## Feuille 1 : représentation d'interactions stratégiques, connaissance commune

**Exercice 1** ($*$) Il y a deux joueurs. A la période 1, le joueur 1 peut acheter ou non une action d'une entreprise. S'il ne l'achète pas, les deux joueurs ont un paiement (au sens d'utilité) de 0. S'il l'achète, avec probabilité 1/2 un des projets de l'entreprise réussit et avec probabilité 1/2 ce projet échoue. A la période 2, le joueur 1 apprend si le projet a réussi ou non. Il décide alors soit de conserver son action soit d'essayer de la vendre au joueur 2. Dans ce dernier cas, le joueur 2, qui ne sait pas si le projet a réussi ou non, accepte ou refuse d'acheter l'action. Si le joueur 1 décide de conserver son action, ou s'il essaie de la vendre mais que le joueur 2 refuse de l'acheter, le paiement du joueur 2 est de 0 et le paiement du joueur 1 est de 2 si le projet a réussi et de -3 si le projet a échoué. Si le joueur 1 vend son action au joueur 2 (et que le joueur 2 accepte de l'acheter), le paiement du joueur 1 est de -1 et le paiement du joueur 2 est de 4 si le projet a réussi et de -2 si le projet a échoué (on peut supposer que, pour des raisons non décrites, le joueur 2 est davantage capable de tirer partie de l'action de l'entreprise que le joueur 1).

Décrire cette situation par un jeu sous forme extensive. Combien les joueurs ont-ils de stratégies ? de stratégies réduites ? Mettre le jeu sous forme normale (sous forme d'une bimatrice).

**Exercice 2** (TD) Représenter le jeu à deux joueurs Pierre-Papier-Ciseaux comme un jeu sous forme normale, puis comme un jeu sous forme extensive. Rappelons que le Papier bat la Pierre, qui bat les Ciseaux, qui battent le Papier. Si les deux joueurs jouent la même chose la partie est nulle, et les utilités sont de 0 pour chacun. Si un joueur bat l'autre, le gagnant a une utilité de 1, le perdant une utilité de -1.

**Exercice 3** (TD) Représenter les variantes suivantes du jeu Pierre-Papier-Ciseaux ; dans chaque cas, dire combien les joueurs ont de stratégies.

a) Variante 1 : avant de jouer, le joueur 2 observe le coup du joueur 1.

b) Variante 2 : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

c) Variante 2 bis : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 sait si le joueur 2 observe son coup ou pas.

d) Variante 3 : si le joueur 1 joue Pierre, alors le joueur 2 l'observe avec probabilité 1/2 avant de jouer. Si le joueur 1 joue Ciseaux ou Papier, aucun joueur n'observe quoi que ce soit (on peut supposer par exemple que quand le joueur 1 se prépare à jouer Pierre, il a une fois sur deux un tic nerveux qui révèle à l'autre qu'il va jouer Pierre). Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

**Exercice 4** Soit $n$ un entier naturel. On considère le jeu à 2 joueurs suivant. On dispose d'un tas de $n$ allumettes. Le joueur 1 prend ou une deux allumettes, puis tant qu'il y a des allumettes, le joueur 2 prend une ou deux allumettes, et ainsi de suite alternativement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Il a une utilité de $-1$, et l'autre joueur a une utilité de 1. Pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, représenter ce jeu et dire combien chaque joueur a de stratégies.

**Exercice 5** (TD) *Connaissance partagée et connaissance commune (les cocus de Bagdad).*

Une proposition $A$ est connaissance partagée d'un ensemble d'agents (ou connaissance partagée de niveau 1) si tous les agents savent que $A$ est vraie. La proposition est connaissance partagée de niveau 2 si elle est connaissance partagée et que tous les agents le savent. Plus généralement, elle est connaissance partagée de niveau $k + 1$ si elle est connaissance partagée de niveau $k$ et que tous les agents le savent. Enfin, la proposition est connaissance commune si elle connaissance partagée de niveau $k$ pour tout entier $k \geq 1$. La proposition $A$ est donc connaissance commune si tous les agents savent $A$, tous les agents savent que tous les agents savent $A$, tous les agents savent que tous les agents savent que tous les agents savent $A$, et ainsi de suite, à l'infini. Le but de l'exercice est de mieux comprendre la différence entre connaissance partagée et connaissance commune.

