Feuille 1 : représentation d'interactions stratégiques, connaissance commune

Exercice 1 ($*$) Il y a deux joueurs. A la période 1, le joueur 1 peut acheter ou non une action d'une entreprise. S'il ne l'achète pas, les deux joueurs ont un paiement (au sens d'utilité) de 0. S'il l'achète, avec probabilité 1/2 un des projets de l'entreprise réussit et avec probabilité 1/2 ce projet échoue. A la période 2, le joueur 1 apprend si le projet a réussi ou non. Il décide alors soit de conserver son action soit d'essayer de la vendre au joueur 2. Dans ce dernier cas, le joueur 2, qui ne sait pas si le projet a réussi ou non, accepte ou refuse d'acheter l'action. Si le joueur 1 décide de conserver son action, ou s'il essaie de la vendre mais que le joueur 2 refuse de l'acheter, le paiement du joueur 2 est de 0 et le paiement du joueur 1 est de 2 si le projet a réussi et de -3 si le projet a échoué. Si le joueur 1 vend son action au joueur 2 (et que le joueur 2 accepte de l'acheter), le paiement du joueur 1 est de -1 et le paiement du joueur 2 est de 4 si le projet a réussi et de -2 si le projet a échoué (on peut supposer que, pour des raisons non décrites, le joueur 2 est davantage capable de tirer partie de l'action de l'entreprise que le joueur 1).

Décrire cette situation par un jeu sous forme extensive. Combien les joueurs ont-ils de stratégies ? de stratégies réduites ? Mettre le jeu sous forme normale (sous forme d'une bimatrice).

Exercice 2 (TD) Représenter le jeu à deux joueurs Pierre-Papier-Ciseaux comme un jeu sous forme normale, puis comme un jeu sous forme extensive. Rappelons que le Papier bat la Pierre, qui bat les Ciseaux, qui battent le Papier. Si les deux joueurs jouent la même chose la partie est nulle, et les utilités sont de 0 pour chacun. Si un joueur bat l'autre, le gagnant a une utilité de 1, le perdant une utilité de -1.

Exercice 3 (TD) Représenter les variantes suivantes du jeu Pierre-Papier-Ciseaux ; dans chaque cas, dire combien les joueurs ont de stratégies.

a) Variante 1 : avant de jouer, le joueur 2 observe le coup du joueur 1.

b) Variante 2 : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

c) Variante 2 bis : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 sait si le joueur 2 observe son coup ou pas.

d) Variante 3 : si le joueur 1 joue Pierre, alors le joueur 2 l'observe avec probabilité 1/2 avant de jouer. Si le joueur 1 joue Ciseaux ou Papier, aucun joueur n'observe quoi que ce soit (on peut supposer par exemple que quand le joueur 1 se prépare à jouer Pierre, il a une fois sur deux un tic nerveux qui révèle à l'autre qu'il va jouer Pierre). Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

Exercice 4 Soit n un entier naturel. On considère le jeu à 2 joueurs suivant. On dispose d'un tas de n allumettes. Le joueur 1 prend ou une deux allumettes, puis tant qu'il y a des allumettes, le joueur 2 prend une ou deux allumettes, et ainsi de suite alternativement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Il a une utilité de -1, et l'autre joueur a une utilité de 1. Pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, représenter ce jeu et dire combien chaque joueur a de stratégies.

Exercice 5 (TD) *Connaissance partagée et connaissance commune (les cocus de Bagdad).*

Une proposition A est connaissance partagée d'un ensemble d'agents (ou connaissance partagée de niveau 1) si tous les agents savent que A est vraie. La proposition est connaissance partagée de niveau 2 si elle est connaissance partagée et que tous les agents le savent. Plus généralement, elle est connaissance partagée de niveau $k+1$ si elle est connaissance partagée de niveau k et que tous les agents le savent. Enfin, la proposition est connaissance commune si elle connaissance partagée de niveau k pour tout entier $k \geq 1$. La proposition A est donc connaissance commune si tous les agents savent A, tous les agents savent que tous les agents savent A, tous les agents savent que tous les agents savent que tous les agents savent A, et ainsi de suite, à l'infini. Le but de l'exercice est de mieux comprendre la différence entre connaissance partagée et connaissance commune.

Voici l'énoncé : dans un village, il y a n couples hétérosexuels et personne d'autre. Les coutumes sont les suivantes : si le jour j une femme acquiert la certitude que son mari a une liaison avec une autre femme, la nuit entre le jour j et le jour $j+1$, elle coupe la tête de son mari et la plante sur un pieu devant sa maison, de manière à ce que tout le monde la voit pendant le jour $j+1$. Les hommes prennent donc bien garde à ce que leur femme ne soient pas au courant de leurs éventuelles liaisons. En revanche, ils ne les cachent pas aux autres femmes du village. Le résultat est que chaque femme sait si les hommes autres que son mari sont fidèles, mais aucune femme ne sait si son mari l'est. De plus, les femmes raisonnent parfaitement, et toute cette description est connaissance commune.

