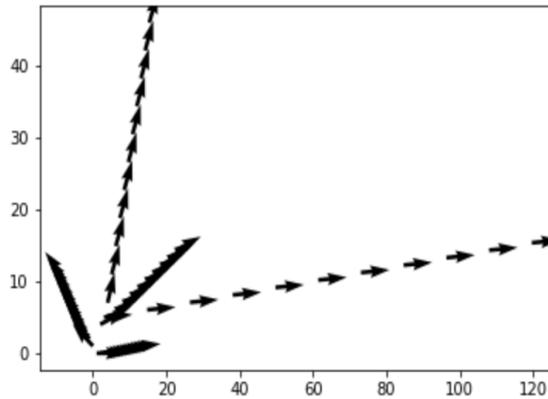
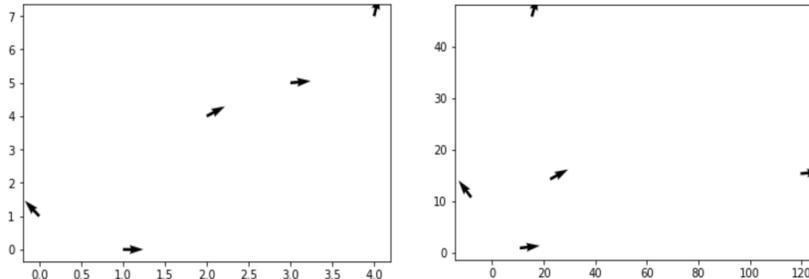
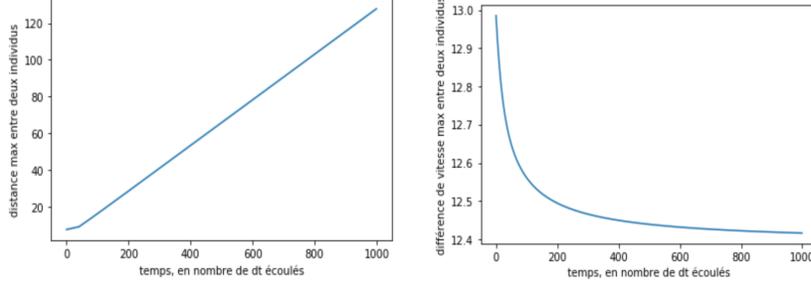


FIGURE 4 – *Ci-dessus* : Trajectoires des individus. *Ci-dessous* : Situation initiale (figure de gauche) et situation finale (figure de droite).



Et les courbes :



5.3 Étude théorique du noyau d'interaction régulier

On prend une fonction ψ de la forme :

$$\psi_1(s) := \frac{\alpha}{(1+s^2)^{\frac{\beta}{2}}}, \quad \alpha > 0, \beta \geq 0.$$

Cette fonction est C^1 et positive sur \mathbb{R} donc, encore une fois, l'étude asymptotique du système a du sens.

Pour ce cas, on peut énoncer les propositions suivantes :

Proposition 5.1. (*flocking inconditionnel*) Soient $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ qui satisfont la SDID (9), avec $\psi = \psi_1$ et $\beta \in [0, 1]$ (cas où ψ_1 n'est pas intégrable sur \mathbb{R}). Alors il existe $x_M \geq 0$ indépendant de t tel que :

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq x_M, \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\psi(x_M)t},$$

où x_M est donné par :

$$\begin{cases} (1+x_M^2)^{\frac{1-\beta}{2}} \geq (1+\|\mathbf{x}_0\|^2)^{\frac{1-\beta}{2}} + \frac{1-\beta}{\alpha} \|\mathbf{v}_0\|, & \beta \in [0, 1), \\ x_M + \sqrt{1+x_M^2} = (\|\mathbf{x}_0\| + \sqrt{1+\|\mathbf{x}_0\|^2}) e^{\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\alpha}}, & \beta = 1. \end{cases}$$

Démonstration. On ne donnera qu'une idée de la preuve, le détail des calculs ne présentant pas de difficulté.

Si $\|\mathbf{v}_0\| = 0$, la preuve est immédiate.