Voici l'énoncé : dans un village, il y a $n$ couples hétérosexuels et personne d'autre. Les coutumes sont les suivantes : si le jour $j$ une femme acquiert la certitude que son mari a une liaison avec une autre femme, la nuit entre le jour $j$ et le jour $j+1$, elle coupe la tête de son mari et la plante sur un pieu devant sa maison, de manière à ce que tout le monde la voit pendant le jour $j+1$. Les hommes prennent donc bien garde à ce que leur femme ne soient pas au courant de leurs éventuelles liaisons. En revanche, ils ne les cachent pas aux autres femmes du village. Le résultat est que chaque femme sait si les hommes autres que son mari sont fidèles, mais aucune femme ne sait si son mari l'est. De plus, les femmes raisonnent parfaitement, et toute cette description est connaissance commune.

On suppose qu'il y a 100 hommes infidèles. Chaque femme sait donc qu'il y a au moins 99 hommes infidèles. Pourtant, le village vit paisiblement. Arrive un explorateur dont il est connaissance commune qu'il dit toujours la vérité. Le 21 juin, l'explorateur rassemble tous les habitants sur la place du village et déclare : dans ce village, il y a au moins un homme infidèle. Le lendemain matin, rien ne se passe. Le surlendemain non plus, et tout semble normal jusqu'au matin du 29 septembre. Ce matin, les 100 têtes des hommes infidèles sont retrouvées devant leur maison, détachées de leur corps et plantées sur un pieu. Que s'est-il passé ? En particulier, puisque l'explorateur a dit quelque chose que tout le monde savait, pourquoi sa déclaration a-t-elle changé la situation ?

1) Supposons qu'il y ait $k \geq 1$ hommes infidèles. Si vous êtes une femme dont le mari est infidèle, que savez-vous précisément du nombre d'hommes infidèles ? Même question si votre mari est fidèle.

2) Dans le cas $k = 1$, que va-t-il se passer ? Dans le cas $k = 2$, que va-t-il se passer le 22 juin ? le 23 juin ?

3) Dans le cas $k = 3$, que va-t-il se passer le 22 juin ? le 23 juin ? le 24 juin ? Généraliser au cas $k$ quelconque.

4) Revenons au problème initial. Puisque toutes les femmes savaient déjà qu'au moins un homme était infidèle, qu'a changé la déclaration de l'explorateur ?

**Exercice 6** L'entreprise des frères L. peut investir de manière risquée ou non risquée. Si elle choisit un investissement non risqué, elle obtient un gain modéré à coup sûr. Si elle choisit un investissement risqué, elle fait un gain important avec probabilité 1/2, une perte modérée avec probabilité 1/3 et fait faillite avec probabilité 1/6. En cas de faillite, l'Etat peut soit décider de sauver l'entreprise, soit de ne pas intervenir. L'entreprise et l'Etat préfèrent tous les deux, par ordre décroissant, les issues suivantes : a) gain important, b) gain modéré, c) perte modérée, d) faillite et secours de l'Etat, e) faillite et absence d'intervention de l'Etat. Si l'entreprise est sûre qu'en cas de faillite, l'Etat la sauvera, elle préfère faire un investissement risqué. Si elle est sûre que l'Etat n'interviendra pas, elle préfère l'investissement non risqué.

a) Donner un exemple de jeu sous forme extensive compatible avec cette description.

b) Supposons que l'Etat doive régulièrement jouer à de tels jeux avec des entreprises différentes. Pourquoi cela pourrait-il pousser l'Etat à ne pas intervenir en cas de faillite ? (on demande juste une intuition).

**Exercice 7** Le jeu du "morpion n-n avec remplissage jusqu'au bout" se décrit ainsi : il y a deux joueurs. On dispose d'une tableau de n cases sur n. Le premier joueur met une croix dans l'une des cases, puis le joueur 2 met un rond dans l'une des cases restées vides, puis le joueur 1 met une croix dans l'une des cases restées vides, et ainsi de suite, alternativement, JUSQU'A CE QUE LES NEUFS CASES SOIENT REMPLIES. Si à la fin de la partie, aucun des joueurs n'est parvenu à aligner trois de ses symboles, la partie est nulle et les deux joueurs ont une utilité de 0. Sinon, le premier joueur qui a réussi a aligner (sur une ligne, une colonne, ou une diagonale) trois de ses symboles a gagné : il a une utilité de 1 et l'autre a une utilité de -1.