On suppose qu'il y a 100 hommes infidèles. Chaque femme sait donc qu'il y a au moins 99 hommes infidèles. Pourtant, le village vit paisiblement. Arrive un explorateur dont il est connaissance commune qu'il dit toujours la vérité. Le 21 juin, l'explorateur rassemble tous les habitants sur la place du village et déclare : dans ce village, il y a au moins un homme infidèle. Le lendemain matin, rien ne se passe. Le surlendemain non plus, et tout semble normal jusqu'au matin du 29 septembre. Ce matin, les 100 têtes des hommes infidèles sont retrouvées devant leur maison, détachées de leur corps et plantées sur un pieu. Que s'est-il passé ? En particulier, puisque l'explorateur a dit quelque chose que tout le monde savait, pourquoi sa déclaration a-t-elle changé la situation ?

1) Supposons qu'il y ait $k \geq 1$ hommes infidèles. Si vous êtes une femme dont le mari est infidèle, que savez-vous précisément du nombre d'hommes infidèles ? Même question si votre mari est fidèle.

2) Dans le cas $k = 1$, que va-t-il se passer ? Dans le cas $k = 2$, que va-t-il se passer le 22 juin ? le 23 juin ?

3) Dans le cas $k = 3$, que va-t-il se passer le 22 juin ? le 23 juin ? le 24 juin ? Généraliser au cas k quelconque.

4) Revenons au problème initial. Puisque toutes les femmes savaient déjà qu'au moins un homme était infidèle, qu'a changé la déclaration de l'explorateur ?

Exercice 6 L'entreprise des frères L. peut investir de manière risquée ou non risquée. Si elle choisit un investissement non risqué, elle obtient un gain modéré à coup sûr. Si elle choisit un investissement risqué, elle fait un gain important avec probabilité 1/2, une perte modérée avec probabilité 1/3 et fait faillite avec probabilité 1/6. En cas de faillite, l'Etat peut soit décider de sauver l'entreprise, soit de ne pas intervenir. L'entreprise et l'Etat préfèrent tous les deux, par ordre décroissant, les issues suivantes : a) gain important, b) gain modéré, c) perte modérée, d) faillite et secours de l'Etat, e) faillite et absence d'intervention de l'Etat. Si l'entreprise est sûre qu'en cas de faillite, l'Etat la sauvera, elle préfère faire un investissement risqué. Si elle est sûre que l'Etat n'interviendra pas, elle préfère l'investissement non risqué.

a) Donner un exemple de jeu sous forme extensive compatible avec cette description.

b) Supposons que l'Etat doive régulièrement jouer à de tels jeux avec des entreprises différentes. Pourquoi cela pourrait-il pousser l'Etat à ne pas intervenir en cas de faillite ? (on demande juste une intuition).

Exercice 7 Le jeu du "morpion n-n avec remplissage jusqu'au bout" se décrit ainsi : il y a deux joueurs. On dispose d'une tableau de n cases sur n. Le premier joueur met une croix dans l'une des cases, puis le joueur 2 met un rond dans l'une des cases restées vides, puis le joueur 1 met une croix dans l'une des cases restées vides, et ainsi de suite, alternativement, JUSQU'A CE QUE LES NEUFS CASES SOIENT REMPLIES. Si à la fin de la partie, aucun des joueurs n'est parvenu à aligner trois de ses symboles, la partie est nulle et les deux joueurs ont une utilité de 0. Sinon, le premier joueur qui a réussi a aligner (sur une ligne, une colonne, ou une diagonale) trois de ses symboles a gagné : il a une utilité de 1 et l'autre a une utilité de -1.

Combien y-a-t-il de déroulement de parties possibles ? Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? On pourra commencer par examiner le cas $n = 2$.

Exercice 8 ($*$) *Problème des trois portes (ou problème de Monty-Hall)*

Ce problème est adapté du jeu télévisé américain "Let's make a deal". Il y a deux agents : un présentateur et un candidat. Le candidat est placé devant trois portes fermées, notées A, B et C. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. La porte derrière laquelle se trouve la voiture a été choisie de manière équiprobable. Le candidat doit désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait où se trouve la voiture). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte. Il gagne le lot qui se trouve derrière la porte qu'il ouvre.

Les questions qui se posent sont notamment : que doit faire le candidat (changer de porte ou conserver la même) ? Cela dépend-il de son choix initial ? de la porte qui a été ouverte par l'animateur ? de la stratégie de l'animateur ? Quelles sont les chances du candidat de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Comme la forme extensive du jeu présenté ci-dessus serait un peu longue a écrire, nous allons considérer la variante suivant, où au début on assigne d'office la porte A au candidat : tout d'abord, la porte derrière laquelle se trouve la voiture est tirée au sort de manière équiprobable. Puis l'animateur, ouvre une porte qui n'est ni la porte A ni celle derrière laquelle se trouve la voiture (si la voiture est derrière la porte A, l'animateur a le choix entre ouvrir la porte B et la porte C; il choisit alors comme il veut, pas forcément en tirant au hasard de manière équiprobable). Le candidat a alors le choix entre ouvrir la porte A et ouvrir l'autre porte encore fermée. Il gagne ce qui se trouve derrière la porte qu'il ouvre.