Sinon, on applique le Théorème 4.2. puis on distingue deux cas : si $0 \leq \beta < 1$, on utilise le fait que :

$$\int_a^b (1+s^2)^{-\frac{\beta}{2}} ds \geq \int_a^b s(1+s^2)^{-\frac{\beta+1}{2}} ds = \frac{1}{1-\beta} (1+s^2)^{\frac{1-\beta}{2}} \Big|_a^b,$$

pour $a \leq b$ des réels positifs.

Si $\beta = 1$, on peut directement calculer :

$$\int_a^b (1 + s^2)^{-\frac{\beta}{2}} ds = \ln(s + \sqrt{1 + s^2}) \Big|_a^b,$$

pour $a \leq b$ des réels positifs. \square

Si $\beta > 1$, alors ψ_1 n'est pas intégrable sur \mathbb{R} et on aura besoin d'une condition supplémentaire sur $\|\mathbf{x}_0\|$ et $\|\mathbf{v}_0\|$ pour observer du flocking :

Proposition 5.2. (*flocking conditionnel*) Soient $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ qui satisfont le SDID (9), avec $\psi = \psi_1$ et $\beta \in (1, \infty)$.

Si

$$(1 + \|\mathbf{x}_0\|^2)^{\frac{1-\beta}{2}} > \frac{\beta - 1}{\alpha} \|\mathbf{v}_0\|,$$

alors il existe $x_M \geq 0$ indépendant de t tel que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq x_M, \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\psi(x_M)t},$$

où x_M est donné par :

$$(1 + x_M^2)^{\frac{\beta-1}{2}} \leq \left((1 + \|\mathbf{x}_0\|^2)^{\frac{1-\beta}{2}} - \frac{\beta - 1}{\alpha} \|\mathbf{v}_0\| \right)^{-1}.$$

Démonstration. Encore une fois, on ne donnera qu'une idée de la preuve.

Si $\|\mathbf{v}_0\| = 0$, la proposition est vérifiée. Sinon, on peut appliquer le Théorème 4.2. et le reste des calculs est aisé. \square

Ainsi, on voit que quand les solutions du SDID (9) sont bien définies, on a un critère simple de flocking, qui est la non-intégrabilité sur \mathbb{R} de la fonction ψ . Dans le cas où ψ est intégrable, on a besoin d'une condition sur $\|\mathbf{x}_0\|$ et $\|\mathbf{v}_0\|$ pour pouvoir appliquer le Théorème 4.2.

6 Cas plus complexe

On s'intéresse dans cette partie au Théorème de flocking dans sa version intégrale, tel qu'il est présenté dans [1].

6.1 Théorème de flocking complet

Théorème 6.1. (*de flocking, complet*) On suppose que $(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|)$ sont des solutions globales du SDID (9) avec $\psi \geq 0$. Alors on a les estimations suivantes :

(i) Si

$$\|\mathbf{v}_0\| < \int_0^{\|\mathbf{x}_0\|} \psi(s) ds,$$

alors il existe un réel $x_m \geq 0$ tel que

$$\|\mathbf{v}_0\| = \int_{x_m}^{\|\mathbf{x}_0\|} \psi(s) ds, \quad \|\mathbf{x}(t)\| \geq x_m, \quad t \geq 0.$$

(ii) Si

$$\|\mathbf{v}_0\| < \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{\infty} \psi(s) ds,$$

alors il existe un réel $x_M \geq 0$ tel que

$$\|\mathbf{v}_0\| = \int_{\|\mathbf{x}_0\|}^{x_M} \psi(s) ds, \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq x_M, \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\psi(x_M)t},$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle qu'on a donnée pour le Théorème 4.2. \square

Dans cette version du théorème, on introduit une grandeur x_m . *A priori*, cette constante ne sert pas pour établir la convergence ou non du groupe d'individus vers un consensus. Physiquement, x_m représente la plus petite distance au centre de masse que les individus peuvent atteindre. La minorer ne permet donc pas de réduire l'étalement du groupe dans l'espace.

Bien que ce résultat soit valide et intéressant en soi, dans notre cas c'est plutôt $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ qu'on voudrait minorer (pour tous individus i et j), comme on va le voir dans l'étude du noyau d'interaction singulier.

