

Mesure de Hausdorff et fractales

Hélie Bazin
Tutoré par Pierre Cardialaguet

Juin 2020

Introduction

La notion de dimension est depuis longtemps définie pour les objets usuels de l'espace euclidien, comme le segment ou encore la sphère. On la nomme dimension euclidienne et elle vaut naturellement 1 pour le segment, 2 pour la sphère... Dès la fin du 19ème siècle, les mathématiciens s'intéressèrent à l'étude de la dimension d'objet plus complexes. Sont alors définies les dimensions topologiques, et plus particulièrement la dimension de recouvrement¹. Ainsi la dimension topologique coïncide avec la dimension euclidienne pour les objets usuels de l'espace euclidien, à homéomorphisme près.

Cependant, en 1880, Guisepe Peano définit une courbe plane sur $[0; 1]$ surjective dans le carré $[0; 1] \times [0; 1]$. Ainsi, cette courbe qui est de dimension topologique 1 remplit entièrement le carré, de dimension topologique 2.

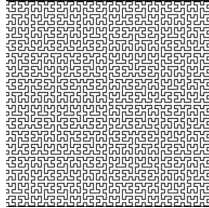


FIGURE 1 – Courbe de Peano

De même, si l'on multiplie par n la taille d'un objet usuel de dimension d , sa mesure se voit multipliée par n^d . Ce n'est plus le cas pour les ensembles autosimilaires, définis par itérations d'un système de similitudes.

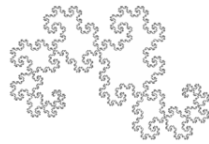


FIGURE 2 – Courbe du dragon

La question de la dimension de ces figures invariantes par changement d'échelle devient alors un enjeu majeur du début du 20ème siècle. En 1918, Félix Hausdorff construit une nouvelle mesure qui coïncide avec la mesure de Lebesgue sur les ensembles Lebesgue-mesurables, mais rendant mesurables d'autres ensembles, comme les courbes paramétrées. En reprenant ces travaux, Abraham Besicovitch et David Ursell définissent la dimension de Hausdorff qui permet la mesure des ensembles fractals, et concrétisent une avancée majeure dans l'étude de ces objets indescriptibles géométriquement du fait de leur irrégularité.



FIGURE 3 – Félix Hausdorff

L'objectif de ce mémoire est donc de construire une nouvelle notion de dimension pour les fractales qui coïncide avec la dimension topologique sur les objets usuels de l'espace.

Pour cela, nous introduirons la mesure de Hausdorff et ses propriétés principales, afin d'ensuite pouvoir construire la notion de dimension de Hausdorff. Nous montrerons ensuite que cette dimension coïncide avec la dimension euclidienne sur les objets usuels de \mathbb{R}^n afin de lui donner du sens.

Nous serons alors armés pour s'intéresser aux objets fractals, à commencer par les ensembles autosimilaires, avant de s'attaquer à des constructions fractales plus abstraites, les ensembles de mots, et leur application principale, l'ensemble triadique de Cantor.

1. $\dim(E) \leq n$ si tout recouvrement ouvert fini de E admet un recouvrement ouvert fini plus fin tel que chaque point de E appartient à au plus $n + 1$ ouverts de ce dernier recouvrement.

Table des matières

1	Mesure de Hausdorff	4
1.1	Mesures extérieures	4
1.2	Construction de mesures	5
1.3	Mesure de Hausdorff	6
2	Dimension de Hausdorff	8
2.1	Définition et premières propriétés	8
2.2	Invariance par translation et changement d'échelles	9
2.3	Premiers exemples en dimension 1	10
3	Inégalité isodiamétrique et lien avec la mesure de Lebesgue	13
3.1	L'inégalité isodiamétrique	13
3.2	Le théorème de recouvrement de Vitali	15
3.3	Mesure de Hausdorff n-dimensionnelle et mesure de Lebesgue	16
4	Ensembles autosimilaire et première approche fractale	18
4.1	Ensembles autosimilaires	18
4.2	Dimension fractale	19
4.3	Premiers exemples	20
4.3.1	Le triangle de Sierpinski	20
4.3.2	La courbe de Peano	21
4.3.3	Pinwheel Tiling	22
5	Espaces de mots et ensemble de Cantor	23
5.1	Espaces de mots	23
5.1.1	Construction	23
5.1.2	Métrie sur les espaces de mots	23
5.2	Mesure sur les espaces de mots	25
5.2.1	Construction	25
5.2.2	Lien avec la mesure de Hausdorff	25
5.3	Une application : l'ensemble triadique de Cantor	26
5.3.1	Construction et propriétés	26
5.3.2	Approche fractale	28
6	Bibliographie	30
7	Annexe : Preuve du théorème de Carathéodory	30

1 Mesure de Hausdorff

L'objectif de cette partie est de définir et construire dans un cadre rigoureux la mesure de Hausdorff.

1.1 Mesures extérieures

On commence par définir la notion de mesure extérieure et mesure extérieure métrique.

Définition 1.1.1. Soit E un espace et $\mu : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, une application telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
3. $\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$.

μ est appelée mesure extérieure sur E , et permet de définir la tribu des parties mesurables de E .

La construction de ces mesures est abordée dans le paragraphe suivant. On peut de même définir la notion de mesure extérieure sur des espaces métriques.

Définition 1.1.2. Soit (E, d) un espace métrique et μ une mesure extérieure sur E . μ est une mesure extérieure métrique si :

$$\forall A, B \subset E, d(A, B) > 0 \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

où $d(a, b) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}$.

Théorème 1.1.1 (Théorème de Carathéodory). Soit μ une mesure extérieure sur E . On construit $M_\mu := \{A \subset E \mid \forall B \subset E, \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)\}$, une partie de $\mathcal{P}(E)$. Alors M_μ est une tribu sur E et (E, M_μ, μ) un espace mesuré.

La preuve est donnée en annexe.

Corollaire 1.1.1 (Critère de Carathéodory). Soit μ une mesure extérieure sur un espace métrique (E, d) , μ borélienne si et seulement si elle est métrique.

Preuve :

On commence par montrer le sens direct.

Soit $A, B \subset (E, d)$ tels que $d(A, B) > 0$. La tribu des boréliens de $B(E)$ étant engendrée par les ouverts de E et μ étant borélienne, \overline{A} est borélien et donc mesurable par μ .

Donc

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu((A \cup B) \cap \overline{A}) + \mu((A \cup B) \setminus \overline{A}) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

μ est donc bien une mesure métrique.

Pour montrer l'implication dans le sens indirect, il suffit de montrer que pour tout fermé de (E, d) , $E \in M_\mu$.

Soit donc A un tel fermé et $B \subset E$, $\mu(B) < \infty$. On va montrer que $\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$. L'autre inégalité est directe par sous-additivité de μ .

On construit donc la suite d'ensemble $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} B_0 &= \{x \in E, d(x, A) \geq 1\} \\ B_k &= \{x \in E, \frac{1}{k+1} \leq d(x, A) < \frac{1}{k}\}, \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Les $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont disjoints et forment une partition de $B \setminus A$. Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus A) &= \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^N B_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} B_k\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^N B_k\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(B_k). \end{aligned}$$

Et donc, $\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B \cap A) + \mu\left(\bigcup_{k=0}^N B_k\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(B_k)$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $d(B_k, A) > 0$, donc $d((B \cap A), \bigcup_{k=0}^N B_k) > 0$. Par convergence de la série de terme général $(\mu(B_k))_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) &\leq \mu\left((B \cap A) \cup \left(\bigcup_{k=0}^N B_k\right)\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(B_k) \\ &\leq \mu(B) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(B_k). \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient bien $\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$, ce qui conclut la démonstration.

1.2 Construction de mesures

Dans cette section, nous nous intéressons à la construction de mesures extérieures.

Pour ce faire, nous nous donnons E un ensemble, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(E)$ un recouvrement de E et $\delta : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. On pose :

$$\forall A \subset E, \mu(A) = \inf_{D \in \mathcal{R}(A)} \sum_{X \in D} \delta(X) \quad (1)$$

où $\mathcal{R}(A)$ désigne l'ensemble des recouvrements dénombrables de A par des éléments de \mathcal{U} .

Théorème 1.2.1. μ est une mesure extérieure.

Preuve :

Les deux premiers points sont directs. On montre donc la sous-additivité.

Pour ce faire, on se donne une suite de parties de E $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et ϵ un réel positif.

Pour chaque n , on pose $D_n \in \mathcal{R}(A_n)$, tel que $\sum_{X \in D_n} \delta(X) \leq \mu(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$.

L'existence d'un tel ensemble est garanti par la construction de μ .

On a de plus $\bigcup_{n \geq 0} D_n \in \mathcal{R}(A_n)$, et donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{X \in D_n} \delta(X) = \sum_{n \geq 0} \sum_{X \in D_n} \delta(X) \leq \sum_{n \geq 0} \left(\mu(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \epsilon + \sum_{n \geq 0} \mu(A_n).$$

On fait tendre ϵ vers 0 et on obtient bien la sous-additivité de μ .

Remarque : Avec cette construction, on peut naturellement construire la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , en posant \mathcal{U} la classe des pavés de \mathbb{R}^d , et δ l'application qui à un pavé associe son volume.

1.3 Mesure de Hausdorff

On réalise ici la même construction de la mesure que précédemment, en se plaçant sur un espace métrique (E, d) , qu'on recouvre avec la classe $\mathcal{U} = \{X \subset E, \text{diam}(X) \leq \epsilon\}$, où ϵ est fixé positif strictement.

On se donne un réel $s \geq 0$ et on pose l'application $\delta : X \mapsto \text{diam}(X)^s$.

Enfin, on pose $\mathcal{R}_\epsilon(A)$, l'ensemble des des recouvrements dénombrables de A par des parties $X \subset E$ telles que $\text{diam}(X) \leq \epsilon$.

On obtient alors la quantité : $\forall A \subset E, \mathcal{H}_\epsilon^s(A) := \inf_{D \in \mathcal{R}(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^s$.

Définition 1.3.1 (Mesure de Hausdorff s-dimensionnelle). *On définit la mesure de Hausdorff comme il suit :*

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^s(A), \quad \forall A \subset E. \quad (2)$$

Remarque : Pour $\eta \leq \epsilon$, on a forcément $\mathcal{R}_\eta(A) \subset \mathcal{R}_\epsilon(A)$, $\forall A \subset E$, et donc $\mathcal{H}_\eta^s \geq \mathcal{H}_\epsilon^s$. On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 1.3.1.