Les utilités sont : 1 pour le candidat et 0 pour l'animateur si le candidat gagne la voiture, 0 pour le candidat et x pour l'animateur si le candidat gagne la chèvre. En particulier, l'utilité espérée du candidat est égale a sa probabilité de gagner la voiture.

1) L'hypothèse selon laquelle la porte derrière laquelle se trouve la voiture est tirée au sort de façon équiprobable est-elle importante ? Pourquoi ?

2) A votre avis, est-il préférable de conserver la porte A ou de changer de porte ? Est-ce qu'il n'y a aucune différence ? Est-ce que cela dépend (et alors de quoi) ?

3) Ecrire la forme extensive de ce jeu. Combien le candidat a-t-il de stratégies ? Combien l'animateur a-t-il de stratégies ? Mettre le jeu sous forme normale.

4) Combien le candidat aurait-il eu de stratégies dans la version complète du jeu (celle où il choisit au départ une porte parmi A, B et C) ? Dans toute la suite on ne considère que la version simplifiée.

5) Montrer que la probabilité de gagner la voiture en changeant systématiquement de porte et la probabilité de gagner la voiture en ne changeant jamais de porte ne dépendent pas de la stratégie de l'animateur. Calculer ces probabilités.

6) Montrer que le candidat a une stratégie qui est meilleure réponse à toute stratégie de l'animateur. Quelle est cette stratégie ?

7) On considère maintenant la stratégie suivante du candidat : conserver la porte A si l'animateur ouvre la porte B ; choisir la porte B si l'animateur ouvre la porte C. Montrer que la probabilité de gagner la voiture avec cette stratégie dépend de la stratégie de l'animateur.

8) On suppose que l'animateur a la stratégie suivante : ouvrir la porte B si la voiture est derrière la porte A ou la porte C, et n'ouvrir la porte C que si la voiture est derrière la porte B. On suppose que le candidat le sait. Montrer que si l'animateur ouvre la porte C alors le candidat gagne systématiquement en changeant de porte, et que si l'animateur ouvre la porte B, le candidat est indifférent entre changer de porte et conserver la porte A.

8) Consulter la page http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall, et remarquer la phrase "Ce problème a longtemps été un cas de paradoxe probabiliste (...) pour lequel il existe deux solutions contradictoires défendables sans qu'on parvienne à faire triompher une interprétation. La solution 2/3-1/3 s'impose, en particulier après la réalisation de simulations d'un grand nombre de tirages."

S'étonner du fait que des gens ont eu besoin qu'on fasse des simulations pour accepter la solution du problème. Se dire que le simple fait de savoir représenter les interactions stratégiques proprement, ça aide !

Feuille 2 : stratégies mixtes, jeux à somme nulle

Exercice 9 (stratégies mixtes) (∗) On considère le jeu suivant :
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 3,5 \\ 4,2 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) que valent $u_1(H, D)$ et $u_2(H, D)$?

2) Pour $\sigma_2 = (1/2, 1/2)$ et $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$, que valent les paiements suivants : a) $u_1(H, \sigma_2)$, $u_2(H, \sigma_2)$, $u_1(B, \sigma_2)$ et $u_2(B, \sigma_2)$? b) $u_1(\sigma_1, G)$ et $u_2(\sigma_1, D)$? c) $u_1(\sigma_1, \sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1, \sigma_2)$?

3) Peut-on trouver des valeurs de x et de y dans $[0, 1]$ tels que pour $\sigma_1 = (x, 1 - x)$ et $\sigma_2 = (y, 1 - y)$, on ait $u_1(H, \sigma_2) = u_1(B, \sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1, G) = u_2(\sigma_1, D)$? Si oui, les déterminer.

Exercice 10 (stratégies mixtes) Mêmes questions pour le jeu suivant :
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,2 & 2,3 \\ 6,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 11 (∗) (stratégies mixtes) On considère le jeu suivant :
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & -1,2 & 1,-2 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,2 \\ -1,3 & 1,2 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Pour $\sigma_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ et $\sigma_1 = (3/4, 1/4, 0)$, que valent les paiements $u_1(A, \sigma_2)$ et $u_2(A, \sigma_2)$? $u_1(\sigma_1, G)$ et $u_2(\sigma_1, D)$? $u_1(\sigma_1, \sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1, \sigma_2)$?

2) Peut-on trouver des stratégies mixtes σ_1 et σ_2 telles que $u_1(A, \sigma_2) = u_1(B, \sigma_2) = u_1(C, \sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1, G) = u_2(\sigma_1, M) = u_2(\sigma_1, D)$? Si oui, les déterminer.