Combien y-a-t-il de déroulement de parties possibles ? Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? On pourra commencer par examiner le cas $n = 2$.

**Exercice 8** (∗) *Problème des trois portes (ou problème de Monty-Hall)*

Ce problème est adapté du jeu télévisé américain "Let's make a deal". Il y a deux agents : un présentateur et un candidat. Le candidat est placé devant trois portes fermées, notées $A$, $B$ et $C$. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. La porte derrière laquelle se trouve la voiture a été choisie de manière équiprobable. Le candidat doit désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait où se trouve la voiture). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte. Il gagne le lot qui se trouve derrière la porte qu'il ouvre.

Les questions qui se posent sont notamment : que doit faire le candidat (changer de porte ou conserver la même) ? Cela dépend-il de son choix initial ? de la porte qui a été ouverte par l'animateur ? de la stratégie de l'animateur ? Quelles sont les chances du candidat de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Comme la forme extensive du jeu présenté ci-dessus serait un peu longue a écrire, nous allons considérer la variante suivant, où au début on assigne d'office la porte A au candidat : tout d'abord, la porte derrière laquelle se trouve la voiture est tirée au sort de manière équiprobable. Puis l'animateur, ouvre une porte qui n'est ni la porte A ni celle derrière laquelle se trouve la voiture (si la voiture est derrière la porte A, l'animateur a le choix entre ouvrir la porte B et la porte C; il choisit alors comme il veut, pas forcément en tirant au hasard de manière équiprobable). Le candidat a alors le choix entre ouvrir la porte A et ouvrir l'autre porte encore fermée. Il gagne ce qui se trouve derrière la porte qu'il ouvre.

Les utilités sont : 1 pour le candidat et 0 pour l'animateur si le candidat gagne la voiture, 0 pour le candidat et $x$ pour l'animateur si le candidat gagne la chèvre. En particulier, l'utilité espérée du candidat est égale a sa probabilité de gagner la voiture.

1) L'hypothèse selon laquelle la porte derrière laquelle se trouve la voiture est tirée au sort de façon équiprobable est-elle importante ? Pourquoi ?

2) A votre avis, est-il préférable de conserver la porte A ou de changer de porte ? Est-ce qu'il n'y a aucune différence ? Est-ce que cela dépend (et alors de quoi) ?

3) Ecrire la forme extensive de ce jeu. Combien le candidat a-t-il de stratégies ? Combien l'animateur a-t-il de stratégies ? Mettre le jeu sous forme normale.

4) Combien le candidat aurait-il eu de stratégies dans la version complète du jeu (celle où il choisit au départ une porte parmi A, B et C) ? Dans toute la suite on ne considère que la version simplifiée.

5) Montrer que la probabilité de gagner la voiture en changeant systématiquement de porte et la probabilité de gagner la voiture en ne changeant jamais de porte ne dépendent pas de la stratégie de l'animateur. Calculer ces probabilités.

6) Montrer que le candidat a une stratégie qui est meilleure réponse à toute stratégie de l'animateur. Quelle est cette stratégie ?

7) On considère maintenant la stratégie suivante du candidat : conserver la porte A si l'animateur ouvre la porte B ; choisir la porte B si l'animateur ouvre la porte C. Montrer que la probabilité de gagner la voiture avec cette stratégie dépend de la stratégie de l'animateur.

8) On suppose que l'animateur a la stratégie suivante : ouvrir la porte B si la voiture est derrière la porte A ou la porte C, et n'ouvrir la porte C que si la voiture est derrière la porte B. On suppose que le candidat le sait. Montrer que si l'animateur ouvre la porte C alors le candidat gagne systématiquement en changeant de porte, et que si l'animateur ouvre la porte B, le candidat est indifférent entre changer de porte et conserver la porte A.

8) Consulter la page http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall, et remarquer la phrase "Ce problème a longtemps été un cas de paradoxe probabiliste (...) pour lequel il existe deux solutions contradictoires défendables sans qu'on parvienne à faire triompher une interprétation. La solution 2/3-1/3 s'impose, en particulier après la réalisation de simulations d'un grand nombre de tirages."