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{H}_\epsilon^s(A). \quad (3)$$

On peut alors donner les propriétés suivantes :

Propriété 1.3.1. *La mesure de Hausdorff est :*

1. *une mesure extérieure*
2. *une mesure métrique*
3. *une mesure borélienne.*

Preuve :

Il est clair, de part sa construction, que \mathcal{H}^s est une mesure extérieure $\forall s \geq 0$. Il suffit donc de montrer qu'elle est métrique, ce qui prouvera qu'elle est borélienne d'après le critère de Carathéodory.

Soit $s \geq 0$, $A, B \subset E$ tels que $d(A, B) > 0$. On a toujours $\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \geq \mathcal{H}^s(A \cup B)$ car \mathcal{H}^s est extérieure.

Pour montrer la deuxième inégalité, on pose $0 < \epsilon < d(A, B)$ et un ensemble de recouvrements $D \in \mathcal{R}_\epsilon(A \cup B)$.

Les éléments de D ne peuvent intersecter à la fois A et B du fait de leur diamètre.

Ainsi, $\forall D \in \mathcal{R}_\epsilon(A \cup B)$, $\exists D_1, D_2$ disjoints tels que $D_1 \in \mathcal{R}_\epsilon(A)$ et $D_2 \in \mathcal{R}_\epsilon(B)$. Ainsi :

$$\mathcal{H}_\epsilon^s(A) + \mathcal{H}_\epsilon^s(B) \leq \sum_{X \in D_1} (\text{diam}(X))^s + \sum_{X \in D_2} (\text{diam}(X))^s = \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^s.$$

En passant à l'infimum et en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient bien $\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B)$, ce qui conclut la démonstration.

Remarque : On notera que la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^0 correspond à la mesure de comptage sur E , tandis que la mesure \mathcal{H}^1 sur \mathbb{R} correspond à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Le lien avec la mesure de Lebesgue sera vu plus tard dans l'exposé, mais nous pouvons dès à présent dégager plusieurs caractéristiques de la mesure de Hausdorff, qu'on retrouve avec la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.3.2. *Soit f une similitude de rapport $r > 0$, c'est à dire : $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) = rd(x, y)$.*

Alors :

$$\forall s \geq 0, \forall A \subset E, \mathcal{H}^s(f(A)) = r^s \mathcal{H}^s(A) \quad (4)$$

Preuve : Soient $A \subset E$, $\epsilon > 0$. On remarque que $f(\mathcal{R}_\epsilon(A)) = \mathcal{R}_{\epsilon r}(f(A))$.
On en déduit donc :

$$\mathcal{H}_{\epsilon r}^s(f(A)) = \inf_{D \in f(\mathcal{R}_\epsilon(A))} \sum_{Y \in D} (\text{diam}(Y))^s = \inf_{D' \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D'} (\text{diam}(f(X)))^s = r^s \inf_{D' \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D'} (\text{diam}(X))^s = r^s \mathcal{H}_\epsilon^s(A).$$

On conclut en faisant tendre ϵ vers 0.

Proposition 1.3.3. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $K > 0$ et $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ une application K -lipschitzienne.

Alors :

$$\forall A \subset X, \mathcal{H}^s(f(A)) \leq K^s \mathcal{H}^s(A) \quad (5)$$

.

Preuve : Par le même système de preuve que ci-dessus, on a :

$$\mathcal{H}_{\epsilon r}^s(f(A)) = \inf_{D \in f(\mathcal{R}_\epsilon(A))} \sum_{Y \in D} (\text{diam}(Y))^s = \inf_{D' \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D'} (\text{diam}(f(X)))^s \leq K^s \inf_{D' \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D'} (\text{diam}(X))^s = K^s \mathcal{H}_\epsilon^s(A).$$

On conclut en faisant tendre ϵ vers 0.

Maintenant la mesure de Hausdorff bien introduite, nous pouvons introduire la notion de dimension de Hausdorff, qui donne un sens à la notion de mesure s -dimensionnelle.

2 Dimension de Hausdorff

2.1 Définition et premières propriétés

Avant toutes choses, on introduit le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit $A \subset E$. S'il existe $d \geq 0$ tel que $\mathcal{H}^d(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^s = 0$, pour tout $s > d$.*

Preuve : Soient $A \subset E$, $s > d \geq 0$:

$$\mathcal{H}_\epsilon^s(A) = \inf_{D \in \mathcal{R}(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^s = \inf_{D \in \mathcal{R}(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^d (\text{diam}(X))^{s-d} \leq \inf_{D \in \mathcal{R}(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^d \epsilon^{s-d} = \epsilon^{s-d} \mathcal{H}_\epsilon^d(A).$$

Comme $\mathcal{H}^d(A) < \infty$, on obtient bien que $\mathcal{H}_\epsilon^s(A) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$, et donc que $\mathcal{H}^s(A) = 0 \forall A \subset E$ dès que $s > d$.

De ce lemme, on en déduit le théorème suivant central :

Théorème 2.1.1. $\forall A \subset E, \exists! d \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tel que :

1. $\mathcal{H}^s(A) = \infty, \forall s < d$
2. $\mathcal{H}^s(A) = 0, \forall s > d$

On appelle dimension de Hausdorff de A ce réel d .

$$d \stackrel{\text{noté}}{=} \dim_H A. \tag{6}$$

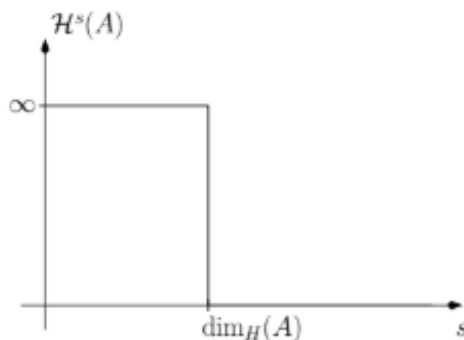


FIGURE 4 – Graphe de la fonction $s \rightarrow \mathcal{H}^s(A)$

Preuve : Si $\{s \geq 0, \mathcal{H}^s(A) < \infty\} = \emptyset$, alors on pose $d = \infty$, qui vérifie bien les conditions du théorème. Sinon, on pose $d = \inf\{s \geq 0, \mathcal{H}^s(A) < \infty\}$.

Si $s < d$, $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Si $s > d$, alors il existe $s_0 \in]d; s[$ tel que $\mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty$. D'après le lemme précédent, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) = 0$, ce qui conclut la preuve, l'unicité étant directe.

- Proposition 2.1.1.**
1. Si $A \subset B$, $\dim_H A \leq \dim_H B$.
 2. Si $A, B \subset E$, $\dim_H(A \cup B) = \max(\dim_H A, \dim_H B)$
 3. Soit $f : E \rightarrow E$ une similitude, $\dim_H f(A) = \dim_H A$
 4. Soit $f : E \rightarrow E$ lipschitzienne, $\dim_H f(A) \leq \dim_H A$
 5. Si f homéomorphisme bilipschitzien
i.e. $\exists K$ tq. $K^{-1}d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq Kd_X(x, y)$,

$$\dim_H A = \dim_H f(A)$$

2.2 Invariance par translation et changement d'échelles

Proposition 2.2.1 (Invariance par translation). Soit $s \in \mathbb{R}^+$, $\forall A \subset E$, $\forall x \in E$, $\mathcal{H}^s(A + x) = \mathcal{H}^s(A)$

Preuve : Soit ϵ et s deux réels positifs, A une partie de E et $x \in E$. On a :

$$\mathcal{H}_\epsilon^s(A + x) = \inf_{D \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X + x))^s = \inf_{D \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^s = \mathcal{H}_\epsilon^s(A).$$

On conclut en faisant tendre ϵ vers 0.

Proposition 2.2.2. Soit $s \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda > 0$, $\forall A \subset E$, $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$

Preuve : Soit ϵ et s deux réels positifs, A une partie de E et $\lambda > 0$. Soit $D \in \mathcal{R}_\epsilon(A)$ un recouvrement de A . On a :

$$\sum_{X \in \lambda D} (\text{diam}(X))^s = \sum_{X \in D} (\text{diam}(\lambda X))^s = \lambda^s \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^s.$$

De plus, le changement d'échelle conserve les recouvrements, au sens où si $D \in \mathcal{R}_\epsilon(A)$, alors $\lambda D \in \mathcal{R}_{\lambda\epsilon}(\lambda A)$, et donc en particulier :

$$\mathcal{H}_{\lambda\epsilon}^s(\lambda A) = \inf_{D \in \mathcal{R}_{\lambda\epsilon}(\lambda A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(X))^s = \inf_{D \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{X \in D} (\text{diam}(\lambda X))^s = \lambda^s \mathcal{H}_\epsilon^s(A).$$

On conclut en faisant tendre ϵ vers 0.

2.3 Premiers exemples en dimension 1

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier le lien entre la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle et la mesure de Lebesgue, ainsi qu'un exemple important pour comprendre la notion de dimension de Hausdorff.

Proposition 2.3.1. *En dimension 1, la mesure de Lebesgue et la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle coïncident. Ainsi lorsque $n = 1$, $\mathcal{H}^1 = \lambda^1$.*

Preuve : La mesure de Hausdorff étant invariante par translation, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^1([0; 1]) = 1$. Dans un premier temps, on montre que $\mathcal{H}^1([0; 1]) \leq 1$ en découpant l'intervalle en $U_i = [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}]$, $i = 1, \dots, k$. On a alors :

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{k}}^1([0; 1]) \leq \sum_{i=1}^k \text{diam}(U_i) = 1.$$

Pour montrer l'autre sens, on pose ϵ et δ deux réels positifs et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $[0; 1]$ par des ouverts, tels que $|\mathcal{H}_{\delta}^1([0; 1]) - \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)| < \epsilon$.

On construit une famille $(a_k)_{k=0, \dots, n}$, telle que $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ et chaque intervalle $[a_k; a_{k+1}]$ est inclu dans un et un seul ouvert U_i . L'existence de cette famille est donnée par la théorème de recouvrement de Vitali que nous abordons plus loin.

On a alors $\mathcal{H}_{\delta}^1([0; 1]) + \epsilon > \sum_{k=0}^{n-1} \text{diam}([a_k; a_{k+1}]) = 1$. En faisant tendre ϵ puis δ vers 0, on obtient $\mathcal{H}^1([0; 1]) \geq 1$, ce qui conclut la démonstration.

Nous nous proposons maintenant de définir rigoureusement la notion de courbes paramétrées, afin d'en étudier des propriétés par le prisme de la mesure de Hausdorff.

Définition 2.3.1 (Courbe paramétrée). *Soit $a > 0$ et $I = [0; a]$ un intervalle.*

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, une application continue et injective dans \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne.

