Université Paris-Dauphine L3 MIDO, Mai 2010

Examen de théorie des jeux

Durée 2h. Tous documents et appareils électroniques interdits. **Il faut tourner la page.**

Les exercices sont indépendants et peuvent être faits dans n'importe quel ordre. Le barême indiqué est très approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (environ 5 pts) Deux joueurs jouent le jeu à somme nulle G suivant. La mise est de 1 euro par joueur pour commencer le jeu. On dispose de deux cartes, l'une rouge et l'autre noire. Le joueur 1 tire une carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte. Le joueur 1 décide alors soit de se coucher (abandon, et il donne alors sa mise au joueur 2), soit de doubler sa mise. Au cas où le joueur 1 a doublé la mise, le joueur 2 décide alors soit de se coucher (le joueur 1 gagne alors l'euro de mise initiale du joueur 2), soit de doubler sa mise également. Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile la carte tirée : si elle est Rouge, le joueur 1 ramasse toutes les mises (donc a gagné 2 euros) ; si elle est noire, le joueur 2 ramasse les mises (donc a gagné 2 euros). Les utilités sont égales aux gains monétaires espérés.

1) Mettre le jeu G sous forme extensive, puis sous forme normale.
2) Dans les jeux à deux joueurs et à somme nulle :
 2a) quel est le lien entre équilibres de Nash et stratégies optimales ?
 2b) quel est le lien entre paiements d'équilibres et valeur du jeu ?
3) Dans le jeu G, y-a-t-il des stratégies strictement dominées ? faiblement dominées ?
4) Quelle est la valeur du jeu G ? Les joueurs ont-ils des stratégies optimales ? Si oui, les déterminer.

Exercice 2 (environ 2 pts) Donner un exemple de jeu où éliminer des stratégies faiblement dominées élimine des équilibres de Nash.

Exercice 3 (environ 6 pts) On considère le jeu à deux joueurs dont les règles sont les suivantes. On dispose d'un ensemble E de n allumettes (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Le premier joueur partitionne cet ensemble en deux sous ensembles non-vides. Le second joueur choisit un de ces deux ensembles et le partitionne en deux sous-ensembles à son tour. Le premier choisit un de ces deux ensembles, le partitionne en deux sous-ensembles, etc. Le jeu se termine dès qu'un joueur choisit un singleton et ce joueur est alors déclaré gagnant. Formellement :

- le jeu G_n^i est le jeu à n allumettes où le joueur i joue en premier.
- dans le jeu G_1^i, le joueur i gagne (et $j \neq i$ perd). Le joueur qui gagne a un paiement de 1, celui qui perd un paiement de -1.
- pour $n > 1$, le jeu G_n^i est défini par induction ainsi :

- le joueur i choisit $n_i \in \{1, \ldots, n-1\}$
- le joueur j choisit $n_j \in \{n_i, n - n_i\}$
- on joue le jeu $G_{n_j}^j$.

Par exemple, dans le jeu G_2^1, le joueur 1 est obligé de partitionner l'ensemble initial de deux allumettes en deux singletons, le joueur 2 en choisit un et gagne.

1) Pourquoi est-on sûr qu'un des joueurs a une stratégie gagnante dans le jeu G_n^1 ?
2) Sans justifier, dire quel joueur a une stratégie gagnante dans les jeux G_1^1, G_2^1, G_3^1, G_4^1 et G_5^1. Toujours sans justifier, donner une stratégie réduite gagnante du joueur qui en a une dans le jeu G_4^1.

3) Soit N^α (respectivement N^β) l'ensemble des entiers n pour lesquels le joueur i (respectivement j) a une stratégie gagnante dans G_n^i.

3a) Montrer que $1 \in N^\alpha$ et que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$n \in N^\alpha \iff \exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1, n_1 \in N^\beta \text{ et } n - n_1 \in N^\beta$$

$$n \in N^\beta \iff \forall n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1, n_1 \in N^\alpha \text{ ou } n - n_1 \in N^\alpha$$

3b) Montrer par récurrence que N^α est l'ensemble des entiers strictement positifs de la forme $5p-1, 5p, 5p+1$ et que N^β est l'ensemble des entiers strictement positifs de la forme $5p+2, 5p+3$.

4) Vous êtes le joueur 1. Quel serait votre premier coup dans le jeu G_{104}^1 ?

Exercice 4 (environ 7 pts) Il y a deux joueurs : un vendeur (joueur 1) et un acheteur (joueur 2). Le vendeur dispose d'un bien à vendre, de qualité $q \in \{0,1\}$. Le vendeur connaît la qualité du bien. L'acheteur sait seulement que $q = 0$ avec probabilité $2/3$ et $q = 1$ avec probabilité $1/3$. Le vendeur propose un prix de vente p à l'acheteur. L'acheteur accepte ou refuse. S'il accepte, les paiements sont de $p - q$ pour le vendeur et $2q - p$ pour l'acheteur.

1) Dans ce jeu, qu'est-ce qu'une stratégie pure du joueur 1 ? du joueur 2 ?

2) On veut montrer qu'il n'existe pas d'équilibre pur dans lequel des biens de qualité 1 sont vendus. Pour ce faire, on suppose par l'absurde qu'il en existe un. Soit p_q le prix proposé par le vendeur dans cet équilibre quand son bien est de qualité q. Les questions suivantes se rapportent au comportement des joueurs dans cet équilibre.

2a) Montrer que l'acheteur accepte les offres au prix p_1.

2b) Montrer que $p_1 \geq 1$ et $p_0 \geq p_1$

2c) Montrer que si $p_0 > p_1$, alors l'acheteur refuse les offres au prix p_0. En déduire que $p_0 = p_1$ et aboutir à une contradiction.

3) On suppose désormais que le vendeur, avant de faire une offre à l'acheteur, peut choisir d'obtenir (C) ou non (NC) un certificat de bonne qualité. Il peut obtenir ce certificat même si son bien est de mauvaise qualité, mais cela lui coûte alors plus cher. Plus précisément, le coût du certificat est de $c_0 = 3$ si $q = 0$ et de $c_1 = 1/2$ si $q = 1$.

3a) dans le jeu ainsi modifié, qu'est-ce qu'une stratégie pure du joueur 1 ? du joueur 2 ?

3b) Donner un exemple d'équilibre bayésien parfait mélangeant.

3c) Donner un exemple d'équilibre bayésien parfait séparant.