S'étonner du fait que des gens ont eu besoin qu'on fasse des simulations pour accepter la solution du problème. Se dire que le simple fait de savoir représenter les interactions stratégiques proprement, ça aide !

## Feuille 2 : stratégies mixtes, jeux à somme nulle

**Exercice 9** (stratégies mixtes) ($*$) On considère le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 3,5 \\ 4,2 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) que valent $u_1(H,D)$ et $u_2(H,D)$ ?

2) Pour $\sigma_2 = (1/2, 1/2)$ et $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$, que valent les paiements suivants : a) $u_1(H,\sigma_2)$, $u_2(H,\sigma_2)$, $u_1(B,\sigma_2)$ et $u_2(B,\sigma_2)$ ? b) $u_1(\sigma_1, G)$ et $u_2(\sigma_1, D)$ ? c) $u_1(\sigma_1,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1,\sigma_2)$ ?

3) Peut-on trouver des valeurs de $x$ et de $y$ dans $[0,1]$ tels que pour $\sigma_1 = (x, 1-x)$ et $\sigma_2 = (y, 1-y)$, on ait $u_1(H,\sigma_2) = u_1(B,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1, G) = u_2(\sigma_1, D)$ ? Si oui, les déterminer.

**Exercice 10** (stratégies mixtes) Mêmes questions pour le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,2 & 2,3 \\ 6,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 11** ($*$) (stratégies mixtes) On considère le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & -1,2 & 1,-2 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,2 \\ -1,3 & 1,2 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Pour $\sigma_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ et $\sigma_1 = (3/4, 1/4, 0)$, que valent les paiements $u_1(A,\sigma_2)$ et $u_2(A,\sigma_2)$ ? $u_1(\sigma_1, G)$ et $u_2(\sigma_1, D)$ ? $u_1(\sigma_1,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1,\sigma_2)$ ?

2) Peut-on trouver des stratégies mixtes $\sigma_1$ et $\sigma_2$ telles que $u_1(A,\sigma_2) = u_1(B,\sigma_2) = u_1(C,\sigma_2)$ et $u_2(\sigma_1, G) = u_2(\sigma_1, M) = u_2(\sigma_1, D)$ ? Si oui, les déterminer.

**Exercice 12** (stratégies mixtes avec un continuum de stratégies) (Guerre d'usure) (TD)

Deux joueurs se disputent une ressource de valeur $V$. Pour qu'un joueur bénéficie de la ressource, il faut que l'autre s'en aille. Attendre a un coût de 1 par unité de temps. Les stratégies des joueurs consistent à choisir l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ auquel ils s'en vont si l'autre joueur n'est toujours pas parti à ce moment là. Si le joueur $i$ choisit $t_i$ et le joueur $j$ choisit $t_j$ les paiements du joueur $i$ sont : $V - t_j$ si $t_i < t_j$, $V/2 - t_j$ si $t_i = t_j$, et $-t_i$ si $t_i < t_j$.

1) Les règles du jeu stipulent qu'un joueur a le droit de choisir un temps de départ $t > V$. Un tel choix vous paraît-il stupide ? Pourquoi ?

2) Jouer à ce jeu avec votre voisin (on prendra $V = 100$ et chacun écrira un réel positif sur un bout de papier, qui correspond à sa stratégie, puis vous comparerez vos stratégies et calculerez les paiements). Quelle est la somme de vos gains respectifs ?

3) Vous êtes le joueur 1. Vous savez que le joueur 2 joue $t = 100$ avec probabilité 1/2 et $t = 50$ avec probabilité 1/2. Supposons pour cette question seulement que vous êtes obligés de choisir un temps de départ entier. Que jouez-vous ? Pourquoi ? Cela modifie-t-il votre point de vue sur la question 1) ?

4) Montrer qu'il existe une stratégie mixte $\sigma_2$ du joueur 2 décrite par une densité de probabilité continue telle que, contre $\sigma_2$, le joueur 1 est indifférent entre toutes ses stratégies.