On appelle courbe de \mathbb{R}^n l'image de I par γ . Ainsi on pose $\Gamma = \gamma(I)$ et on dit que γ est une paramétrisation de Γ .

De plus, si $J = [b; c]$ est un intervalle inclu dans I , on définit la notion de longueur de γ le long de J notée $\ell(\gamma, J)$ avec :

$$\ell(\gamma, J) = \sup_{b=t_0 < t_1 < \dots < t_n=c} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \right\}. \quad (7)$$

Remarque : Il s'agit de la borne supérieure prise sur tous les découpages du segment $[b; c]$.

On définit alors la notion de longueur de courbe :

Définition 2.3.2. *Soit Γ une courbe de \mathbb{R}^n et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de Γ . On définit la longueur de Γ par :*

$$\ell(\Gamma) = \ell(\gamma, I).$$

La définition de longueur d'une courbe n'aurait aucun sens sans la propriété centrale qui suit :

Proposition 2.3.2. *La longueur d'une courbe est indépendante de la paramétrisation choisie.*

Ainsi si $\gamma_1 : [0; a_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $\gamma_2 : [0; a_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux paramétrisations différentes d'une même courbe Γ , alors $\ell(\gamma_1, [0; a_1]) = \ell(\gamma_2, [0; a_2])$.

Preuve : Soient γ_1 et γ_2 deux paramétrisations d'une même courbe Γ . Par construction, ces applications sont continues et bijectives sur leur image, avec $\gamma_1([0; a_1]) = \gamma_2([0; a_2]) = \Gamma$.

On définit alors $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [0; a_1] \rightarrow [0; a_2]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on construit alors les réels $(t_k)_{k=0, \dots, n}$ en posant $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a_1$, auxquels on associe les réels $(s_k)_{k=0, \dots, n}$ définis par $s_k = \sigma(t_k)$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

L'application σ étant bijective et continue, elle est monotone, et donc $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = a_2$ si elle est croissante, et $0 = s_n < s_{n-1} < \dots < s_0 = a_2$ si elle est décroissante .

De plus, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| = \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\|$,

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| = \sum_{k=0}^n \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\|.$$

Et ce pour n'importe quels $(t_k)_{k=0, \dots, n}$ tels que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a_1$. Ainsi par strict croissance de σ :

$$\begin{aligned} \sup_{0=s_0 < s_1 < \dots < s_n=a_2} \left\{ \sum_{k=0}^n \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| \right\} &= \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=a_1} \left\{ \sum_{k=0}^n \|\gamma_1(\sigma(t_k)) - \gamma_1(\sigma(t_{k-1}))\| \right\} \\ &= \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=a_1} \left\{ \sum_{k=0}^n \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\| \right\}. \end{aligned}$$

La mesure de Hausdorff va alors prendre son sens puisqu'elle permet de retrouver la notion de longueur d'une courbe sans se préoccuper d'une quelconque paramétrisation. En effet :

Proposition 2.3.3. *Soit Γ une courbe de \mathbb{R}^n ,*

$$\ell(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

Preuve : Soit $\gamma : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de Γ , et on note p la projection sur la droite $(\gamma(0), \gamma(a))$.

On a par connexité de Γ que $[\gamma(0); \gamma(a)] \subset p(\Gamma)$. p est une application 1-Lipschitzienne, donc $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \mathcal{H}^1(p(\Gamma)) \geq \|\gamma(a) - \gamma(0)\|$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a$. On définit alors $\Gamma_k = \gamma([t_{k-1}, t_k])$. On note que

$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k) = \mathcal{H}^1(\{\gamma(t_{k-1})\}) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Gamma) &= \sum_{k=0}^n \mathcal{H}^1(\Gamma_k) \\ &\geq \sum_{k=0}^n \mathcal{H}^1(p(\Gamma_k)) \\ &\geq \sum_{k=0}^n \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\|. \end{aligned}$$

On conclut la première inégalité en passant à la borne supérieure sur les découpages de $[0; a]$.

Pour l'autre inégalité, on pose l'application :

$$\begin{aligned} u &: [0; a] \rightarrow [0; \ell(\Gamma)] \\ t &\mapsto \ell(\gamma, [0; t]). \end{aligned}$$

Cette application est strictement croissante, $v(0) = 0$, $v(a) = \ell(\Gamma)$, et elle est de plus continue. En effet, soient $t \in [0; a]$, $s \in [0; t]$. On a :

$$\begin{aligned} u(t) - u(s) &= \ell(\gamma, [s, t]) \\ &\leq \mathcal{H}^1(\gamma([s, t])). \end{aligned}$$

Or $\bigcap_{s < t} \gamma([s, t]) = \{\gamma(s)\}$, et donc $\lim_{s \rightarrow t^-} \mathcal{H}^1(\gamma([s, t])) = \mathcal{H}^1(\bigcap_{s < t} \gamma([s, t])) = \mathcal{H}^1(\gamma(s)) = 0$. u est donc bien continue.

$$\text{On définit alors : } \bar{\gamma} : [0; \ell(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \gamma(u^{-1}(t)).$$

Soient $t_1, t_2 \in [0; \ell(\Gamma)]$ avec $t_1 < t_2$. On a :

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma}(t_1) - \bar{\gamma}(t_2)\| &\leq \ell(\bar{\gamma}, [t_1, t_2]) \\ &= \ell(\bar{\gamma}, [0, t_2]) - \ell(\bar{\gamma}, [0, t_1]) \\ &= \ell(\gamma, [0, u^{-1}(t_2)]) - \ell(\gamma, [0, u^{-1}(t_1)]) \\ &= u(u^{-1}(t_2)) - u(u^{-1}(t_1)) \\ &= t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Donc $\bar{\gamma}$ est 1-Lipschitzienne. On en déduit que $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\bar{\gamma}([0; \ell(\Gamma)])) \leq \mathcal{H}^1([0; \ell(\Gamma)]) = \ell(\Gamma)$.

On a défini la dimension de Hausdorff d'un ensemble A comme l'unique réel d tel que

$$d = \sup\{s \in \overline{\mathbb{R}}^+ \mid \mathcal{H}^s = \infty\} = \inf\{s \in \overline{\mathbb{R}}^+ \mid \mathcal{H}^s = 0\}.$$

Cette unicité nous assure donc que la dimension de Hausdorff du segment $[0; 1]$ est 1, et de la même manière que la dimension d'une courbe paramétrée de \mathbb{R}^n vaut également 1.

Les derniers résultats nous montrent donc qu'en dimension 1, la mesure de Lebesgue et la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle coïncident, mais que la mesure de Hausdorff de sous-ensembles de \mathbb{R}^n n'est pas forcément nulle contrairement à la mesure de Lebesgue.

En réalité, on peut généraliser les liens entre mesure de Lebesgue et mesure de Hausdorff dans \mathbb{R}^n grâce à l'inégalité isodiamétrique que l'on aborde dans le paragraphe suivant.

3 Inégalité isodiamétrique et lien avec la mesure de Lebesgue

Dans toute cette section on notera λ^n la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n , et b_n le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^n .

3.1 L'inégalité isodiamétrique

Le but de cette partie est de donner une preuve de l'inégalité suivante :

Théorème 3.1.1. *Quelle soit $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\lambda^n(A) \leq b_n \left(\frac{\text{diam}(A)}{2} \right)^n. \quad (8)$$

Pour ce faire, nous aurons besoin du procédé de symétrisation de Steiner.

Définition 3.1.1 (Procédé de symétrisation de Steiner). *Soient a, b deux vecteurs de \mathbb{R}^n avec $\|a\| = 1$. On pose :*

$$L_b^a := \{b + ta; t \in \mathbb{R}\}$$

$$P_a := \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, a \rangle = 0\}$$

On définit la symétrisation de Steiner par rapport à l'hyperplan P_a de la manière suivante : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$S_a(A) := \bigcup_{b \in P_a, A \cap L_b^a \neq \emptyset} \{b + ta; |t| \leq \frac{1}{2} \lambda^1(A \cap L_b^a)\}.$$

Il s'agit donc de remplacer le segment $A \cap L_b^a$ par un segment de même direction que L_b^a centré en b et de longueur $\lambda^1(A \cap L_b^a)$. Géométriquement cela revient à ramener sur l'axe des abscisses la section d'une région par une droite et faire varier l'abscisse de cette droite.

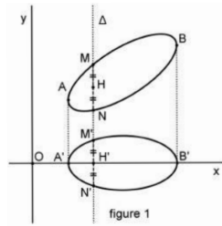


FIGURE 5 – Procédé de symétrisation de Steiner

On admet les deux propriétés suivantes :

- Proposition 3.1.1.**
1. $\text{diam}(S_a(A)) \leq \text{diam}(A)$
 2. si A est mesurable, alors $S_a(A)$ aussi et $\lambda^n(A) = \lambda^n(S_a(A))$.

Preuve du théorème :

L'idée de la preuve est d'appliquer plusieurs procédés de Steiner à A de manière à le rendre symétrique à 0 et ainsi diminuer son diamètre mais pas sa mesure. On obtiendra en effet un ensemble centré en 0 et inclus dans la boule euclidienne de diamètre inférieur à celui de A .

Ainsi on suppose A de diamètre fini, et on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . On pose $A_1 := S_{e_1}(A)$ et $\forall k \in \{2, \dots, n\}, A_k := S_{e_k}(A_{k-1})$. Enfin on pose $A^* = A_n$. On veut que A^* soit symétrique à 0. Pour cela montrons par récurrence que quelque soit $k \in \{1, \dots, n\}, A_k$ est symétrique par rapport à P_{e_1}, \dots, P_{e_k} .

Pour $k = 1$, il est clair que c'est le cas.

Supposons la propriété vraie à k fixé, et montrons-la pour A_{k+1} , et plus particulièrement montrons que

$\sigma_j(A_{k+1}) = A_{k+1} \forall j \in \{1, \dots, k\}$, où σ_j désigne la réflexion orthogonale par rapport à P_{e_j} .

Soit $b \in P_{e_{k+1}}$. Par hypothèse de récurrence, $\sigma_j(A_k) = A_k$. On montre donc aisément que $\sigma_j(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = A_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}}$,

et ainsi $\lambda^1(\sigma_j(A_k \cap L_b^{e_{k+1}})) = \lambda^1(A_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}})$.