Exercice 12 (stratégies mixtes avec un continuum de stratégies) (Guerre d'usure) (TD)

Deux joueurs se disputent une ressource de valeur V. Pour qu'un joueur bénéficie de la ressource, il faut que l'autre s'en aille. Attendre a un coût de 1 par unité de temps. Les stratégies des joueurs consistent à choisir l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ auquel ils s'en vont si l'autre joueur n'est toujours pas parti à ce moment là. Si le joueur i choisit t_i et le joueur j choisit t_j les paiements du joueur i sont : $V - t_j$ si $t_i > t_j$, $V/2 - t_j$ si $t_i = t_j$, et $-t_i$ si $t_i < t_j$.

1) Les règles du jeu stipulent qu'un joueur a le droit de choisir un temps de départ $t > V$. Un tel choix vous paraît-il stupide ? Pourquoi ?

2) Jouer à ce jeu avec votre voisin (on prendra $V = 100$ et chacun écrira un réel positif sur un bout de papier, qui correspond à sa stratégie, puis vous comparerez vos stratégies et calculerez les paiements). Quelle est la somme de vos gains respectifs ?

3) Vous êtes le joueur 1. Vous savez que le joueur 2 joue $t = 100$ avec probabilité 1/2 et $t = 50$ avec probabilité 1/2. Supposons pour cette question seulement que vous êtes obligés de choisir un temps de départ entier. Que jouez-vous ? Pourquoi ? Cela modifie-t-il votre point de vue sur la question 1) ?

4) Montrer qu'il existe une stratégie mixte σ_2 du joueur 2 décrite par une densité de probabilité continue telle que, contre σ_2, le joueur 1 est indifférent entre toutes ses stratégies.

Exercice 13 (Jeux à somme nulle : un poker simplifié) (TD) Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 euro par joueur pour commencer le jeu. Un jeu de 32 cartes est battu, puis le joueur 1 tire 1 carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte. Le joueur 1 décide alors soit de se coucher (abandon, et il donne alors sa mise au joueur 2), soit de doubler sa mise. Au cas où le joueur 1 a doublé la mise, le joueur 2 décide alors soit de se coucher (le joueur 1 gagne alors l'euro de mise initiale du joueur 2), soit de doubler sa mise également. Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile la carte tirée : si elle est Rouge, le joueur 1 ramasse toutes les mises (donc a gagné 2 euros) ; si elle est noire , le joueur 2 ramasse les mises (donc a gagné 2 euros). Les utilités sont égales aux gains monétaires espérés.

1) Pourquoi pour l'analyse de ce jeu peut-on supposer qu'au lieu de 32 cartes (16 rouges et 16 noires), le jeu comporte 2 cartes, 1 rouge et 1 noire [on demande juste une intuition, pas un argument formel] ? Dans la suite, on considère cette variante avec seulement 2 cartes.

2) Mettre le jeu (avec 2 cartes) sous forme extensive, puis sous forme normale. Quelle est la valeur du jeu (la somme équitable que doit payer le joueur 1 au joueur 2 pour jouer un tour) ? Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?

Exercice 14 (TD) (Valeurs de jeux matriciels) Calculer les valeurs des jeux à somme nulle représentés par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 (un duel)

a) Duel au pistolet bruyant à une balle

Deux personnes se battent en duel. Les duellistes ont chacun une balle dans leur pistolet. Ils marchent l'un vers l'autre à une vitesse constante et, en partant au coup de sifflet à $t = 0$, ils devraient se rencontrer à $t = 1$. Si le joueur i tire sur j à l'instant t, il le touche avec une probabilité $p_i(t)$; $p_i(t)$ est supposé strictement croissante, continue, et telle que $p_i(0) = 0$, $p_i(1) = 1$. Le paiement du joueur i est 1 s'il touche son adversaire avant d'être touché, -1 dans le cas symétrique et 0 si aucun n'est touché ou s'ils sont touchés au même instant.

Si l'autre a déjà tiré (et n'a donc plus de balles), le mieux est d'attendre $t = 1$ pour tirer, afin d'être sûr de faire mouche. On ne s'intéressera donc qu'à des stratégies du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant a_i, tirer à l'instant $t = 1$ sinon", où $a_i \in [0, 1]$.

1) Représenter cette situation comme un jeu sous forme normale à somme nulle. Déterminer les fonctions de paiements.

2) Montrer que ce jeu a une valeur et que la stratégie optimale des deux joueurs est de tirer à t^* défini par $p_1(t^*) + p_2(t^*) = 1$.

b) Duel au silencieux, à une balle.

La situation est identique sauf que les duellistes, munis de silencieux, ne peuvent pas savoir si leur adversaire a déjà tiré (si bien qu'une stratégie du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant, tirer à l'instant $t = 1$ sinon" n'est plus réalisable). Représenter cette situation par un jeu sous forme normale. Montrer que ce jeu n'a pas de valeur (en stratégies pures).

