

Problème:

Partie I:

a) la firme (joueur 2) cherche à maximiser son profit, sans tenir compte de la désutilité causée à la société par sa production. S'Etat cherche à maximiser l'utilité de la société toute entière, firme comprise [Bien sûr, un modèle complet devrait préciser l'utilité des consommateurs du bien produit par la firme]

b) L'utilité de la firme est $U_2(t, q) = (p - t - q)q$. C'est une parabole concave de racines $q = 0$ et $q = p - t$. Si $t \geq p$, le maximum sur $\mathbb{R}_+$ est atteint en $q = 0$, sinon en $q = \frac{p-t}{2}$.

Meilleure réponse à t :
$$\begin{cases} q = 0 & \text{si } t \geq p \\ q = \frac{p-t}{2} & \text{si } t \leq p \end{cases}$$

c) La firme connaît t avant de choisir q . De ce fait, en supposant la firme rationnelle, elle va jouer sa meilleure réponse à t . Anticipant cela, l'Etat prévoit que son utilité sera:

$$U_1(t, 0) = -c \quad \text{si l'on choisit } t \geq p$$

$$U_1\left(t, \frac{p-t}{2}\right) = (p - t - q)q - c \quad \text{si l'on choisit } t \in]0, p[, \text{ avec } q = \frac{p-t}{2}$$

$$\text{soit } U_1\left(t, \frac{p-t}{2}\right) = \left(\frac{p+t}{2} - 2d\right)\left(\frac{p-t}{2}\right) - c. \quad \text{C'est une parabole}$$

concave atteignant son maximum en $t = \frac{1}{2}(\frac{p}{2} + 2d) = d \in]0, p[$

La meilleure taxe dans $]0, p[$ est donc $t = d$, qui donne une utilité

$$U_1\left(d, \frac{p-d}{2}\right) = \left(\frac{p-d}{2}\right)^2 - c > -c. \quad \text{C'est donc aussi la meilleure taxe dans }]0, +\infty[.$$

Conclusion: le meilleur niveau de taxe parmi les ~~taxes~~ niveaux strictement positifs est $t = d$.

②

d) Si l'Etat impose la meilleure taxe strictement positive, $t=d$, son utilité attendue est de : $U_1(d, p=d) = \left(\frac{p-d}{2}\right)^2 - c$

Si l'n impose pas de taxe, ~~car~~ ($t=0$, il n'y a donc pas de coût c de collecte de la taxe), son utilité attendue est ~~$U_1(0, p_0)$~~

$U_1(0, p_0) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - dp$. Il est donc judicieux de conseiller à

l'Etat d'imposer une taxe si $\left(\frac{p-d}{2}\right)^2 - c \geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - dp$
c'est à dire $\left| c \leq \frac{d^2}{4} \right|$

Conformément à l'intuition, il est intéressant d'imposer une taxe si le coût de collecte de la taxe c est faible devant le (une fonction croissante de) dommage environnemental causé par la production de la firme.

Remarque: parmi les niveaux de taxe > 0 , le meilleur est $t=d$. C'est le niveau de taxe qui fait que

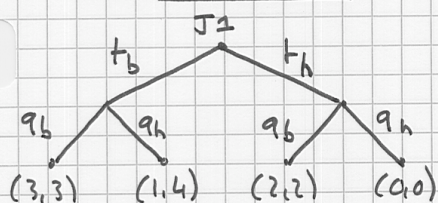
l'entreprise dans son calcul de maximisation de profit exactement le dommage causé par sa production.

On dit que ce niveau de taxe permet d'internaliser l'externalité négative liée à la production de la firme.

Partie II

3

a) Forme extensive:



Forme normale

	$q_b q_b$	$q_b q_h$	$q_h q_b$	$q_h q_h$
t_b	<u>3, 3</u>	<u>3, 3</u>	1, <u>4</u>	<u>1, 4</u>
t_h	2, <u>2</u>	0, 0	<u>2, 2</u>	0, 0

b) La stratégie σ_i domine faiblement la stratégie $\tilde{\sigma}_i$ si pour tout profil de stratégies des autres joueurs, σ_i a un paiement supérieur ou égal au paiement de $\tilde{\sigma}_i$, avec inégalité stricte pour au moins un profil de stratégie des autres joueurs. Une stratégie est faiblement dominée s'il existe une stratégie qui la domine faiblement. Une stratégie est faiblement dominante si elle domine faiblement toutes les autres stratégies (du même joueur).

Dans le jeu G, le joueur 1 n'a pas de stratégies faiblement dominées (et donc pas de stratégies strictement dominées ni de stratégie faiblement dominante). Pour le joueur 2:

- $q_b q_h$ est strictement dominée
- $q_b q_b$ et $q_h q_h$ sont faiblement dominées
- $q_h q_b$ est faiblement dominante.

c) Il y a une unique équi

* Il y a deux équilibres purs : $(t_b, q_h q_h)$ et $(t_h, q_h q_b)$

[Ce n'était pas demandé mais seul $(t_h, q_h q_b)$ est parfait en sous-jeux]

* Il n'y a pas d'équilibre où le joueur 1 ne joue pas en pur.