Or :

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= S_{e_{k+1}}(A_k) \\ &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, A_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \emptyset} \left\{ b + te_{k+1}; |t| \leq \frac{1}{2} \lambda^1(A \cap L_b^{e_{k+1}}) \right\}. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \sigma_j(A_{k+1}) &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, A_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \emptyset} \left\{ \sigma_j(b) + t\sigma_j(e_{k+1}); |t| \leq \frac{1}{2} \lambda^1(A \cap L_b^{e_{k+1}}) \right\} \\ &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, A_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \emptyset} \left\{ \sigma_j(b) + te_{k+1}; |t| \leq \frac{1}{2} \lambda^1(A \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}}) \right\} \end{aligned}$$

Comme A_k est symétrique à P_{e_j} , si $A_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \emptyset$, alors $A_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}} \neq \emptyset$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_j(A_{k+1}) &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, A_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \emptyset} \left\{ b + te_{k+1}; |t| \leq \frac{1}{2} \lambda^1(A \cap L_b^{e_{k+1}}) \right\} \\ &= A_{k+1} \end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, \sigma_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$.

Ainsi A^* est symétrique à P_{e_1}, \dots, P_{e_n} et donc à 0.

$\forall x \in A^*, -x \in A^*$, et donc, $|x| \leq \frac{\text{diam}(A^*)}{2}$.

On en déduit que, $A^* \subset B(0, \frac{\text{diam}(A^*)}{2})$.

On peut donc conclure, en notant que si A n'est pas forcément mesurable, \bar{A} l'est :

$$\begin{aligned} \lambda^n(A) &\leq \lambda^n(\bar{A}) \\ &= \lambda^n(\bar{A}^*) \\ &\leq b_n \left(\frac{\text{diam}(\bar{A}^*)}{2} \right)^n \\ &\leq b_n \left(\frac{\text{diam}(\bar{A})}{2} \right)^n \\ &\leq b_n \left(\frac{\text{diam}(A)}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

3.2 Le théorème de recouvrement de Vitali

Pour parvenir au résultat central de la troisième partie de cet exposé, nous avons besoin du résultat intermédiaire suivant :

Théorème 3.2.1 (Théorème de recouvrement de Vitali). *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et \mathcal{F} une famille de boules fermées d'intérieur non vide. On suppose que*

1. $\forall x \in A, \exists B \in \mathcal{F}$ telle que $x \in B$
2. $\forall x \in A, \inf_{B \in \mathcal{F}; x \in B} \text{diam}(B) = 0$

Alors il existe une famille dénombrable $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ telle que :

1. Les boules de \mathcal{G} sont deux à deux disjointes
2. $\lambda^n \left(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0$.

Pour démontrer le théorème nous aurons besoin des deux lemmes suivants que nous admettrons :

Lemme 3.2.1 (Zorn). *Soit (X, d) un espace métrique. Soit \mathcal{F} une famille de boules fermées de X . Alors il existe une sous-famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ formée de boules deux à deux disjointes, telle que si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{F}$ avec \mathcal{G}' famille de boules deux à deux disjointes, alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.*

Notation : Si $B = B(x, r)$, $x \in X$, $r > 0$, on pose $5B = B(x, 5r)$

Lemme 3.2.2 (Lemme de recouvrement 5r). *Soit (X, d) un espace métrique séparable. Soit \mathcal{F} une famille de boules de X telles qu'aucune n'est réduite à son centre et que $\sup_{B \in \mathcal{F}} \text{diam}(B) < \infty$.*

Alors il existe une sous-famille dénombrable $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ telle que :

1. \mathcal{G} est formée de boules deux à deux disjointes
2. $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B$.

Preuve du théorème :

Dans un premier temps, nous supposons A borné de mesure de Lebesgue finie. Alors par régularité, on peut trouver un ouvert U borné tel que $\lambda^n(U) \leq (1 + 7^{-n})\lambda^n(A)$. De plus $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$. Donc on peut trouver $B = B(y, \nu) \in \mathcal{F}$ telle que $x \in B$. Ainsi pour ν assez petit, $B \subset B(x, r) \subset U$. Et donc :

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}, B \subset U} B.$$

On peut alors appliquer le lemme 3.2.2 et trouver une famille $(B_i)_{i>0}$ dénombrables de boules disjointes de $\{B \in \mathcal{F}, B \subset U\}$, telle que

$$A \subset \bigcup_{i>0} 5B_i.$$

Et de plus $5^{-n}\lambda^n(A) \leq 5^{-n} \sum_{i>0} \lambda^n(5B_i) = 5^{-n} \sum_{i>0} 5^n \lambda^n(B_i) = \sum_{i>0} \lambda^n(B_i)$.

On peut donc trouver un entier k_1 tel que $6^{-n}\lambda^n(A) \leq \sum_{i>0}^{k_1} \lambda^n(B_i)$.

On pose alors $A_1 := A \setminus \bigcup_{0<i \leq k_1} B_i$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda^n(A_1) &\leq \lambda^n \left(U \setminus \bigcup_{0<i \leq k_1} B_i \right) \\ &= \lambda^n(U) - \sum_{0<i \leq k_1} \lambda^n(B_i) \\ &\leq \alpha \lambda^n(A). \end{aligned}$$

Avec $\alpha := 1 + 7^{-n} - 6^{-n}$.

Par régularité de la mesure de Lebesgue, on peut trouver un ouvert U_1 tel que $\forall x \in A_1, \exists r > 0, B(x, r) \subset U_1$. On recommence alors le procédé en trouvant un entier $k_2 > k_1$, une famille $(B_i)_{k_2 > k_1}$ dénombrables de boules disjointes de $\{B \in \mathcal{F}, B \subset U_1\}$ tels que si $A_2 := A_1 \setminus \bigcup_{k_2 > k_1} B_i = A \setminus \bigcup_{0 < i \leq k_2} B_i$, on a :

$$\lambda^n(A_2) \leq \alpha \lambda^n(A_1) \leq \alpha^2 \lambda^n(A).$$

On réitère l'opérations m fois, et on obtient finalement :

$$\lambda^n \left(A \setminus \bigcup_{0 < i \leq k_m} B_i \right) \leq \alpha^m \lambda^n(A), \quad 0 < \alpha < 1$$

Ce qui permet de conclure la preuve en faisant tendre m vers l'infini.

Nous avons maintenant toutes les armes pour démontrer le résultat central de cette partie.

3.3 Mesure de Hausdorff n -dimensionnelle et mesure de Lebesgue

L'objectif de cette partie est démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Quelque soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda^n(A) = \alpha_n \mathcal{H}^n(A)$, où $\alpha_n = \frac{b_n}{2^n}$.*

Dans certains ouvrages, on définit la mesure de Hausdorff en prenant en compte ce paramètre α_n afin d'obtenir une égalité entre λ^n et \mathcal{H}^n . Dans cet exposé, on a choisi pour un soucis de clarté de beaucoup de preuves précédentes de ne pas le faire apparaître et on se contentera d'un résultat de proportionnalité.

Preuve du théorème : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$.

Etape 1 : $\lambda^n(A) \leq \alpha_n \mathcal{H}^n(A)$

Soit $(A_k)_{k \geq 0}$ un recouvrement dénombrable de A tel que $\forall k, \text{diam}(A_k) < \delta$.

D'après l'inégalité isodiamétrique, $\lambda^n(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^n(A_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{\text{diam}(A_k)}{2} \right)^n$.

En passant à l'infimum sur les recouvrements dénombrables de \mathcal{R}_δ , on obtient que

$$\lambda^n(A) \leq \frac{b_n}{2^n} \mathcal{H}_\delta^n(A).$$

On conclut en faisant tendre δ vers 0.

Etape 2 : $\lambda^n(A) \geq \alpha_n \mathcal{H}^n(A)$

En fixant $\delta > 0$, on peut montrer aisément que

$$\lambda^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i > 0} \lambda^n(Q_i); Q_i \text{ cubes tels que } \text{diam}(Q_i) \leq \delta, A \subset \bigcup Q_i \right\}.$$

On en déduit donc que la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^n . Ainsi en posant $\epsilon, \delta > 0$, il existe un recouvrement de A par $(Q_i)_{i > 0}$ cubes tels que $\text{diam}(Q_i) \leq \delta$, de manière à ce que $\sum \lambda^n(Q_i) \leq \lambda^n(A) + \epsilon$.

En vertu du théorème de Vitali, on peut trouver pour chaque Q_i une famille dénombrable de boules fermées disjointes d'intérieur non vides telle que $\lambda^n \left(Q_i \setminus \bigcup_k B_k^i \right) = 0 = \mathcal{H}^n \left(Q_i \setminus \bigcup_k B_k^i \right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^n(A) &\leq \sum_{i \geq 0} \mathcal{H}_\delta^n(Q_i) \\ &\leq \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mathcal{H}_\delta^n(B_k^i) \\ &\leq \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \text{diam}((B_k^i))^n \\ &= \frac{2^n}{b_n} \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{b_n}{2^n} \text{diam}((B_k^i))^n \\ &= \frac{2^n}{b_n} \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} \lambda^n(B_k^i) \\ &= \frac{2^n}{b_n} \sum_{i \geq 0} \lambda^n(Q_i) \\ &= \frac{2^n}{b_n} \lambda^n(A).\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration et cette partie.

4 Ensembles autosimilaire et première approche fractale

Nous avons donc construit une nouvelle notion de dimension qui coïncide avec la dimension euclidienne pour les objets usuels de l'espace euclidien et qui permet d'associer une dimension aux objets fractales : la dimension de Hausdorff. Ainsi Benoît Mandelbrot définit un objet fractal comme tout objet de dimension de Hausdorff strictement supérieure à sa dimension topologique. Cette définition sera abandonnée car trop restrictive et remplacée par une définition plus informelle : des figures invariables par changement d'échelle.

Il existe plusieurs types d'objet fractal selon leur construction : par processus stochastique, par récurrence sur le plan complexe, ou par système de fonctions itérées. Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier la dimension de fractales construites de la dernière manière.

4.1 Ensembles autosimilaires

On se place dans un espace métrique (E, d) .

Définition 4.1.1 (Distance de Hausdorff). *Soit $r > 0$.*

On pose $\mathcal{V}_r(A) := \{x \in E, d(x, A) < r\}$.