On pourra montrer tout d'abord que s'il y a un équilibre (en stratégie pures), alors dans cet équilibre, les deux joueurs tirent au même moment, puis montrer qu'il n'y a aucun équilibre (en stratégies pures).

Exercice 16 (retard à l'école maternelle) ($*$)

A l'école maternelle "Les p'tits dauphins", la règle est que les parents doivent venir chercher leurs enfants au plus tard à 17h. Pourtant, des parents arrivent parfois en retard, si bien que le personnel doit les attendre. Afin d'en finir avec ces retards, ou du moins de les rendre moins fréquents, la direction décide d'inciter les parents à arriver à l'heure en faisant payer une amende aux retardataires : 1 euros aux parents qui ont entre dix et vingt minutes de retard, 2 euros à ceux qui ont entre vingt et trente minutes de retard, 3 euros à ceux qui ont entre 30 et 40 minutes de retard, etc. Il s'agit dans les grandes lignes d'une histoire vraie.

1) A votre avis, comment cette règle a-t-elle fait évoluer le comportement des parents ? Expliquer.

2) Quelques mois plus tard, la direction décide de supprimer le système d'amendes. A votre avis, comment cela a-t-il fait évoluer le comportement des parents ? Expliquer.

Feuille 3 : dominance

Exercice 17 $(*)$ Une assemblée composée de 99 membres doit voter à la majorité pour choisir entre deux projets: a et b. Chaque membre $i \in \{1, ..., 99\}$ est doté d'une fonction d'utilité $u^i : \{a, b\} \mapsto \{0, 1\}$ supposée bijective. Pour voter, chacun écrit a ou b sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté.

1) Ecrire le jeu sous forme stratégique associé et montrer que voter pour le projet que l'on préfère est une stratégie dominante.

2) Il y a maintenant 3 votants et 3 projets a, b, c. Pour voter, chacun écrit a, b ou c sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté (si chaque projet reçoit un vote, aucun projet n'est realisé et l'utilité de chacun vaut 0). On note A (respectivement B, C) l'issue "le projet a (respectivement b, c) est adopté." On suppose que l'utilité d'un votant ne dépend que du projet adopté, et qu'on a $u_1(A) = u_2(B) = u_3(C) = 2$, $u_1(B) = u_2(C) = u_3(B) = 1$, $u_1(C) = u_2(A) = u_3(A) = 0$ (le fait que $u_1(A) = 2$ signifie que pour tout profil de stratégies tel que A est adopté, par exemple (a, a, b) ou (a, c, a), l'utilité du votant 1 est de 2).

a) Les joueurs ont-ils des stratégies dominantes ?

b) On suppose maintenant que les joueurs votent séquentiellement : le joueur 1 vote, puis le joueur 2 vote (connaissant le vote du joueur 1), puis le joueur 3 vote (connaissant les votes des deux autres joueurs). Les joueurs sont rationnels et ceci est connaissance commune. A votre avis, quel candidat sera élu ? Pourquoi ?

Exercice 18 $(*)$ Considérons le jeu suivant, où x est un réel :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 10^6, 1 & -10^6, 0 \\ x, 1 & x, 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Supposons que vous soyez le joueur 1. Pour quelles valeurs de x joueriez-vous B ? Pour $x < 10^6$, quelle est l'unique issue restante après l'élimination itérée des stratégies strictement dominées ? Expliquer l'éventuel écart entre vos réponses à ces questions en faisant référence à la connaissance commune de la rationalité ou à la possibilité d'erreurs.

Exercice 19 (TD) (Enchères au second prix sous plis scellés avec valeurs privées)

Un bien est mis aux enchères. Il y a n acheteurs potentiels numérotés de 1 à n. La procédure d'enchères est la suivante: chaque acheteur soumet une offre écrite sous pli scellé. Tous les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien et paye un prix égal à la seconde plus haute offre (en cas de gagnants ex-aequo, le joueur de plus petit numéro parmi les gagnants achète l'objet au prix le plus haut).

Chaque acheteur i a une valuation v_i dans $\mathbb{R}_+$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. S'il achète le bien au prix p, son utilité est $v_i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle.

Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique. Montrer qu'offrir sa propre valuation est une stratégie dominante.

Exercice 20 (TD) (Enchères au second prix sous plis scellés avec valeur publique et signaux privés)

Même système d'enchères, mais maintenant chaque acheteur potentiel i n'est pas sûr de la valeur que le bien a pour lui. Il dispose uniquement d'un *signal* v_i dans $\mathbb{R}^+$. La vraie valeur du bien est commune à tous les joueurs et égale à $v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$. Si le joueur i achète le bien au prix p, son utilité est $v - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle. Les joueurs ne connaissent pas les signaux des autres. Pour fixer les idées, on suppose que les v_i sont tirés uniformément et indépendamment dans $[0, 1]$.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique. Montrer qu'offrir son signal n'est PAS une stratégie dominante (on pourra se contenter d'étudier le cas $n = 2$).