En effet, si le joueur 1 joue $(p, 1-p)$ avec $p \in]0, 1[$, alors l'unique meilleure réponse du joueur 2 est $q_h q_b$, et $(p, 1-p)$ n'est pas meilleure réponse à $q_h q_b$ pour $p > 0$.

④

* Si le joueur 1 joue t_b : les meilleures réponses du joueur 2 sont les stratégies $(0, 0, y_3, 1-y_3)$, avec y_3 dans $[0, 1]$, t_b est une meilleure réponse à cette stratégie si $y_3 \leq 1/2$.
Donc les équilibres où le joueur 1 joue la stratégie pure t_b sont les profils de stratégies $(t_b, (0, 0, y_3, 1-y_3))$ avec $y_3 \in [0, 1/2]$.

* Par un raisonnement analogue, les ~~les~~ équilibres où le joueur 1 joue la stratégie pure t_h sont les profils de stratégies du type $(t_h, (y_1, 0, y_2, 0))$ avec $y_1 \in [0, 1/2]$.

d) Considérons les stratégies suivantes de G_δ :

• s_1 (stratégie du joueur 1): jouer t_b à l'étape 1. Aux étapes suivantes, jouer t_b si à toutes les étapes précédentes les actions prises ont été t_b et q_b , jouer t_h sinon.

• s_2 (stratégie du joueur 2): jouer $q_b q_b$ à l'étape 1. Aux étapes suivantes, jouer $q_b q_b$ si à toutes les étapes précédentes les actions prises ont été t_b et q_b , jouer $q_h q_b$ sinon.

• s_1 est une meilleure réponse à s_2 pour tout facteur d'exemple δ (le joueur 1 obtenant à chaque étape son meilleur paiement possible).

• s_2 est une meilleure réponse à s_1 pour tout facteur d'exemple $\delta > 1/2$.

En effet: une déviation contre s_1 , si le joueur 2 dévie de s_2 , il obtient au plus à partir de l'étape de déviation comme paiement:

$$4 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k 2 = 4 + 2 \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{4(1-\delta) + 2\delta}{1-\delta} = \frac{4-2\delta}{1-\delta}$$

après qu'il aurait obtenu $\frac{3}{1-\delta}$ en suivant s_2 . Si $\delta > 1/2$, $\frac{3}{1-\delta} > \frac{4-2\delta}{1-\delta}$ et donc s_2 est une meilleure réponse à s_1 .

Conclusion: (s_1, s_2) est un équilibre de G_δ , et ~~est~~ pour $\delta > 1/2$.

Sur le chemin d'équilibre les joueurs obtiennent les paiements $(3, 3)$ à chaque étape.

⑤ Dans le jeu G_T , avec T fini, un télééquilibre ne peut exister car dans un équilibre de G_T , à la dernière étape, sur le chemin d'équilibre, les joueurs jouent forcément un équilibre du jeu de base (sinon l'un des joueurs aurait une déviation profitable). Ils n'obtiennent donc pas $(3,3)$ à la dernière étape.

⑥

Exercice 1 (jeu des pirates).

a) $n=2$: $(50, 0)$: le pirate 1 propose ce partage et vote pour. Il a au moins la moitié du vote pour.

$n=3$: $(49, 0, 1)$: le pirate 1 a besoin de la voix du pirate 2 ou de celle du pirate 3. Le pirate 3 accepte tout partage qui lui donne au moins 1 (car si le partage est refusé il aura 0). En revanche, la voix du pirate 2 est inaccessible car il aura 50 si le partage est refusé. Le pirate 1 propose donc $(49, 0, 1)$.

$n=4$: $(48, 0, 1, 0)$: le pirate 1 a besoin d'une autre voix que la sienne. La voix du pirate 2 "coûte" 50 pièces, celle du pirate 3 en coûte 1, celle du pirate 4 en coûte 2 (car il faut leur donner strictement plus que ce qu'ils obtiendront si le partage est refusé).

$n=5$: $(48, 0, 1, 0, 1)$: le pirate 1 a besoin de deux autres voix.

Le coût du vote est :

pirate 2	50
pirate 3	1
pirate 4	2
pirate 5	1

Les voix les moins "chères" sont celles des pirates 3 et 5.

b) Plus généralement, pour $n \leq 100$, il y a un unique équilibre sous-jeu parfait qui induit le partage : $(50 - p + 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0)$ si $n = 2p$ et le partage : $(50 - p, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 1)$ si $n = 2p + 1$. Une preuve rigoureuse se fait par récurrence.

⑦

c) pour $n > 100$, le plus vieux pirate est obligé de ne proposer aucune pièce d'or à strictement plus de la moitié des pirates. Comme, d'après l'hypothèse (H), les pirates auxquels on ne propose aucune pièce votent contre le partage, celui-ci est refusé et le plus vieux n'obtient rien.

[Remarque: si $n = 100 + k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, les pirates 1 à k obtiendront 0 pièces, les pirates $k+1, k+3, \dots, k+99$ obtiendront 1 pièce, les pirates $k+2, k+4, \dots, k+100$ obtiendront 0 pièces]