**Exercice 13** (Jeux à somme nulle : un poker simplifié) (TD) Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 euro par joueur pour commencer le jeu. Un jeu de 32 cartes est battu, puis le joueur 1 tire 1 carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte. Le joueur 1 décide alors soit de se coucher (abandon, et il donne alors sa mise au joueur 2), soit de doubler sa mise. Au cas où le joueur 1 a doublé la mise, le joueur 2 décide alors soit de se coucher (le joueur 1 gagne alors l'euro de mise initiale du joueur 2), soit de doubler sa mise également. Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile la carte tirée : si elle est Rouge, le joueur 1 ramasse toutes les mises (donc a gagné 2 euros) ; si elle est noire , le joueur 2 ramasse les mises (donc a gagné 2 euros). Les utilités sont égales aux gains monétaires espérés.

1) Pourquoi pour l'analyse de ce jeu peut-on supposer qu'au lieu de 32 cartes (16 rouges et 16 noires), le jeu comporte 2 cartes, 1 rouge et 1 noire [on demande juste une intuition, pas un argument formel] ? Dans la suite, on considère cette variante avec seulement 2 cartes.

2) Mettre le jeu (avec 2 cartes) sous forme extensive, puis sous forme normale. Quelle est la valeur du jeu (la somme équitable que doit payer le joueur 1 au joueur 2 pour jouer un tour) ? Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?

**Exercice 14** (TD) (Valeurs de jeux matriciels) Calculer les valeurs des jeux à somme nulle représentés par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 15** (un duel)

*a) Duel au pistolet bruyant à une balle*

Deux personnes se battent en duel. Les duellistes ont chacun une balle dans leur pistolet. Ils marchent l'un vers l'autre à une vitesse constante et, en partant au coup de sifflet à $t = 0$, ils devraient se rencontrer à $t = 1$. Si le joueur $i$ tire sur $j$ à l'instant $t$, il le touche avec une probabilité $p_i(t)$ ; $p_i(t)$ est supposé strictement croissante, continue, et telle que $p_i(0) = 0$, $p_i(1) = 1$. Le paiement du joueur $i$ est 1 s'il touche son adversaire avant d'être touché, $-1$ dans le cas symétrique et 0 si aucun n'est touché ou s'ils sont touchés au même instant.

Si l'autre a déjà tiré (et n'a donc plus de balles), le mieux est d'attendre $t = 1$ pour tirer, afin d'être sûr de faire mouche. On ne s'intéressera donc qu'à des stratégies du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant $a_i$, tirer à l'instant $t = 1$ sinon", où $a_i \in [0, 1]$.

1) Représenter cette situation comme un jeu sous forme normale à somme nulle. Déterminer les fonctions de paiements.

2) Montrer que ce jeu a une valeur et que la stratégie optimale des deux joueurs est de tirer à $t^*$ défini par $p_1(t^*) + p_2(t^*) = 1$.

*b) Duel au silencieux, à une balle.*

La situation est identique sauf que les duellistes, munis de silencieux, ne peuvent pas savoir si leur adversaire a déjà tiré (si bien qu'une stratégie du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant, tirer à l'instant $t = 1$ sinon" n'est plus réalisable). Représenter cette situation par un jeu sous forme normale. Montrer que ce jeu n'a pas de valeur (en stratégies pures).

On pourra montrer tout d'abord que s'il y a un équilibre (en stratégie pures), alors dans cet équilibre, les deux joueurs tirent au même moment, puis montrer qu'il n'y a aucun équilibre (en stratégies pures).

**Exercice 16** (retard à l'école maternelle) ($*$)

A l'école maternelle "Les p'tits dauphins", la règle est que les parents doivent venir chercher leurs enfants au plus tard à 17h. Pourtant, des parents arrivent parfois en retard, si bien que le personnel doit les attendre. Afin d'en finir avec ces retards, ou du moins de les rendre moins fréquents, la direction décide d'inciter les parents à arriver à l'heure en faisant payer une amende aux retardataires : 1 euros aux parents qui ont entre dix et vingt minutes de retard, 2 euros à ceux qui ont entre vingt et trente minutes de retard, 3 euros à ceux qui ont entre 30 et 40 minutes de retard, etc. Il s'agit dans les grandes lignes d'une histoire vraie.

1) A votre avis, comment cette règle a-t-elle fait évoluer le comportement des parents ? Expliquer.

2) Quelques mois plus tard, la direction décide de supprimer le système d'amendes. A votre avis, comment cela a-t-il fait évoluer le comportement des parents ? Expliquer.