On définit la distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles A et B de E comme la quantité

$$d_H(A, B) := \inf\{r > 0, A \subset \mathcal{V}_r(B) \text{ et } B \subset \mathcal{V}_r(A)\}. \quad (9)$$

Proposition 4.1.1. *La distance de Hausdorff est une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts non vides de E .*

Preuve :

1. On a directement $d_H(A, B) = d_H(B, A)$, $\forall A, B \in \mathcal{K}(E)$.
2. Si $d_H(A, B) = 0$, alors $\forall \epsilon > 0$, $A \subset \mathcal{V}_\epsilon(B)$. On en déduit donc que $\forall \epsilon > 0$, $\forall x \in A$, $d(x, B) < \epsilon$ et donc $d(x, B) = 0$, $\forall x \in A$. Ainsi $A \subset B$ car B est fermé. Symétriquement, $B \subset A$ et donc $A = B$.
3. Soient $A, B, C \in \mathcal{K}(E)$, $\epsilon > 0$. On pose $d_1 = d_H(A, B)$ et $d_2 = d_H(B, C)$. Ainsi, $A \subset \mathcal{V}_{d_1 + \frac{\epsilon}{2}}(B)$ et $B \subset \mathcal{V}_{d_2 + \frac{\epsilon}{2}}(C)$, et donc $A \subset \mathcal{V}_{d_1 + d_2 + \epsilon}(C)$. De la même manière $C \subset \mathcal{V}_{d_1 + d_2 + \epsilon}(A)$. On a donc $d_H(A, C) \leq d_1 + d_2 + \epsilon$. On conclut en faisant tendre ϵ vers 0.

On peut alors remarquer le lemme suivant :

Lemme 4.1.1 (Admis). *Si (E, d) est complet, $(\mathcal{K}(E), d_H)$ l'est également.*

On suppose désormais (E, d) complet.

Définition 4.1.2. *Soient f_1, \dots, f_n des similitudes contractantes sur E de rapports r_1, \dots, r_n . On appelle (f_1, \dots, f_n) un système de fonctions itérées de rapport (r_1, \dots, r_n) .*

On dit que $K \in \mathcal{K}(E)$ un attracteur de (f_1, \dots, f_n) si

$$K = \bigcup_{i=0}^n f_i(K). \quad (10)$$

K est dit auto-similaire.

Un ensemble auto-similaire est donc un ensemble formé de contractions de lui-même. Cette définition permet donc de définir la première famille de fractales grâce au théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Un système de fonction itérées admet un unique attracteur.*

Preuve :

On pose la fonction suivante :

$$\begin{aligned} F & : \mathcal{K}(E) \rightarrow \mathcal{K}(E) \\ A & \mapsto \bigcup_{i=0}^n f_i(A) \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que F est contractante. En effet, $(\mathcal{K}(E), d_H)$ étant complet, on aura l'existence d'un unique point fixe pour F .

Posons $r = \max\{r_1 \dots r_n\}$.

Soient $A, B \in \mathcal{K}(E)$, $\epsilon > 0$, $y \in F(A)$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in A$ tels que $y = f_i(x)$.

On prend alors $x' \in B$ tel que $d(x, x') \leq d_H(A, B) + \frac{\epsilon}{r}$ et on pose $y' = f_i(x')$. On a donc

$$d(y, y') = d(f_i(x), f_i(x')) = r_i d(x, x') \leq r d_H(A, B) + \epsilon$$

On réalise la même opération en inversant les rôles de $F(A)$ et $F(B)$, et on obtient finalement que $d_H(F(A), F(B)) \leq d_H(A, B) + \epsilon$. On conclut la démonstration en faisant tendre ϵ vers 0.

4.2 Dimension fractale

Définition 4.2.1 (Dimension de similitude). *On appelle dimension de similitude du système de fonction itérées (f_1, \dots, f_n) l'unique réel $s \geq 0$ tel que $\sum_{i=0}^n r_i^s = 1$.*

L'existence de ce réel est donné par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue strictement décroissante $s \rightarrow \sum_{i=0}^n r_i^s - 1$.

On se place maintenant et pour la suite dans \mathbb{R}^d .

Définition 4.2.2. *On dit qu'un système de fonction itérées vérifie la condition de Moran s'il existe un ouvert O de \mathbb{R}^d tel que :*

1. $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f_i(O) \subset O$
2. Si $i \neq j, f_i(O) \cap f_j(O) = \emptyset$.

Théorème 4.2.1 (Admis). *Soit (f_1, \dots, f_n) un système de fonctions itérées vérifiant la condition de Moran. En notant K son attracteur et s sa dimension de similitude,*

$$0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty.$$

Ainsi, si l'on se place dans les conditions du théorème précédent,

$$\mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^n f_i(K)\right) = \sum_{i=0}^n \mathcal{H}^s(f_i(K)) = \mathcal{H}^s(K) \sum_{i=0}^n r_i^s \quad (11)$$

On a donc $s = \dim_H K$.

Les ensembles autosimilaires définissent donc des figures fractales dont il est en pratique assez facile de calculer la dimension, ce que nous montrons dans le paragraphe suivant.

4.3 Premiers exemples

4.3.1 Le triangle de Sierpinski

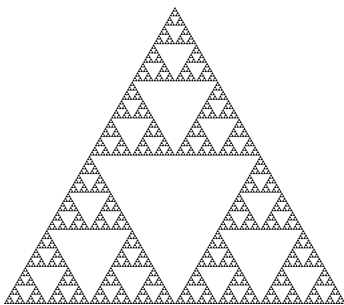


FIGURE 6 – Triangle de Sierpinski

Construction

1. On prend un triangle "père" T équilatéral².
2. On trace les segments reliant les milieux de chaque côté. On obtient alors quatre triangles dont les longueurs de côtés valent la moitié de celle de T .
3. On retire le triangle central de la figure.
4. On réitère l'opération à l'infini sur les trois triangles "fils".

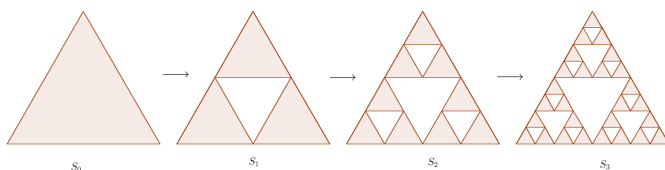


FIGURE 7 – Quatre premières itérations du triangle de Sierpinski

Dimension

Soit (OAB) un triangle équilatéral, (f_1, f_2, f_3) trois homothéties (et donc similitudes) de centres respectifs O , A , et B , de rapport $\frac{1}{2}$.

La construction K obtenue par itérations de l'algorithme ci-dessus appliqué à (OAB) est l'attracteur du système de fonctions itérées formé des trois similitude (f_1, f_2, f_3) . Sa dimension de similitude vaut donc :

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \Rightarrow s = \frac{\log 3}{\log 2}$$

De plus, (f_1, f_2, f_3) satisfait la condition de Moran grâce à l'intérieur du triangle (OAB) , noté ω . En effet, si B_1 , O_1 , A_1 sont respectivement les milieux des côtés OA , AB , OB , alors $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$ sont respectivement les intérieurs des triangles OB_1A_1 , B_1AO_1 , O_1BA_1 , et sont tous disjoints et inclus dans ω .

Donc sa dimension de Hausdorff est égale à sa dimension de similitude, et donc :

$$\dim_H(K) = s = \frac{\log 3}{\log 2}$$

2. la construction est la même pour un triangle quelconque

4.3.2 La courbe de Peano

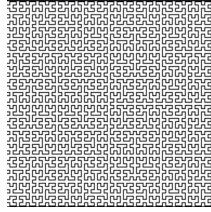
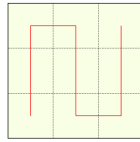


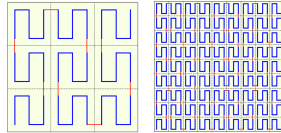
FIGURE 8 – Courbe de Peano

Construction

1. On se place sur un carré "père".
2. On divise le carré en neuf carrés de coté de longueur $\frac{1}{3}$.
3. On trace la ligne brisée joignant les centres de tous les carrés "fils".



4. On réitère l'opération à l'infini sur les carrés "fils".



Dimension

La ligne brisée obtenue par la construction précédente est l'attracteur du système de fonctions itérées formé de neuf similitudes de rapport $\frac{1}{3}$, que l'on admet satisfaire la condition de Moran. Sa dimension de Hausdorff vaut donc :

$$9\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \Rightarrow s = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

Remarque : La fonction $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]^2$, que l'on définit comme limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ où f_n est la ligne brisée obtenue à la n-ième itération de l'algorithme ci-dessus, est une surjection.

4.3.3 Pinwheel Tiling

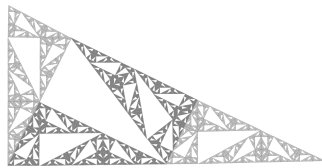


FIGURE 9 – Pinwheel Tiling

Construction

1. On part du triangle droit "père" T de côté 1,2 et d'hypothénuse $\sqrt{5}$.
2. On pave ce triangle avec 5 homothéties de rapport $\frac{1}{\sqrt{5}}$. On obtient donc 5 triangles "fils" contenus dans T .
3. On enlève le triangle central n'ayant aucun coté inclu dans l'un des cotés du triangle "père".
4. On réitère l'opération à l'infini sur les quatre triangles "fils".

Dimension

La figure obtenue par la construction précédente est l'attracteur du système de fonctions itérées formé de quatre similitudes de rapport $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Sa dimension de Hausdorff vaut donc :

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^s = 1 \Rightarrow s = \frac{\log 4}{\log \sqrt{5}}$$

5 Espaces de mots et ensemble de Cantor

5.1 Espaces de mots

5.1.1 Construction

Prenons un alphabet E , c'est à dire un ensemble fini de caractères, qu'on appelle lettres. De cet alphabet, on peut construire des mots, par exemple, si $E = \{0; 1\}$, $\alpha = 001101001$. Le nombre de lettres d'un mot se nomme la longueur du mot et est notée $|\alpha|$. Ainsi, dans le même exemple que précédemment, $|\alpha| = 9$.

On définit $E^{(n)}$ l'ensemble des mots de longueur n , et $E^{(*)}$ l'ensemble des mots finis. On a donc :

$$E^{(*)} = \bigcup_{n \geq 0} E^{(n)}.$$

Si $|\alpha| \geq n$, on note $\alpha \upharpoonright n$ le segment initial de longueur n de α , à savoir ses n premières lettres. Dans notre exemple, $\alpha \upharpoonright 4 = 0011$.

On munit $E^{(*)}$ d'une loi de concaténation, si bien qu'on dit qu'un mot α est un préfixe d'un mot β s'il existe un mot γ tel que $\beta = \alpha\gamma$. On note alors $\alpha \leq \beta$.

Définition 5.1.1. Soit $A \subset E^{(*)}$ non vide.