2) Expliquer pourquoi, si les joueurs offrent tous leur signal et qu'il y a au moins 3 joueurs, le joueur qui remporte l'enchère risque d'être victime de la "malédiction du vainqueur" (terme consacré pour désigner une situation où, ex-post, c'est à dire une fois la vraie valeur du bien connue, celui qui a remporté l'enchère préférerait ne pas l'avoir remporter car il a payé trop cher).

Exercice 21 $(*)$ Considérons le jeu suivant, où le joueur 1 n'a qu'une stratégie :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ H & \begin{pmatrix} 10,1 & -2,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Montrer que l'élimination des stratégies strictement dominées mène à un jeu avec une unique issue.

2) En ajoutant au joueur 1 une stratégie strictement dominante, est-il possible d'obtenir un jeu dans l'élimination itérée des stratégies strictement dominées mène à une unique issue qui est pire pour le joueur 1 ? Expliquer pourquoi dans un tel jeu le joueur 1 aimerait pouvoir s'engager à ne pas jouer sa stratégie strictement dominante.

Exercice 22 Montrer que dans un jeu fini, chaque joueur a au moins une stratégie qui n'est pas faiblement dominée. Montrer qu'en revanche, si un joueur a un nombre infini de stratégies, il se peut que toutes ses stratégies soient strictement dominées.

Exercice 23 $(*)$ Considérons le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,0 & 3,1 & 1,1 \\ 1,1 & 3,0 & 0,1 \\ 2,2 & 3,3 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Identifier toutes les paires de stratégies telles que l'une domine faiblement l'autre.

(b) Choisir une stratégie faiblement dominée, l'éliminer afin d'obtenir un jeu réduit, puis répéter ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de stratégies faiblement dominées (attention : deux stratégies ayant les mêmes paiements ne se dominent pas faiblement). Montrer qu'on peut aboutir ainsi à un jeu avec (H, d) comme unique profil de stratégies mais aussi à un jeu avec (B, c) comme unique profil de stratégies.

(c) Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu de départ ? Montrer que l'élimination itérée des stratégies faiblement dominées peut éliminer des équilibres de Nash.

Exercice 24 (TD) On considère un groupe de n étudiants préparant un concours (n est un entier strictement positif fixé). Chaque étudiant i dans $\{1, ..., n\}$ doit choisir un nombre d'heures $h_i \in I\!R_+$ qu'il consacre à préparer le concours. Ces choix sont supposés simultanés.

La désutilité de l'étudiant i dûe à son effort est alors $\frac{1}{2}{h_i}^2$. Le bénéfice, qu'il retire de son résultat comparé aux autres, est $h_i - \bar{h}$, où $\bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_j$. En bref, l'utilité de l'étudiant i est donc donnée par: $h_i - \bar{h} - \frac{1}{2}{h_i}^2$.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique.

2) Montrer que chaque joueur a une stratégie dominante.

3) Déterminer le ou les équilibres de Nash du jeu (on ne considèrera que des stratégies pures), et les paiements associés.

Exercice 25 Considérons le jeu à trois joueurs sous forme stratégique suivant. Chaque joueur a 2 stratégies pures : le joueur 1 a les stratégies H et B (la ligne du haut ou la ligne du bas), le joueur 2 a les stratégies g et d (la colonne de gauche ou de droite), et le joueur 3 a les stratégies G et D (la matrice de gauche ou la matrice de droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 3,4,4 & 1,3,3 \\ 8,1,4 & 2,0,6 \end{pmatrix} \\ & G \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,0,5 & 0,1,6 \\ 5,1,3 & 1,2,5 \end{pmatrix} \\ & D \end{array}$$

a) Donner toutes les paires de stratégies telles que l'une domine l'autre, strictement ou faiblement [Attention : bien comprendre ce que cela signifie dans un jeu à plus de deux joueurs]

(b) Eliminer itérativement les stratégies strictement dominées. Quels sont les équilibres de Nash ?

Exercice 26 Dans le jeu de Pierre-Papier-Ciseaux-Puits, la pierre bat les ciseaux qui battent le papier qui bat la pierre, et de plus le puits bat la pierre et les ciseaux, mais est battu par le papier. A votre avis, y-a-t-il des stratégies meilleures que d'autres ? Des stratégies à éviter ? En quel sens ?

Feuille 4 : équilibres de Nash

Exercice 27 ($*$) Calculer les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,-1) \\ (2,2,2) & (-1,3,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (8,4,2) & (7,7,-2) \\ (9,2,5) & (-10,1,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 28 Même question que dans l'exercice précédent, mais pour le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,0,-1) & (1,1,1) \\ (2,0,3) & (5,-1,4) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-6,4,-1) & (1,2,3) \\ (-8,0,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 29 ($*$) Soit un jeu fini $G = \{I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$. Pour chaque $i \in I$, soit $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$ ($S_{-i} = \times_{j\in I\setminus\{i\}} S_j$ est l'ensemble des profils de stratégies des joueurs autres que i). Soit le jeu $G' = \{I, (S_i)_{i\in I}, (u'_i)_{i\in I}\}$, où pour tout $s \in S = \times_{i\in I} S_i$, $u'_i(s) = a_i u_i(s) + f_i(s_{-i})$. Le jeu G' est donc obtenu à partir du jeu G en rajoutant aux paiements des joueurs un paiement qui ne dépend que de ce que font les autres joueurs.