6.2 Noyau d'interaction singulier

On prend la fonction

$$\psi_2(s) := \frac{\alpha}{s^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta \geq 0,$$

proposée dans [1].

Dans [1], comme ce que l'on a obtenu dans la partie 5.3, les auteurs montrent qu'on a, selon la valeur de β , du flocking inconditionnel pour $\beta \in [0, 1]$ et conditionnel pour $\beta > 1$. Les propositions, ainsi que leurs démonstrations, sont très similaires à ce qu'on a fait dans 5.3, aussi ne les énoncera-t-on pas ici.

Un problème se pose tout de même. En effet, le flocking n'est possible et son étude n'a de sens que si les solutions de (2) sont bien définies pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Ici, la fonction ψ_2 n'est pas définie en 0, et n'est donc C^1 que sur $(0, \infty)$. Ainsi, si deux individus i et j ont la possibilité de se rapprocher assez (dans ce cas, $\psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ tend vers ∞), on ne peut pas garantir que les solutions soient encore définies. On voudrait donc minorer par un réel strictement positif la quantité

$$\min_{1 \leq i < j \leq N} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

Dans le cas où on n'a que deux individus 1 et 2, on peut poser $x_1 = -x_2$, puisque les positions se somment à zéro, et dans ce cas :

$$\min_{1 \leq i < j \leq 2} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = 2\|\mathbf{x}\|.$$

Ainsi la minoration par x_m a du sens si x_m est strictement positif, auquel cas les solutions sont globales. Cette condition est vérifiée lorsque ψ_2 n'est pas intégrable de 0 à $\|\mathbf{x}_0\|$, ou lorsque les conditions initiales sont telles que $\|\mathbf{v}_0\| < \int_0^{\|\mathbf{x}_0\|} \psi_2(s) ds$, puisqu'on peut alors appliquer le Théorème 4.2. (se référer à [1] pour le détail des conditions).

Pour plus que deux individus, le problème se complique, on ne s'y intéressera pas ici. L'idée intuitive est de dire que si deux individus i et j se rapprochent trop, alors ils interagissent beaucoup (si $\psi_2(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ est suffisamment importante, en particulier dans le cas où ψ_2 n'est pas intégrable en zéro par exemple) et vont donc chercher à aligner leurs vitesses, de sorte que celles-ci soient colinéaires : ces individus ne pourront alors plus se rapprocher l'un de l'autre, et les solutions seront bien définies.

7 Modélisation informatique

7.1 Implémentation

On se propose de visualiser les résultats établis précédemment à l'aide d'une modélisation informatique.

On utilise le langage Python pour implémenter la méthode d'Euler explicite, une méthode simple à implémenter, sans être trop coûteuse. Dans notre cas, les intervalles de temps choisis (0,01 unités de temps) sont assez faibles pour qu'on n'ait pas à se préoccuper de l'erreur numérique induite, qui n'influence pas la convergence ou non vers une situation de flocking.

Cette méthode consiste à poser que :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt},$$

ce qui donne :

$$x(t+dt) \approx \left(\frac{dx}{dt}\right) dt + x(t).$$

Quand on discrétise le problème, en posant x_n la valeur (approchée) de x au temps $t_n = n \cdot dt$, on peut donc construire la suite (x_n) comme suit :

$$x_0 = x(0), \quad x_{n+1} = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt + x_n.$$

Dans notre cas, $x(0)$ est connu, dt est fixé, mais $\frac{dx}{dt} = v$ n'est connu que par $\frac{dv}{dt}$: on applique donc la méthode d'Euler explicite une seconde fois (à $v(t)$) et on a :

$$v_0 = v(0), \quad v_{n+1} = \left(\frac{dv}{dt}(x_n, v_n) \right) dt + v_n.$$

$$x_0 = x(0), \quad x_{n+1} = \left(\frac{dx}{dt} \right) dt + x_n = \left(\left(\frac{dv}{dt}(x_n, v_n) \right) dt + v_n \right) dt + x_n.$$

Ceci augmente donc l'erreur commise sur x , mais, encore une fois, cela n'a que très peu d'importance dans notre cas. On peut facilement généraliser ces formules au cas où x_n et v_n sont des vecteurs.