1. Un mot γ est appelé borne inférieure de A si $\forall \alpha \in A, \gamma \leq \alpha$. Autrement dit, γ est un préfixe de tous les éléments de A .
2. Un mot β est la plus grande borne inférieure si c'est une borne inférieure de A et si $\gamma \leq \beta$ pour tout γ borne inférieure de A .

Proposition 5.1.1. Tout sous-ensemble non vide A de $E^{(*)}$ possède une unique plus grande borne inférieure.

Preuve : Soit $\beta \in A$, tel que $|\beta| = n$. Soit $k_0 \in \{0, \dots, n\}$ le plus grand entier tel que $\beta \upharpoonright k_0$ est une borne inférieure de A (dans le pire des cas, $k_0 = 0$ fonctionne). Montrons que $\beta \upharpoonright k_0$ est la plus grande borne inférieure.

Soit γ une autre borne inférieure. $\beta \in A$ donc $\gamma \leq \beta$. Donc il existe un entier $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\gamma = \beta \upharpoonright k$. Par définition de k_0 , $k \leq k_0$. Donc $\gamma \leq \beta \upharpoonright k_0$. Donc $\beta \upharpoonright k_0$ est bien la plus grande borne inférieure.

On note désormais $E^{(\omega)}$ l'espace des mots de longueur infinie.

Définition 5.1.2. Soit $\alpha \in E^{(*)}$ un mot fini. On définit le cylindre issu de α par :

$$[\alpha] := \{\sigma \in E^{(\omega)}, \alpha \leq \sigma\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des mots de longueur infinie débutant par la séquence finie α .

On a donc, si $E = \{0; 1\}$, $[\alpha 0] \cup [\alpha 1] = [\alpha]$, et $[\alpha 0] \cap [\alpha 1] = \emptyset$.

Soit $h : E^{(\omega)} \rightarrow \mathbb{R}$. Une fonction de la sorte est appelée une **fonction d'adresse** et permet de modéliser des ensembles dans \mathbb{R} . On appelle alors $E^{(\omega)}$ un espace de codage et un mot $\sigma \in E^{(\omega)}$ l'adresse du réel $h(\sigma)$ qui lui est associé.

Par exemple, $E = \{0; 1\}$, au mot périodique $\sigma = 01010101\dots$, on peut y associer $h(\sigma) = (0.01010101\dots)_2 = \frac{1}{3}$. La fonction d'adresse est alors la fonction de codage des fractions en binaire, l'adresse de $\frac{1}{3}$ dans l'espace de codage $E^{(\omega)}$ est 01010101...

5.1.2 Métrique sur les espaces de mots

Soit $0 < r < 1$. On définit une distance sur $E^{(\omega)}$ par la fonction $\rho_r : E^{(\omega)} \times E^{(\omega)} \rightarrow \mathbb{R}$, définie de la manière suivante : si σ et τ sont deux mots ayant α comme plus grand préfixe commun, et $|\alpha| = k$,

$$\rho_r(\sigma, \tau) = r^k.$$

Il s'agit bien d'une distance sur $E^{(\omega)}$. De plus, tout cylindre $[\alpha]$ a pour diamètre $r^{|\alpha|}$. Enfin, $(E^{(\omega)}, \rho_r)$ est complet, compact et séparable.

Proposition 5.1.2. *Les différents espaces métriques $(E^{(\omega)}, \rho_r)$ définis selon la valeur de r sont homéomorphes entre eux.*

On peut définir une notion de distance plus forte encore sur des espaces de mots en associant à chaque mot α une valeur w_α selon la règle suivante :

1. $w_\alpha > w_\beta$ si $\alpha < \beta$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\sigma \upharpoonright n} = 0$, $\sigma \in E^{(\omega)}$.

Par exemple, en prenant $E = \{0, 1\}$ comme alphabet, on peut poser $\forall \alpha \in E^{(\omega)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{\alpha \upharpoonright n} = \frac{1}{2^n}$.

Ainsi, si $\alpha < \beta$, il existe k tel que $\alpha = \beta \upharpoonright k$, et $|\beta| > k$. Donc $w_\alpha = \frac{1}{2^k} > w_\beta$. Le deuxième axiome se montre directement.

Soit σ et τ deux mots. On pose $\rho(\sigma, \tau) = 0$ si $\sigma = \tau$, et sinon $\rho(\sigma, \tau) = w_\alpha$, où α est le plus grand préfixe commun de σ et τ .

Proposition 5.1.3. *La fonction ρ défini ci-dessus est une distance ultramétrique sur $E^{(\omega)}$, c'est à dire qu'elle vérifie les axiomes usuels de la distance, mais aussi l'inégalité ultratriangulaire :*

$$\rho(\sigma, \tau) \leq \max\{\rho(\sigma, \nu); \rho(\nu, \tau)\}, \quad \forall \sigma, \tau, \nu \in E^{(\omega)}.$$

De plus cette métrique vérifie $\text{diam}([\alpha]) = w_\alpha$, $\forall \alpha \in E^{()}$.*

Preuve : Les deux premiers axiomes sont directs.

Pour l'inégalité ultratriangulaire, on suppose les trois mots σ, τ, ν tous différents (sinon c'est trivial).

Soit α (respectivement β), le plus grand préfixe commun de σ et ν (respectivement de ν et τ). Ce sont tous les deux des préfixes de ν donc soit $\alpha \leq \beta$, soit $\beta \leq \alpha$. Supposons donc que $\alpha \leq \beta$. Alors α est aussi un préfixe de σ et de τ , et donc $\alpha \leq \gamma$, où γ désigne le plus grand préfixe commun de σ et de τ . Donc :

$$\rho(\sigma, \tau) = w_\gamma \leq w_\alpha = \rho(\sigma, \nu) \leq \max\{\rho(\sigma, \nu); \rho(\nu, \tau)\}.$$

Le cas $\beta \leq \alpha$ se montre de la même manière.

Il reste à montrer que $\text{diam}([\alpha]) = w_\alpha$, $\forall \alpha \in E^{(*)}$.

Soit $\sigma, \tau \in [\alpha]$. On note β leur plus grand préfixe commun. On a alors $\alpha \leq \beta$, donc $w_\beta \leq w_\alpha$. Ainsi $\text{diam}([\alpha]) \leq w_\alpha$.

Soit $\sigma \in E^{(\omega)}$. On a alors $\forall \phi, \psi \in E$, $\alpha\phi\sigma, \alpha\psi\sigma \in [\alpha]$ et donc $\text{diam}([\alpha]) \geq w_\alpha$.

Proposition 5.1.4. *Soit A une partie de $E^{(\omega)}$ avec au moins deux éléments. Alors il existe un cylindre $[\alpha]$ tel que $A \subseteq [\alpha]$ et $\text{diam}(A) = \text{diam}([\alpha])$.*

Preuve : Soit α le plus grand préfixe commun à tous les éléments de A . α est fini de longueur k , potentiellement vide, $A \subset [\alpha]$ et donc $\text{diam}(A) \leq \text{diam}([\alpha])$.

Soit $\sigma \in A$. On a clairement $\sigma \upharpoonright k = \alpha$. Mais en revanche, $\sigma \upharpoonright (k+1)$ n'est pas un préfixe commun à A . Donc il existe $\tau \in A$ tel que $\sigma \upharpoonright (k+1) \neq \tau \upharpoonright (k+1)$. α est donc le plus grand préfixe commun à la paire $\{\sigma, \tau\}$, et donc $\rho(\sigma, \tau) = w_\alpha$. Ainsi, $\text{diam}(A) \geq w_\alpha = \text{diam}([\alpha])$.

5.2 Mesure sur les espaces de mots

5.2.1 Construction

On se place sur l'espace $E^{(\omega)}$. On associe à chaque mot un nombre positif selon la règle définie plus haut. On peut donc munir l'espace de la distance ultramétrique ρ .

On peut engendrer tous les ouverts de cet espace avec la base dénombrable $\mathcal{A} := \{[\alpha], \alpha \in E^{(*)}\}$. On aimerait donc définir une mesure extérieure métrique \mathcal{M} telle que $\mathcal{M}([\alpha]) = w_\alpha$.

On définit la quantité suivante :

$$\forall B \subset E^{(\omega)}, \mathcal{M}(B) := \inf_{D \subset \mathcal{R}(B)} \sum_{[\alpha] \in D} c([\alpha])$$

où $\mathcal{R}(B)$ désigne les recouvrements de B par des éléments de \mathcal{A} , et $c([\alpha]) = w_\alpha$.

Théorème 5.2.1. *Si les nombres w_a satisfont :*

$$w_\alpha = \sum_{e \in E} w_{\alpha e},$$

Alors la quantité \mathcal{M} définit sur $E^{(\omega)}$ une mesure extérieure métrique telle que $\mathcal{M}([\alpha]) = w_\alpha$.

Preuve :

Etape 1 :

Nous obtenons avec la construction faite ici de \mathcal{M} une mesure extérieure, d'après la section 1.2. Cependant, rien ne nous assure a priori qu'il s'agisse d'une mesure métrique.

On pose donc $\mathcal{A}_\epsilon := \{D \in \mathcal{A}, \text{diam}(D) \leq \epsilon\}$. On définit de manière semblable la quantité

$$\mathcal{N}_\epsilon(B) := \inf_{D \subset \mathcal{R}_\epsilon(B)} \sum_{[\alpha] \in D} c([\alpha])$$

où $\mathcal{R}_\epsilon(B)$ désigne les recouvrements de B par des éléments de \mathcal{A}_ϵ .

On définit alors

$$\mathcal{N}(D) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}_\epsilon(D).$$

On montre exactement de la même manière que dans la propriété 1.3.1 qu'il s'agit bien d'une mesure extérieure métrique.

De plus, $\forall D \in \mathcal{A}_\epsilon, c(D) \geq \mathcal{M}(D)$. Donc $\mathcal{N}_\epsilon(A) \geq \mathcal{M}(A)$, et ainsi $\mathcal{N}(A) \geq \mathcal{M}(A), \forall A \in E^{(\omega)}$.

Etape 2 :

$\forall \sigma \in E^{(\omega)}, \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}([\sigma \upharpoonright k]) = 0$, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{\text{diam}([\alpha]), \alpha \in E^{(k)}\} = 0$.

De même,

$$c([\alpha]) = w_\alpha = \sum_{e \in E} w_{\alpha e} = \sum_{e \in E} c[\alpha e].$$

En réappliquant le procédé, on obtient que quelque soit $\epsilon > 0$, tout sous-ensemble $D \in \mathcal{A}$ peut s'écrire comme une union finie disjointe d'éléments $(D_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de \mathcal{A}_ϵ , avec $c(D) = \sum_{i=0}^n c(D_i)$. On a donc $\mathcal{N}_\epsilon(D) \leq c(D)$, et donc $\mathcal{N}_\epsilon(A) \leq \mathcal{M}(A)$.