1) Soit $\sigma \in \times_{i\in I}\Delta(S_i)$, $i \in I$, et $\tau_i \in \Delta(S_i)$. Montrer que $u'_i(\sigma) - u'_i(\tau_i, \sigma_{-i}) = a_i[u_i(\sigma) - u_i(\tau_i, \sigma_{-i})]$.

2) En déduire que G et G' ont les mêmes équilibres mixtes.

3) Montrez que tous les jeux suivants ont les mêmes équilibres mixtes :

$$a)\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 3,3 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2,2 & 0,0 \\ 0,0 & 6,6 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 3,1 & 0,0 \\ 0,0 & 9,3 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 101,101 & 0,100 \\ 100,0 & 3,3 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 102,1 & 0,0 \\ 100,0 & 6,3 \end{pmatrix}$$

4) On suppose qu'avant de jouer, les joueurs peuvent discuter, et éventuellement se mettre d'accord sur ce qu'ils vont jouer (mais l'accord n'est pas contraignant : au moment de jouer, ils sont libres de respecter ou de ne pas respecter l'accord). Que pensez-vous qu'ils joueront dans le jeu a) ? dans le jeu d) ?

Exercice 30 ($*$) Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux suivants.

$$a)\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 6,6 & 2,7 \\ 7,2 & 0,0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2,-2 & -1,1 \\ -3,3 & 4,-4 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}$$

Exercice 31 (TD) Calculer dans chaque cas les équilibres de Nash du jeu $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, où $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$, et, x représentant la stratégie du joueur 1 et y celle du joueur 2 :

a) $u_1(x, y) = 5xy - x - y + 2$; $u_2(x, y) = 5xy - 3x - 3y + 5$.

b) $u_1(x, y) = -(x - y)^2$; $u_2(x, y) = (x + y - 1)^2$.

c) $u_1(x, y) = -(x - y)^2$; $u_2(x, y) = (x - y)^2$.

Exercice 32 Un groupe de n pêcheurs exploite un lac contenant une quantité de poisson considérée comme infinie. Si chaque pêcheur i prend une quantité $x_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^n x_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix p et cherche à maximiser son revenu (le coût de production est supposé nul).

1- Ecrire le revenu du pêcheur i en fonction de $(x_1, ..., x_n)$.

2- Calculer la correspondance de meilleure réponse, les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.

3- Etudier le cas du monopole ($n = 1$) et comparer.

Exercice 33 (TD) Dans les jeux suivants, déterminer les stratégies itérativement strictement dominées (par des stratégies mixtes), puis calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes.

$$a)\quad \begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4,2 & 2,3 & -2,-1 \\ 6,-1 & 0,0 & 5,-3 \\ -1,5 & -1,0 & 10,-1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (8,0) \\ (0,0) & (3,3) & (0,0) \\ (0,8) & (0,0) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 34 Déterminer les équilibres de Nash mixtes du jeu à trois joueurs suivant

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1,-1) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (1,1,-1) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 35 (un jeu de marchandage)

On note : $T = \{(x,y) \in I\!R^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur un point de T, sachant que l'abscisse correspond au paiement du joueur 1, l'ordonnée correspond au paiement du joueur 2, et qu'en cas de désaccord le paiement de chaque joueur sera nul.

Plus précisément, on considère l'interaction suivante. Simultanément, le joueur 1 choisit un réel x et le joueur 2 choisit un réel y (x et y peuvent être n'importe quels réels). Si $(x,y) \in T$, alors le paiement du joueur 1 est x et celui du joueur 2 est y. Si $(x,y) \notin T$, alors le paiement de chaque joueur est nul. (Ces règles sont connues des deux joueurs.)

1) Modéliser ceci par un jeu sous forme stratégique $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$.

2) Soit (x,y) dans T tels que $x+y=1$. Montrer que (x,y) est un paiement d'équilibre de Nash de G.

3) Déterminer tous les paiements d'équilibre de Nash de G.

Exercice 36 Soit $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ un jeu à deux joueurs symétrique, c'est-à-dire tel que: $I = \{1,2\}$, $S_1 = S_2$ noté X, et $\forall (x_1,x_2) \in X \times X$, $u_1(x_1,x_2) = u_2(x_2,x_1)$.

On suppose que X est un convexe compact de $I\!R^n$, que u_1 est continue et que pour tout x_2 dans X, l'application qui à x_1 associe $u_1(x_1,x_2)$ est quasiconcave.