7.2 Résultats

Les résultats varient évidemment en fonction du choix du nombre d'itérations K , de la constante λ , du pas dt et surtout des conditions initiales et de la fonction ψ choisie.

On se reportera à la partie 5 pour l'analyse des résultats obtenus.

8 Limites du modèle et alternatives

Bien que le modèle de Cucker et Smale donne une bonne idée du comportement de groupes d'individus dans des cas simples, on pourrait imaginer des situations plus complexes, dans lesquelles il ne serait plus adapté.

En particulier, le modèle devient faux si l'on prend des individus mal répartis dans l'espace, au sens où un ensemble d'individus, dont la tailles est petite devant celle du groupe entier, est séparée du groupe d'une distance significativement grande.

Dans ce cas, pour un individu i isolé du reste du groupe (contenant l'individu j), on peut imaginer que $\|x_i - x_j\|$ soit assez grand pour que $\psi(\|x_i - x_j\|)$ soit très petit. Le modèle de C-S (2) donne alors pour i une accélération très faible, puisqu'il s'agit de la somme de terme faibles (en $\psi(\|x_i - x_j\|)$), pondérée par $\frac{\lambda}{N}$, où N est grand, ce qui n'est pas conforme à la réalité. (On rappelle :

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=0}^n \psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i).$$

Ainsi on peut proposer d'autres modèles, comme le font Sebastien Motsch et Eitan Tadmor dans [4], qui découpent le groupe d'individus en sous-groupes dictés par l'agencement géométrique des individus dans l'espace. Ils introduisent des coefficients d'interaction entre individus d'un même sous-groupe, pour prendre en compte le fait que les individus communiquent plus avec leurs voisins proches qu'avec des individus d'autres sous-groupes.

On peut imaginer étendre ce raisonnement dans des cas plus abstrait, comme

l'étude de la convergence des opinions politiques d'une population, en donnant un équivalent géométrique de leurs positions par exemple.

Un autre défaut évident du modèle de Cucker et Smale est le fait qu'il ne prend pas en compte l'influence relative des individus au sein du groupe. On observe pourtant très souvent la présence de figures charismatiques (chef de meute, leader politique...) dans les groupes auxquels s'applique le modèle. De nouveau dans [4], l'introduction de coefficients de pondération est proposée, pour traduire la non-symétrie des interactions : à un couple (i, j) d'individus, on associe les coefficients $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ (qui peuvent être différents), qui quantifient l'influence relative que l'individu i a sur j et inversement.

On peut imaginer bien d'autres aménagements au modèle de Cucker et Smale, bien que ceux-ci puissent parfois compliquer la résolution des problèmes auxquels ils sont liés.

9 Conclusion

À partir du modèle dynamique proposé par Cucker et Smale, on a pu établir des conditions de flocking aisées à vérifier dans des cas où le noyau d'interaction est simple. On aimerait encore étendre ces résultats à des cas plus complexes dans lesquels le noyau d'interaction est moins facile à manipuler.

On pourrait aussi généraliser ces résultats à des cas où le nombre d'individus dépasse les limites de calcul de machines en proposant une étude statistique du problème (ceci peut être utile pour modéliser le comportement de gaz, par exemple).

9.1 Remerciements

Je tiens à remercier évidemment Amic Frouvelle pour ses précieux conseils et sa disponibilité. Un grand merci également aux personnes qui rendent possible la libre lecture d'articles de recherche. Enfin merci aux internautes avertis, à Julien Brasseur et à Maxime Chupin pour avoir bien voulu partager leur maîtrise de \LaTeX .

Références

- [1] S.-Y. HA, J.-G. LIU : A simple proof of the Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit, *Commun. Math. Sci.* 7(2) (2009), pp. 297-325
- [2] F. CUCKER, S. SMALE : Emergent behavior in flocks, *IEEE Transactions on Automatic Control* 52(5) (2007), pp. 852-861
- [3] F. CUCKER, S. SMALE : On the mathematics of emergence, *Japan. J. Math.* 2 (2007), pp. 197-227
- [4] S. MOTSCH, E. TADMOR : A new model for self-organized dynamics and its flocking behavior. *J. Stat. Phys.* 144 (2011), pp. 923-947