En passant à la limite, sur ϵ , on montre que $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{M}(A)$ et donc $\mathcal{N}(A) = \mathcal{M}(A), \forall A \in E^{(\omega)}$, ce qui conclut la démonstration.

5.2.2 Lien avec la mesure de Hausdorff

On se donne (f_1, \dots, f_n) un système de fonctions itérées de rapport (r_1, \dots, r_n) . On pose E un alphabet de n lettres, en notant Λ le mot vide et si e est la k -ième lettre de l'alphabet, $r_e = r_k$.

On associe alors à chaque mot $\alpha \in E^{(\omega)}$ une valeur $r(\alpha)$ définit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r(\Lambda) &= 1 \\ r(\alpha e) &= r(\alpha)r_e \end{aligned}$$

On peut ensuite, grâce à ce qui a été fait précédemment, munir $E^{(\omega)}$ d'une distance ρ telle que $diam([\alpha]) = r(\alpha)$. En notant s la dimension de similitude du système (f_1, \dots, f_n) , on observe que :

$$\sum_{i=0}^n (r(\alpha)r_i)^s = r(\alpha)^s$$

Ainsi, les conditions du théorème 5.2.1 sont vérifiées et on peut définir sur $E^{(\omega)}$ une mesure extérieure métrique \mathcal{M} telle que $\mathcal{M}([\alpha]) = (r(\alpha))^s = (diam([\alpha]))^s$. On appelle cette mesure la mesure naturelle issue du rapport (r_1, \dots, r_n) .

Théorème 5.2.2. *Soit $E^{(\omega)}$ un espace de mots muni d'une métrique ρ et d'une mesure \mathcal{M} toutes deux issues du rapport (r_1, \dots, r_n) de similitudes (f_1, \dots, f_n) de dimension s .*

Alors

$$\mathcal{H}^s = \mathcal{M}. \tag{12}$$

Preuve : On pose $r_{max} = \max_e r_e$ et $r_{min} = \min_e r_e$.

Etape 1 :

Soit $A \subseteq E^{(\omega)}$ de diamètre positif. D'après la proposition 5.1.4, il existe α tel que $A \subseteq [\alpha]$ et $diam(A) = diam([\alpha])$. Donc $\mathcal{M}(A) \leq \mathcal{M}([\alpha]) = (diam([\alpha]))^s = (diam(A))^s$.

Or \mathcal{H}_ϵ^s est la plus grande mesure telle que $\mathcal{H}_\epsilon^s(A) \leq (diam(A))^s$, pour tout A tel que $diam(A) \leq \epsilon$. Par décroissance en ϵ de \mathcal{H}_ϵ^s , on en déduit que $\mathcal{M} \leq \mathcal{H}_\epsilon^s, \forall \epsilon > 0$ et donc que $\mathcal{M} \leq \mathcal{H}^s$.

Etape 2 :

Soit $\alpha \in E^{(*)}$ un mot fini et > 0 . Il existe un rang n tel que $r_{max}^n < \epsilon$ et $n \geq |\alpha|$. On a alors que $\forall \beta \in E^{(n)}, r(\beta) < \epsilon$. Or, $[\alpha]$ est une union disjointe des ensembles $[\beta]$ tels que $\beta \geq \alpha$ et $|\beta| = n$. Donc :

$$\mathcal{H}_\epsilon^s([\alpha]) \leq \sum_{\beta \geq \alpha, |\beta|=n} (diam([\beta]))^s = \sum_{\beta \geq \alpha, |\beta|=n} (\mathcal{M}([\beta])) = \mathcal{M}([\alpha]).$$

En passant à la limite, on obtient que $\mathcal{H}^s([\alpha]) \leq \mathcal{M}([\alpha])$, et l'ensemble $\mathcal{A} := \{[\alpha], \alpha \in E^{(*)}\}$ engendrant $E^{(\omega)}$, on en déduit que $\mathcal{H}^s \leq \mathcal{M}$.

5.3 Une application : l'ensemble triadique de Cantor

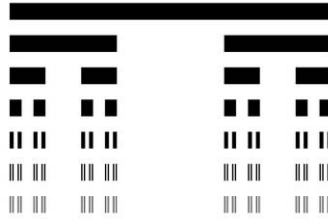


FIGURE 10 – Ensemble triadique de Cantor

5.3.1 Construction et propriétés

On part du segment $C_0 = [0; 1]$.

On le découpe en trois segments de même taille, et on enlève le segment du milieu. On obtient l'ensemble

$$C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1].$$

On découpe les deux segments de C_1 en trois segments de même longueur, et on retire le segment du milieu. On obtient

$$C_2 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{3}{9}] \cup [\frac{4}{9}; \frac{5}{9}] \cup [\frac{6}{9}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1].$$

On réitère le procédé. Finalement, à l'étape n , on obtient l'ensemble

$$C_n = [\frac{0}{3^n}; \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}; \frac{3}{3^n}] \cup \dots \cup [\frac{3^n - 3}{3^n}; \frac{3^n - 2}{3^n}] \cup [\frac{3^n - 1}{3^n}; 1].$$

Il s'agit donc de l'union de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$.

On note que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} \subset C_n$.

Définition 5.3.1 (Ensemble triadique de Cantor). *L'ensemble triadique de Cantor est l'intersection infinie de tous les C_n .*

$$C := \bigcap_{n \geq 0} C_n \quad (13)$$

On voit sans mal que C est non vide (il contient 0 et 1), fermé comme intersection infinie de fermés, borné et donc compact.

Il est de plus d'intérieur vide. En effet, si son intérieur $Int(C)$ était non vide, alors on pourrait trouver un segment non vide $I \subset Int(C) \subset C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Donc $\forall n, I \subset C_n$. Or la longueur des intervalles de C_n tend vers 0, donc la longueur

de I est à partir d'un certain rang N plus grande que celles des segments disjoints composant C_n , $\forall n \geq N$. Et donc I ne peut être dans l'intérieur de C , qui est donc vide.

Enfin, C est de mesure de Lebesgue nulle car $\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$.

Proposition 5.3.1. *Soit $n \geq 1$, l'ensemble C_n est la réunion de 2^n intervalles fermés de la forme*

$$\left[\frac{Q_{a_1 \dots a_n}}{3^n}; \frac{Q_{a_1 \dots a_n} + 1}{3^n} \right]$$

où $Q_{a_1 \dots a_n} = a_1 3^{n-1} + \dots + a_n 3^0$, $a_i \in \{0; 2\}$.

Preuve : On procède par récurrence. L'initialisation est directe pour C_1 .

On suppose que la propriété est vérifiée pour un n fixée, les intervalles composant C_n sont de la forme

$$\left[\frac{Q_{a_1 \dots a_n}}{3^n}; \frac{Q_{a_1 \dots a_n} + 1}{3^n} \right] = \left[\frac{3Q_{a_1 \dots a_n}}{3^{n+1}}; \frac{3Q_{a_1 \dots a_n} + 3}{3^{n+1}} \right]$$

où $Q_{a_1 \dots a_n} = a_1 3^{n-1} + \dots + a_n 3^0$, $a_i \in \{0; 2\}$.

On sépare le segment en 3 parties de même taille et on enlève celui du milieu. On obtient alors l'ensemble

$$\left[\frac{3Q_{a_1 \dots a_n}}{3^{n+1}}; \frac{3Q_{a_1 \dots a_n} + 1}{3^{n+1}} \right] \cup \left[\frac{3Q_{a_1 \dots a_n} + 2}{3^{n+1}}; \frac{3Q_{a_1 \dots a_n} + 3}{3^{n+1}} \right]$$

On a bien :

$$\begin{aligned} 3Q_{a_1 \dots a_n} &= a_1 3^n + \dots + a_n 3^0, & a_{n+1} &= 0 \\ 3Q_{a_1 \dots a_n} + 2 &= a_1 3^n + \dots + a_n 3^0, & a_{n+1} &= 2 \end{aligned}$$

Ce qui montre l'hérédité et donc conclut la récurrence.

Théorème 5.3.1. *$x \in C$ si et seulement si il existe une unique suite $(a_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de $\{0; 2\}$ telle que $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$.*

Preuve :

Etape 1 : Soit $x \in C$. On fixe arbitrairement un n tel que $x \in C_{n+1} \subset C_n$. Donc il existe $Q_{b_1 \dots b_{n+1}}$ et $Q_{a_1 \dots a_n}$ tel que

$$x \in B = \left[\frac{Q_{b_1 \dots b_{n+1}}}{3^{n+1}}; \frac{Q_{b_1 \dots b_{n+1}} + 1}{3^{n+1}} \right] \subset \left[\frac{Q_{a_1 \dots a_n}}{3^n}; \frac{Q_{a_1 \dots a_n} + 1}{3^n} \right] = A$$

Ainsi, soit le bord gauche de B est égal au bord gauche de A , ce qui signifie que $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$ et $b_{n+1} = 0$, soit le bord droit de B est égal au bord droit de A , ce qui signifie que $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$ et $b_{n+1} = 2$.

Ainsi, en réitérant le procédé à l'infini, on obtient que $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $a_i \in \{0; 2\}$.

Pour l'unicité de cette écriture, supposons qu'elle ne le soit pas et posons $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ et $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$, et notons n le premier entier tel que $a_i \neq b_i$. Supposons sans perte de généralité que $a_i = 0$ et $b_i = 2$. On a alors :

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}.$$

De la même manière, on montre que

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n}.$$

En mettant les deux inégalités ensemble, on obtient une absurdité qui conclut l'unicité.

Etape 2 : Soit $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $a_i \in \{0; 2\}$.

Alors d'après ce qui précède,

$$x \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{3^{i-n}} + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} Q_{a_1 \dots a_n} + \frac{1}{3^n}.$$

Ainsi, $x \in \left[\frac{Q_{a_1 \dots a_n}}{3^n}; \frac{Q_{a_1 \dots a_n} + 1}{3^n} \right]$, ce qui prouve, d'après la proposition 5.3.1 que $x \in C$.

Théorème 5.3.2. *C est non dénombrable et de cardinal égal à celui de $[0; 1]$.*

Preuve :

Soit f l'application qui à un élément de C associe un élément de $[0; 1]$ selon la règle suivante :

Si $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_i}{2^i}$, avec $\tilde{a}_i = 0$ si $a_i = 0$, $\tilde{a}_i = 1$ si $a_i = 2$. Tout élément de $[0; 1]$ peut s'écrire sous forme dyadique donc f est une application de C dans $[0; 1]$.