Montrer qu'il existe un équilibre symétrique, i.e. qu'il existe un élément x^* de X tel que (x^*,x^*) soit un équilibre de Nash de G. (On pourra poser $D = \{(x_1,x_2) \in X \times X, x_1 = x_2\}$ et appliquer le théorème de Kakutani à une correspondance bien choisie de D dans D).

Exercice 37 ($*$) (l'argument des jumeaux) L'argument suivant est parfois avancé pour dire que, dans le dilemme du prisonnier (ci-dessous), les deux joueurs devraient jouer C :

$$\begin{array}{c} \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,3 & 4,-2 \\ -2,4 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

"Les deux joueurs se trouvent exactement dans la même situation, ils vont donc jouer la même chose. Si je suis un des joueurs, je sais donc que l'autre va jouer la même chose que moi, et que donc globalement nous allons jouer soit (C,C), soit (D,D) ; comme (C,C) donne un meilleur paiement que (D,D), il vaut mieux que je joue C."

Qu'en pensez-vous ?

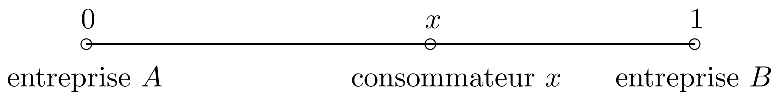
Exercice 38 *(TD, rapidement)* Dans le jeu de la guerre d'usure (exercice 12), montrer qu'il y a un équilibre mixte symétrique (les deux joueurs ont la même stratégie mixte), où chaque joueur tire au sort son temps de départ si l'autre n'est pas encore parti selon une distribution de probabilité continue f à support sur $I\!R_+$ tout entier.

Exercice 39 Deux entreprises A et B, situées dans une même ville, produisent le même bien. Le coût unitaire de production de chaque entreprise vaut $1/2$. Chaque entreprise doit fixer un prix de vente unitaire, p_A pour l'entreprise A et p_B pour l'entreprise B.

La ville est composée d'un continu de consommateurs. Chaque consommateur achète une unité du bien à une et une seule des deux entreprises.

L'ensemble des consommateurs est situé uniformément dans la ville, qui est linéaire et représentée par le segment [0,1].

Ville



L'entreprise A se situe à l'extremité ouest (point d'abscisse 0) de la ville, l'entreprise B se situe à l'extremité est (point d'abscisse 1) de la ville.

Chaque consommateur subit un coût de transport linéaire: se déplacer d'une distance y coûte $y/2$. Ainsi, si un consommateur habitant au point $x \in [0,1]$ achète à l'entreprise A, il perçoit un coût de $p_A + x/2$, et s'il achète à l'entreprise B, il perçoit un coût de $p_B + \frac{1-x}{2}$. Chaque consommateur achète son bien en choisissant l'entreprise dont le prix perçu est le plus bas.

On étudie le jeu où chaque entreprise choisit son prix de vente dans $[1/2, +\infty[$, et vend aux consommateurs qui se présentent chez elle. Pour simplifier, on considère que le nombre d'habitant de la ville est 1 (l'unité pouvant être par exemple le million), et donc si $3/4$ de la population achète à l'entreprise A, son profit est $3/4(p_A - 1/2)$ (celui de l'entreprise B sera alors de $1/4(p_B - 1/2)$ car $1/4$ de la population achète à B). Chaque entreprise veut maximiser son profit. On note g_A la fonction de paiement de l'entreprise A, et g_B celle de l'entreprise B.

A) <u>Calcul des fonctions de paiements</u>

Soient p_A et p_B dans $[1/2, +\infty[$ les prix fixés par les entreprises.

A1. Soit un consommateur situé en $x \in [0,1]$. Montrer que si $x > 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme B. Montrer que si $x < 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme A.

A2. Montrer que si $p_B - p_A > 1/2$, on a $g_A(p_A, p_B) = p_A - 1/2$ et $g_B(p_A, p_B) = 0$. Calculer $g_A(p_A, p_B)$ et $g_B(p_A, p_B)$ dans le cas où $p_A - p_B > 1/2$.

A3. On suppose $p_B - p_A \in [-1/2, +1/2]$. Montrer que:

$$g_A(p_A, p_B) = (1/2 + p_B - p_A)(p_A - 1/2) \text{ et } g_B(p_A, p_B) = (1/2 + p_A - p_B)(p_B - 1/2).$$

B) <u>Calcul des meilleures réponses</u>

Fixons le prix p_B de l'entreprise B. Montrer que la meilleure réponse de l'entreprise A est de fixer un prix p_A tel que (on pourra faire 3 cas, selon que $p_B \in [1/2, 1]$, $p_B \in [1, 2]$ ou $p_B \geq 2$):

$$p_A = \frac{1+p_B}{2} \text{ si } p_B \leq 2,\ p_A = p_B - 1/2 \text{ si } p_B \geq 2.$$

Enoncer la meilleure réponse de l'entreprise B au prix de l'entreprise A (par symétrie, il est inutile de refaire les calculs).

C) Calculer le ou les équilibres de Nash du jeu, et les paiements associés.