Cette application est surjective, donc C se surjecte dans $[0; 1]$ qui est équipotent à \mathbb{R} . Ainsi C est non dénombrable et de cardinal égal à celui de $[0; 1]$.

L'ensemble de Cantor est donc un ensemble compact discontinu, d'intérieur vide, de mesure de Lebesgue nulle, non dénombrable et équipotent à $[0; 1]$.

5.3.2 Approche fractale

On se munit de l'alphabet $\{0; 1\}$ duquel on construit l'espace $E^{(\omega)}$ des mots de longueur infinie. On sait que tout élément de l'ensemble de Cantor s'écrit comme une succession de 0 et de 2 en base 3. Ainsi, on définit la fonction d'adresse $h : E^{(\omega)} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à un mot associe son écriture en base 3, en remplaçant les 1 par des 2. Par exemple, si $\alpha = 011010011\dots \in E^{(\omega)}$, $h(\alpha) = (0.022020022\dots)_3$. De manière plus rigoureuse, h se définit de la manière suivante : $\forall \alpha \in E^{(\omega)}$,

$$\begin{aligned} h(0\alpha) &= \frac{h(\alpha)}{3} \\ h(1\alpha) &= \frac{h(\alpha) + 2}{3} \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 5.3.1 assurant l'unicité de l'écriture en base 3 d'un élément de l'ensemble de Cantor, il est clair que $h(E^{(\omega)}) = C$.

On considère le rapport de similitude $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ de dimension $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$, et on munit l'espace $E^{(\omega)}$ de la métrique $\rho_{\frac{1}{3}}$.

En associant à chaque mot une valeur $r(\alpha)$ de la même manière qu'en 5.2.2, on a bien que $\forall \alpha \in E^{(*)}$, $diam([\alpha]) = \frac{1}{3}^{|\alpha|} = r(\alpha)$.

On peut alors définir la mesure naturelle \mathcal{M} issue du rapport $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. D'après le théorème 5.2.2, on a :

$$\dim_H(E^{(\omega)}) = s = \frac{\log(2)}{\log(3)}. \quad (14)$$

Proposition 5.3.2. *La fonction d'adresse $h : (E^{(\omega)}, \rho_{\frac{1}{3}}) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ de l'ensemble de Cantor est un homéomorphisme bilipschitzien, au sens où $\forall \sigma, \tau \in E^{(\omega)}$,*

$$\frac{1}{3}\rho_{\frac{1}{3}}(\sigma, \tau) \leq |h(\sigma) - h(\tau)| \leq 3\rho_{\frac{1}{3}}(\sigma, \tau) \quad (15)$$

Preuve : Soit $\sigma, \tau \in E^{(\omega)}$ et α leur plus grand préfixe commun. Il existe donc σ' et τ' tels que $\sigma = \alpha\sigma'$ et $\tau = \alpha\tau'$. On raisonne par récurrence sur la taille de α .

Si $|\alpha| = 0$, alors $\rho_{\frac{1}{3}}(\sigma, \tau) = 1$. h est valeur dans $[0; 1]$ donc $|h(\sigma) - h(\tau)| \leq 1$. De plus les deux mots commencent par des lettres différentes donc l'un est dans $[0; \frac{1}{3}]$ et l'autre dans $[\frac{2}{3}; 1]$. Ainsi la double inégalité est vérifiée pour $|\alpha| = 0$.

Supposons la relation vérifiée pour un k fixé, et montrons la pour $|\alpha| = k + 1$. Alors, soit $\alpha = 0\beta$ soit $\alpha = 1\beta$, avec $|\beta| = k$. Supposons donc $\alpha = 1\beta$ (l'autre cas se montre de la même manière). L'hypothèse de récurrence nous indique :

$$\frac{1}{3}\rho_{\frac{1}{3}}(\beta\sigma', \beta\tau') \leq |h(\beta\sigma') - h(\beta\tau')| \leq 3\rho_{\frac{1}{3}}(\beta\sigma', \beta\tau').$$

En effet, $\sigma = \alpha\sigma' = 1\beta\sigma'$ et $\tau = \alpha\tau' = 1\beta\tau'$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour les mots $\beta\sigma'$ et $\beta\tau'$ car β est de longueur k .

$$\text{Or } \rho_{\frac{1}{3}}(\sigma, \tau) = \rho_{\frac{1}{3}}(1\beta\sigma', 1\beta\tau') = \frac{1}{3}\rho_{\frac{1}{3}}(\beta\sigma', \beta\tau')$$

Et

$$\begin{aligned} |h(\sigma) - h(\tau)| &= |h(\alpha\sigma') - h(\alpha\tau')| \\ &= |h(1\beta\sigma') - h(1\beta\tau')| \\ &= \left| \frac{h(\beta\sigma') + 2}{3} - \frac{h(\beta\tau') + 2}{3} \right| \\ &= \frac{1}{3} |h(\beta\sigma') - h(\beta\tau')|. \end{aligned}$$

La relation est donc bien vérifiée, ce qui conclut la récurrence.

On arrive donc au résultat final de cette partie.

La dimension de Hausdorff étant stable par homéomorphisme bilipschitzien, on peut conclure que :

$$\dim_H(C) = \dim_H(h(E^{(\omega)})) = \dim_H(E^{(\omega)}) = \frac{\log(2)}{\log(3)}. \quad (16)$$

Conclusion

Nous avons donc pendant tout ce mémoire eu une approche constructive des figures fractales et des objets nécessaires à leur étude. Ainsi, nous avons défini la mesure de Hausdorff, et construit une dimension du même nom. Cette dimension permet de caractériser les objets fractals, tout en coïncidant avec les notions de dimensions classiques pour les objets usuels de l'espace euclidien.

Nous nous sommes ensuite intéressés à une grande famille de fractales, les ensembles autosimilaires avec une approche géométrique, et l'étude de premiers exemples.

Nous avons enfin étudié les espaces de mots, et ainsi eu une approche plus abstraite mais aussi plus algorithmique de ce type de fractales. Cette approche nous a permis d'étudier le célèbre exemple de l'ensemble de Cantor.

6 Bibliographie

1. Deheuvels T., *Mesures et dimension de Hausdorff, Introduction a l'étude des ensembles auto-similaires*. Adresse URL : <https://w3.ens-rennes.fr/math/people/thibaut.deheuvels/Mesures-Hausdorff.pdf>
2. Edgar G. (2008), *Measure, Topology, and Fractal Geometry, Second Edition*, Springer Science+Business Media, LLC
3. Legrand P. (2014), *La symétrisation de Steiner*, APMEP n509, p.322-330
4. Mischler S. (2018), *Intégrales de Lebesgue et probabilités*, Chapitre 9 : Construction de Mesures
5. Pagès C. (2016), *Mesures et dimension de Hausdorff* - Tutoré par Jean-François Babadjian
6. Pajot H., Russ E. (2018), *Analyse dans les espaces métriques*. CNRS Edition. EDP Sciences, Collection Savoirs Actuels. hal-01649911
7. Russ E. (2017), *Inégalités isopérimétriques et isodiamétriques*, Université Grenoble Alpes, CNRS UMR 5582

7 Annexe : Preuve du théorème de Carathéodory

Il s'agit de montrer que $M_\mu := \{A \subset E \mid \forall B \subset E, \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)\}$ est une tribu sur E .

Etape 1 :

Soit $B \subset E$. Comme μ est une mesure extérieure, $\mu(B \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$, et $\mu(B \setminus \emptyset) = \mu(B)$. Donc $\mu(B) = \mu(B \cap \emptyset) + \mu(B \setminus \emptyset)$.

Etape 2 :

Soit $A \in M_\mu$ et $B \subset E$.

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(B \setminus A^c) + \mu(A^c \cap B). \end{aligned}$$

Donc $A^c \in M_\mu$.

Etape 3 :

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M_μ . On va montrer par récurrence que :

$$\mu(B) = \mu(B \setminus \bigcup_{m=0}^k A_m) + \sum_{m=0}^k \mu((B \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j) \cap A_m) \quad (17)$$

On a tout d'abord $A_0, A_1 \in M_\mu$. Donc en remplaçant B par $B \setminus A_0$.

Ainsi, $\mu(B \setminus A_0) = \mu((B \setminus A_0) \cap A_1) + \mu((B \setminus A_0) \setminus A_1) = \mu((B \setminus A_0) \cap A_1) + \mu(B \setminus (A_0 \cap A_1))$.

Et donc $\mu(B) = \mu((B \setminus A_0) \cap A_1) + \mu(B \setminus (A_0 \cap A_1)) + \mu(B \cap A_0)$, et ainsi on a l'initialisation.

On suppose la relation vérifiée pour un $k \geq 1$ fixé. On a $A_k \subset M_\mu$ et donc :

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} A_m) &= \mu((B \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} A_m) \cap A_k) + \mu((B \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} A_m) \setminus A_k) \\ &= \mu((B \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} A_m) \cap A_k) + \mu((B \setminus \bigcup_{m=0}^k A_m)) \end{aligned}$$

Ainsi, (17) devient :

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu((B \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} A_m) \cap A_k) + \mu((B \setminus \bigcup_{m=0}^k A_m)) + \sum_{m=0}^k \mu((B \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j) \cap A_m) \\ &= \mu(B \setminus \bigcup_{m=0}^k A_m) + \sum_{m=0}^k \mu((B \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j) \cap A_m) \end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence.

On pose $A = \bigcup_{k \geq 0} A_k$.

Ainsi, $\mu(B) \geq \mu(B \setminus A) + \sum_{m=0}^k \mu((B \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j) \cap A_m)$.

En passant à la limite sur k , $\mu(B) \geq \mu(B \setminus A) + \sum_{m=0}^{\infty} \mu((B \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j) \cap A_m)$.

Par σ -sous-additivité de μ , on a

$$\begin{aligned} \mu(B) &\geq \mu(B \setminus A) + \bigcup_{m=0}^{\infty} \mu((B \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j) \cap A_m) \\ &= \mu(B) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

L'autre inégalité est vérifiée car $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$. Ainsi M_μ est bien une mesure extérieure sur E .
De plus,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} A_k\right) &\geq \mu(\emptyset) + \sum_{m=0}^{\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{k \geq 0} A_k\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j \cap A_m\right) \\ &\geq \sum_{m=0}^{\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{k \geq 0} A_k\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j \cap A_m\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

Donc μ définit bien une mesure sur M_μ et donc (E, M_μ, μ) est bien un espace mesurable, ce qui conclut la démonstration.